Canad. Math. Bull. Vol. **30** (3), 1987

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\Sigma_{p \leq x}\, p^a\{\frac{x}{p}\}^k$

PAR

ARMEL MERCIER*

ABSTRACT. Let $\{x\}$ denote the fractional part of x. We find an asymptotic formula of $\Sigma_{p \leq x}\, p^a\{\frac{x}{p}\}^k$, where k is any positive integer and a is any real number ≥ 1, and so for the sum $\Sigma_{n \leq x} f(n)$, where $f(n)$ belongs to a class of additive functions.

1. **Introduction**. Soit k un entier positif et désignons par $\{t\} = t - [t]$ la partie fractionnaire de t. Dans le présent texte, on portera notre attention sur le comportement asymptotique de l'expression en titre et nous établirons un lien existant entre $\Sigma_{p \leq x}\, p^a\{\frac{x}{p}\}^k$ et la somme $\Sigma_{n \leq x}\, n^a\{\frac{x}{n}\}^k$, où a est un nombre réel > -1. Remarquons que cette dernière somme fut l'objet d'étude dans [5], [6] et [7]. A l'aide de ce comportement asymptotique nous déduirons des formules asymptotiques pour une grande classe de fonctions additives $f(n)$ et aussi pour $P^r(n)$, où $P(n)$ est la fonction arithmétique qui désigne le plus grand facteur premier de n, et r est un nombre réel ≥ 0.

2. **Résultats préliminaires**.

LEMME 1. *Soit k, j des entiers non-négatifs et soit a un nombre réel tel que $a > k - 1$. Alors on a*

$$\int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \frac{j!}{(a-k+1)^{j+1}} + (-1)^{j+1} \sum_{m=1}^{k} \left((-1)^m \binom{k}{m}\right.$$
$$\left. \times \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i i! \binom{j}{i}}{(a+m-k+1)^{i+1}} \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \zeta^{(j-i)}(a+l-k+1)\right),$$

où $\zeta^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction zêta, et une somme vide est interprétée comme étant égale à zéro.

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \int_1^\infty \frac{(t-[t])^k}{t^{a+2}} \log^j t\, dt,$$

Reçu par la rédaction le 19 décembre 1985 et, sous une forme revisée, le 23 juillet 1986.

*Travail dans le cadre de la subvention CRSNG A 3508.

AMS Subject Classification (1980): 10H25.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-044-9 Published online by Cambridge University Press

alors pour obtenir le résultat il suffit d'évaluer l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}}\, dt, \qquad 0 \le i \le k.$$

Pour $i = 0$, on a

$$\int_1^\infty \frac{\log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \frac{j!}{(a+1)^{j+1}},$$

et pour $1 \le i \le k$, on a

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \sum_{n=1}^\infty n^i \int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}}\, dt.$$

En utilisant l'intégration par parties nous obtenons

$$\int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \sum_{r=0}^{j} \frac{r!\binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \left(\frac{\log^{j-r}(n+1)}{(n+1)^{a+1}} - \frac{\log^{j-r} n}{n^{a+1}} \right),$$

et ainsi on peut écrire

$$\sum_{n=1}^\infty n^i \int_n^{n+1} \frac{\log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(-n^i \sum_{r=0}^{j} \frac{r!\binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \left(\frac{\log^{j-r}(n+1)}{(n+1)^{a+1}} - \frac{\log^{j-r} n}{n^{a+1}} \right) \right).$$

Le développement de $n^i = ((n+1)-1)^i$ nous permet finalement d'obtenir pour $a > i-1$, $i \ge 1$,

$$\int_1^\infty \frac{[t]^i \log^j t}{t^{a+2}}\, dt = (-1)^{j+1} \sum_{r=0}^{j} \left(\frac{(-1)^r r!\binom{j}{r}}{(a+1)^{r+1}} \sum_{l=1}^{i} (-1)^l \binom{i}{l} \zeta^{(j-r)}(a+1-i+l) \right).$$

Ceci achève la démonstration de ce résultat.

COROLLAIRE 1. *Pour tout entier positif k et pour tout $r \ge 1$, nous avons*

$$\int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^{r-1} t}{t^{k+1}}\, dt = \frac{(-1)^r}{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{j!} \frac{d^r}{ds^r} \left(\frac{(s-k)\zeta(s-k+j)}{s(s-1)\dots(s-k+j)} \right)_{s=k}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m \binom{k}{m}}{s+m-k} \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \zeta(s+l-k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{j!} \frac{\zeta(s-k+j)}{s(s-1)\dots(s-k+j)},$$

alors en utilisant le lemme précédent, nous pouvons écrire pour s $> k$

$$(s-k) \int_1^\infty \frac{\{t\}^k}{t^{s+1}}\, dt = 1 - (s-k) \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{j!} \frac{\zeta(s-k+j)}{s(s-1)\dots(s-k+j)}.$$

En dérivant r fois cette équation par rapport à s et en faisant tendre s vers k nous obtenons le résultat.

COROLLAIRE 2. *Pour tout entier non-négatif j, nous avons*

$$\int_1^\infty \frac{\{t\} \log^j t}{t^2}\, dt = j!\Big(1 + \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+1}\gamma_i\Big),$$

où

$$\gamma_i = \frac{(-1)^i}{i!} \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\log^i n}{n} - \frac{\log^{i+1} N}{i+1}\Big).$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1, nous avons pour $a > 0$,

$$(1) \qquad \int_1^\infty \frac{\{t\} \log^j t}{t^{a+2}}\, dt = \frac{j!}{a^{j+1}} + (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-)^i i! \binom{j}{i}}{(a+1)^{i+1}} \zeta^{(j-i)}(a+1).$$

Or pour a dans un voisinage de 0, on a [4]

$$\zeta(a+1) = 1/a + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a^k,$$

où

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\log^k n}{n} - \frac{\log^{k+1} N}{k+1}\Big)$$

et ainsi, on obtient

$$\zeta^{(j)}(a+1) = \frac{(-1)^j j!}{a^{j+1}} + j!\gamma_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-j+1)\gamma_k a^{k-j}.$$

En remplaçant cette dernière équation dans (1), nous obtenons le résultat.

3. **Théorème principal**.

THÉORÈME 1. *Soit a un nombre réel plus grand que* -1 *et soit* k $\in$ ***N***. *Alors pour tout m* $\in$ ***N*** *nous avons*

$$\sum_{p \le x} p^a \Big\{\frac{x}{p}\Big\}^k = x^{a+1} \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{\log^i x} + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x),$$

où les constantes c_i sont définies de la façon suivante:

$$c_i = \int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^{i-1} t}{t^{a+2}}\, dt.$$

DÉMONSTRATION. Pour $a > -1$ et pour $k > 0$ on a

$$\sum_{p \le x} p^a \Big\{\frac{x}{p}\Big\}^k = \int_{2^-}^{x^+} y^a \{x/y\}^k \, d\pi(y)$$

et en utilisant l'intégrale de Stieltjes on peut écrire

$$(2) \qquad \sum_{p \le x} p^a \Big\{\frac{x}{p}\Big\}^k = \int_2^x \frac{y^a \{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}\, dy + \int_{2^-}^{x^+} y^a \{x/y\}^k \, d(\pi(y) - li(y)).$$

Or d'après le théorème des nombres premiers, nous pouvons écrire

$$\pi(x) - li(x) = O(x/\log^{m+1} x),$$

pour chaque entier positif m, d'où l'on obtient

$$\int_{2^-}^{x^+} y^a\{x/y\}^k\, d(\pi(y) - li(y)) \ll \int_{2^-}^{x^+} y^a\, d(\pi(y) - li(y)) \ll x^{a+1}/\log^{m+1} x.$$

Maintenant l'équation (2) devient

$$\sum_{p \le x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}\, dy + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x). \tag{3}$$

Puisque

$$\int_1^{x/2} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\left(\frac{\log^m t}{\log^m x} + \frac{\log^{m+1} t}{\log^{m+1} x} + \dots\right) dt = O(1/\log^m x)$$

alors on a d'une part

$$\int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}\, dy = \frac{x^{a+1}}{\log x}\int_1^{x/2} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\, dt + \frac{x^{a+1}}{\log^2 x}\int_1^{x/2} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}} \log t\, dt$$
$$+ \dots + \frac{x^{a+1}}{\log^m x}\int_1^{x/2} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}} \log^{m-1} t\, dt + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x),$$

et d'autre part pour $1 \le i \le m$ et pour x assez grand, on a

$$\int_{x/2}^{\infty} \frac{\{t\}^k \log^{i-1} t}{t^{a+2}}\, dt = O(x^{-a-1+\epsilon}), \quad \text{pour tout } \epsilon > 0;$$

alors pour $a > -1$, on peut écrire

$$\int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}^k}{\log y}\, dy = \frac{x^{a+1}}{\log x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\, dt + \frac{x^{a+1}}{\log^2 x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}} \log t\, dt$$
$$+ \dots + \frac{x^{a+1}}{\log^m x}\int_1^{\infty} \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}} \log^{m-1} t\, dt + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x)$$

et en remplaçant cette dernière équation dans (3) nous obtenons le résultat.

Une conséquence immédiate de ce résultat est donnée par le résultat suivant:

COROLLAIRE 3. *Pour tout $m \in N$, on a*

$$\sum_{p \le x} \left\{\frac{x}{p}\right\} = x \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\log^i x} + O(x/\log^{m+1} x),$$

où

$$d_i = \int_1^{\infty} \frac{\{t\} \log^{i-1} t}{t^2}\, dt.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-044-9 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 4. *Soit a un nombre réel positif. Alors pour tout entier positif k nous avons*

$$\sum_{p \le x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \frac{1}{\log x} \sum_{n \le x} n^a \left\{\frac{x}{n}\right\}^k + O(x^{a+1}/\log^2 x).$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\int_2^x \frac{y^a\{\frac{x}{y}\}}{\log y}\, dy = \frac{x^{a+1}}{\log x} \int_1^\infty \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\, dt + O(x^{a+1}/\log^2 x),$$

et que (voir [7])

$$(4) \qquad \sum_{n \le x} n^a \left\{\frac{x}{n}\right\}^k = x^{a+1} \int_1^\infty \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\, dt + O(x^{a+1/3} \log x), \quad a > 0,$$

alors on obtient le résultat.

COROLLAIRE 5. *Soit k, $m \in \boldsymbol{N}$. Alors pour tout nombre réel positif a nous avons*

$$\sum_{p \le x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \sum_{2 \le n \le x} \frac{n^a\{\frac{x}{n}\}^k}{\log n} + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x).$$

DÉMONSTRATION. Pour $t > 0$ et pour tout $k \in \boldsymbol{N}$ on a d'après (4)

$$\sum_{n \le x} n^t \left\{\frac{x}{n}\right\}^k = C_{k,t} x^{t+1} + O(x^{t+1/3} \log x),$$

où

$$C_{k,t} = \int_1^\infty \frac{\{y\}^k}{y^{t+2}}\, dy.$$

Mais pour $a > \epsilon > 0$ on a

$$\int_\epsilon^a \sum_{n \le x} n^t \{x/n\}^k\, dt = \int_\epsilon^a C_{k,t} x^{t+1}\, dt + \int_\epsilon^a O(x^{t+1/3} \log x)\, dt$$

et finalement on obtient

$$\sum_{2 \le n \le x} \frac{n^a\{\frac{x}{n}\}^k}{\log n} = \frac{x^{a+1}}{\log x} \int_1^\infty \frac{\{t\}^k}{t^{a+2}}\, dt + \cdots + \frac{x^{a+1}}{\log^m x} \int_1^\infty \frac{\{t\}^k \log^{m-1} t}{t^{a+2}}\, dt$$
$$+ O(x^{a+1}/\log^{m+1} x),$$

et ceci achève la démonstration de ce résultat.

REMARQUE. Puisque

$$\sum_{p \le x} p^a \left\{\frac{x}{p}\right\}^k = \sum_{2 \le n \le x} \frac{n^a\{\frac{x}{n}\}^k}{\log n} + \sum_{2 \le n \le x} ((\theta(n) - n) - (\theta(n-1) - (n-1))) \frac{n^a\{\frac{x}{n}\}^k}{\log n},$$

où $\theta(n) = \sum_{p \le n} \log p$, alors en utilisant le corollaire précédent, il est facile déduire le comportement asymptotique de la somme contenant la fonction θ. Finalement, en utilisant le lemme 1, on peut énoncer le résultat suivant:

COROLLAIRE 6. *Soit $a > 0$ un nombre réel fixe mais arbitraire et soit m un entier positif. Alors on a*

$$\sum_{p \le x} p^a \left\{ \frac{x}{p} \right\} = x^{a+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{(i-1)!}{a^i} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j (i-j-1)! \binom{i-1}{j}}{(a+1)^{i-j}} \zeta^{(j)}(a+1) \right) \frac{1}{\log^i x} + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x).$$

4. **Quelques conséquences**. Le prochain résultat découle du théorème des nombres premiers.

LEMME 2. *Soit $a > -1$ un nombre réel et soit $m \ge 1$ un entier. Alors on a*

$$\sum_{p \le x} p^a = x^{a+1} \sum_{i=1}^{m} \frac{(i-1)!}{(a+1)^i \log^i x} + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x).$$

Le prochain théorème est une généralisation d'un résultat qui a été obtenu par Erdös, Alladi [1] et aussi par J. M. De Koninck, A. Ivíc [2] dans le cas où $a = 1$. Notre démonstration et tout à fait différente de celle des auteurs précédents.

THÉORÈME 2. *Soit $a > 0$ un nombre réel fixe et soit m un entier positif arbitraire. Soit $P(n)$ la fonction arithmétique qui désigne le plus grand facteur premier de n, alors*

$$\sum_{n \le x} P^a(n) = x^{a+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j (i-j-1)! \binom{i-1}{j}}{(a+1)^{i-j}} \zeta^{(j)}(a+1) \right) \frac{1}{\log^i x} + O(x^{a+1}/\log^{m+1} x).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le même procédé que dans [3], on peut montrer que pour tout nombre réel positif a, on a $P^a(n) = -\Sigma_{d|n}\, \mu(d) p^a(d)$ où la fonction $p(n)$ désigne le plus petit facteur premier de n et $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\sum_{2 \le n \le x} P^a(n) = \sum_{p \le x} [x/p] p^a - \sum_{\substack{n \le x \\ n \ne p}} [x/n] \mu(n) p^a(n).$$

Mais

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \ne p}} [x/n] \mu(n) p^a(n) \ll \sum_{\substack{n \le x \\ n \ne p}} [x/n] n^{a/2} \ll x^{a/2+1},$$

et par conséquent on a

$$\sum_{n \le x} P^a(n) = \sum_{p \le x} p^a \left[\frac{x}{p} \right] + O(x^{a/2+1}), \quad a > 0,$$

$$= x \sum_{p \le x} p^{a-1} - \sum_{p \le x} p^a \left\{ \frac{x}{p} \right\} + O(x^{a/2+1}).$$

Le théorème découle maintenant du corollaire 6 et du lemme 2.

Nous terminons cette section par une généralisation d'un théorème de Segal [9].

THÉORÈME 3. *Soit m un entier positif arbitraire et soit a un nombre réel plus grand que 1. Soit f une fonction additive telle que $f(p)$ est une constante pour chaque p et telle que, pour chaque $k \geq 2$, $f(p^k) = O(2^{k/a})$ uniformément en p. Alors on a*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = f(p)x \log\log x + Ax - xf(p) \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\log^i x} + O(x/\log^{m+1} x).$$

où

$$A = f(p)\Big(\gamma + \sum_p (\log(1 - 1/p) + 1/p)\Big) + \sum_{k \geq 2} \sum_p \frac{f(p^k) - f(p^{k-1})}{p^k},$$

$$d_i = (i-1)!\Big(1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1}\gamma_j\Big),$$

$$\gamma_j = \frac{(-1)^j}{j!} \lim_{N \to \infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{\log^j n}{n} - \frac{\log^{j+1} N}{j+1}\Big),$$

et $\gamma = \gamma_0$ désigne la constante d'Euler.

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 1}} (f(p^k) - f(p^{k-1}))\left[\frac{x}{p^k}\right],$$

alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} f(n) &= \sum_{p \leq x} f(p)\left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} (f(p^k) - f(p^{k-1}))\left[\frac{x}{p^k}\right], \\
&= x \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} - \sum_{p \leq x} f(p)\left\{\frac{x}{p}\right\} + x \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{f(p^k) - f(p^{k-1})}{p^k} \\
&\quad - \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} (f(p^k) - f(p^{k-1}))\left\{\frac{x}{p^k}\right\}.
\end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver l'ordre de grandeur des deux sommes à l'extrême droite de la dernière équation. Puisque

$$\sum_{p \geq y} \frac{1}{p^k} \leq \frac{2}{y^{k-1}} \quad \text{pour } k \geq 2,$$

alors

$$\sum_{k \geq 2} \sum_{p^k > x} \frac{2^{k/a}}{p^k} \ll \frac{1}{x} \sum_{2 \leq k \leq \frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a} x^{1/k} + \sum_{k > \frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a} \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^k}.$$

Or d'une part

$$\sum_{k>\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a} \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p^k} \ll \sum_{k>\frac{\log x}{\log 2}} \frac{2^{k/a}}{2^k} \ll x^{\frac{1}{a}-1} \ll \frac{1}{\log^{m+1} x}$$

et d'autre part

$$\sum_{2\leq k\leq\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} = \sum_{2\leq k\leq\frac{a}{a-1}} 2^{k/a}x^{1/k} + \sum_{\frac{a}{a-1}<k\leq\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k}$$

$$\ll x^{1/2} + \frac{\log x}{\log 2} 2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}} x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon}$$

pour un certain $\epsilon > 0$. Puisque

$$\frac{\log x}{\log 2} 2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}} x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon} \ll \frac{x}{\log^{m+1} x}$$

alors

$$\sum_{2\leq k\leq\frac{\log x}{\log 2}} 2^{k/a}x^{1/k} \ll \frac{x}{\log^{m+1} x},$$

et par conséquent on obtient

$$\sum_{\substack{p^k>x\\ k\geq 2}} \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k} \ll \sum_{k\geq 2}\sum_{p^k>x} 2^{k/a}/p^k \ll \frac{1}{\log^{m+1} x},$$

et alors on déduit que

$$\sum_{p^k,k\geq 2} \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k}$$

converge. De plus nous avons aussi

$$\sum_{2\leq k\leq\frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} = \sum_{2\leq k\leq\frac{a}{a-1}} \sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} + \sum_{\frac{a}{a-1}<k\leq\frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a}$$

$$\ll \pi(x^{1/2}) + \pi(x^{\frac{a-1}{a}-\epsilon})\frac{\log x}{\log 2} 2^{\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{1}{a}} \ll \frac{x}{\log^{m+1} x}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} (f(p^k)-f(p^{k-1}))\left\{\frac{x}{p^k}\right\} \ll \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} |f(p^k)| \ll \sum_{2\leq k\leq\frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p\leq x^{1/k}} 2^{k/a} \ll \frac{x}{\log^{m+1} x}.$$

Finalement on obtient

$$\sum_{n\leq x} f(n) = xf(p)\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} - f(p)\sum_{p\leq x}\left\{\frac{x}{p}\right\} + x\sum_{\substack{p\\ k\geq 2}} \frac{f(p^k)-f(p^{k-1})}{p^k} + O(x/\log^{m+1} x).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-044-9 Published online by Cambridge University Press

En utilisant le corollaire 2, le corollaire 3 et le comportement asymptotique de (voir [8])

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log \log x + \gamma + \sum_{p} \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right) + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x} \right) \quad \text{pour tout } m > 0,$$

nous obtenons le résultat.

COROLLAIRE 7. *Soit $w(n)$ la fonction arithmétique qui désigne le nombre de nombres premiers distincts qui divisent n. Alors nous avons*

$$\sum_{n \le x} w(n) = x \log \log x + \left(\gamma + \sum_{p} (\log(1 - 1/p) + 1/p) \right) - x \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{\log^i x} + O(x/\log^{m+1} x).$$

L'auteur désire remercier le rapporteur (referee) pour lui avoir signalé une erreur dans la démonstration du théorème 3.

REFERENCES

1. P. Erdös et K. Alladi, *On an additive arithmetic function*, Pacific Journal of Math **71** (1977), pp. 275–294.

2. J. M. De Koninck et A. Ivíc, *The distribution of the average prime divisor of an integer*, Arch. Math. **43** (1984), pp. 37–43.

3. J. M. De Koninck et A. Mercier, *Fonctions arithmétiques tronquées*, à paraître.

4. R. P. Ferguson, *An application of Stieltjes integration to the power series coefficients of the Riemann zeta function*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), pp. 60–61.

5. M. Ishibashi et S. Kanemitsu, *On fractional part sums and divisor functions*, Proceedings of the Conference on Number Theory, Okayama, Jan. 84.

6. A. Mercier, *Sums containing the fractional parts of numbers*, Rocky Mountain Journal of Math. **15** (1985), pp. 513–520.

7. A. Mercier et W. G. Nowak, *On the behaviour of sums* $\Sigma\, g(n)\{\frac{x}{n}\}^k$, Monatshefte für Math. **99** (1985), pp. 213–221.

8. E. Landau, *Primzahlen*, Chelsea Publishing Company.

9. S. L. Segal, *On prime-independent additive functions*, Archiv der Mathematik **17** (1966), pp. 329–332.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
555 BLVD. DE L'UNIVERSITÉ
CHICOUTIMI (QUÉBEC)
CANADA G7H 2B1