Can. J. Math., Vol. XLI, No. 6, 1989, pp. 1090–1100

SUR LE SOCLE DANS LES ALGÈBRES DE JORDAN-BANACH

BERNARD AUPETIT ET LINE BARIBEAU

1. Introduction. Dans une algèbre de Banach, le socle joue le même rôle que l'ensemble des opérateurs de rang fini dans le cas de l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur un espace de Banach. Aussi est-il intéressant de savoir dans quels cas le socle n'est pas réduit à zéro.

En 1968, B. A. Barnes ([**6**], Théorème 2.1 et Théorème 2.2) a pu démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe sans radical. Supposons que le spectre de chaque élément de A est dénombrable. Alors le socle de A est non nul.*

Il démontre d'abord ce résultat dans le cas commutatif en utilisant le difficile théorème de l'idempotent dû à G. E. Šilov. Ensuite à l'aide de considérations assez techniques il ramène le cas non commutatif au cas commutatif.

En utilisant une méthode sous-harmonique, B. Aupetit ([**1**], pp. 79–80) a donné une autre démonstration du résultat de B. A. Barnes, qui a l'avantage d'éliminer le théorème de Šilov et de s'appliquer au cas général non commutatif. Malheureusement cette démonstration est partiellement incorrecte. Cette démonstration a maintenant été corrigée (voir [**4**]), et nous nous proposons ici d'appliquer les mêmes idées pour démontrer un résultat analogue pour les algèbres de Jordan-Banach.

La méthode des fonctions analytiques multiformes permet à B. Aupetit d'obtenir dans [**1**] les corollaires suivants au Théorème 1.

COROLLAIRE 2. *Soit A un algèbre de Banach complexe involutive et sans radical. Supposons de plus que tout élément d'un sous-ensemble absorbant de l'ensemble des éléments hermitiens a son spectre dénombrable. Alors le socle de A est non nul.*

COROLLAIRE 3. *Soit A une algèbre de Banach réelle sans radical qui possède un sous-ensemble absorbant d'éléments à spectre dénombrable. Alors le socle de A est non nul.*

Nous verrons que ces corollaires peuvent également être étendus au cas des algébres de Jordan-Banach.

Enfin nous verrons comment le théorème d'existence du socle, combiné avec la caractérisation spectrale des algèbres de Jordan-Banach modulaires annihila-

Reçu le 26 octobre 1988 et sous forme revisée, le 13 avril 1989. Cette recherche a été subventionneé par le Fond F.C.A.R. de la province de Québec.

trices, permet d'obtenir un théorème de structure pour les algèbres de Jordan-Banach à spectre dénombrable.

2. Algèbres de Jordan-Banach à spectre dénombrable. Avant de démontrer nos principaux théorèmes, nous devrons rappeler quelques notions algébriques et introduire certains concepts analytiques. Soit J une algèbre de Jordan complexe commutative avec unité 1. Pour tout $a \in J$, nous désignerons par R_a l'application $x \longmapsto ax$, et définirons l'opérateur quadratique

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}.$$

Nous aurons besoin des identités suivantes qui sont bien connues:

$$2(R_a R_{ab} - R_{ab} R_a) + R_b R_{a^2} - R_{a^2} R_b = 0 \tag{1}$$

$$R_{(ab)c} = R_a R_{bc} + R_b R_{ac} + R_c R_{ab} - R_a R_c R_b - R_b R_c R_a. \tag{2}$$

Nous dénoterons par $\mathrm{Sp}_J x$ le *spectre* de x par rapport à l'algèbre J, c'est-à-dire l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid x - \lambda 1 \text{ n'est pas inversible}\}$.

PROPOSITION 4. *Soit J une algèbre de Jordan et soit $p \in J$ une projection. Posons $U_p J = \{U_p x \mid x \in J\}$ et $J_1(p) = \{x \in J \mid px = x\}$. Alors*

a) *$J_1(p)$ est une sous-algèbre de J, avec unité p,*

b) *$J_1(p) = U_p J$,*

c) *Si $x \in U_p J$, alors $\mathrm{Sp}_{U_p J} x \subseteq \mathrm{Sp}_J x$.*

Démonstration. a) et b) sont bien connus (voir par exemple [**16**], III 1).

c) Soit $\lambda \notin \mathrm{Sp}_J x$. Alors il existe $y \in J$ tel que

$$(x - \lambda 1)y = 1 \text{ et } (x - \lambda 1)^2 y = (x - \lambda 1).$$

Montrons que $U_p y$ est l'inverse de $x - \lambda p$ dans l'algèbre $U_p(J)$. L'identité (1) (avec $a = p$ et $b = x$) implique $R_x R_p = R_p R_x$ et en posant $a = b = c = p$ dans (2) on obtient $R_p U_p = U_p$. On a donc

$$\begin{aligned}(x - \lambda p)U_p y &= (R_x - \lambda R_p)(U_p y) = (U_p R_x - \lambda U_p)(y) \\ &= U_p(xy - \lambda y) = U_p 1 = p\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(x - \lambda p)^2 U_p y &= (R_{x^2} - 2\lambda R_x + \lambda^2 R_p) U_p y \\ &= U_p(R_{x^2} - 2\lambda R_x + \lambda^2 R_1)(y) \\ &= U_p(x^2 y - 2\lambda xy + \lambda^2 y) \\ &= U_p(x - \lambda 1) = x - \lambda p.\end{aligned}$$

Donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{U_pJ}\, x$.

Rappelons que dans une algèbre de Jordan la notion d'élément inversible peut être caractérisée au moyen des opérateurs U_a: a et b sont inversibles si et seulement si $U_a b$ est inversible. De plus, a est inversible si et seulement si a^n est inversible pour tout $n \in \mathbf{N}$.

PROPOSITION 5. *Supposons que $a_1, \dots, a_n \in J$ satisfont $a_i a_j = a_i^2 a_j = a_i a_j^2 = a_i^2 a_j^2 = 0$ si $i \neq j$. Alors*

$$\mathrm{Sp}\,(a_1 + \cdots + a_n) \supseteq (\mathrm{Sp}\, a_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Sp}\, a_n) \backslash \{0\}.$$

Démonstration. Pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} U_{a_1 - \lambda 1}(a_2 - \lambda 1)^2 &= 2(a_1 - \lambda 1)[(a_1 - \lambda 1)(a_2^2 - 2\lambda a_2 + \lambda^2 1)] \\ &\quad - (a_1^2 - 2\lambda a_1 + \lambda^2 1)(a_2^2 - 2\lambda a_2 + \lambda^2 1) \\ &= \lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 - 2\lambda^3 a_1 - 2\lambda^3 a_2 + \lambda^4 1 \\ &= \lambda^2 (a_1 + a_2 - \lambda 1)^2. \end{aligned}$$

Donc si $\lambda \neq 0, a_1 + a_2 - \lambda 1$ est inversible si et seulement si $a_1 - \lambda 1$ et $a_2 - \lambda 1$ sont inversibles. On suppose maintenant que la proposition est vraie pour $n - 1$. Posons $b = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. Alors $ba_n = ba_n^2 = 0$ et $b^2 = a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$ implique que $b^2 a_n = b^2 a_n^2 = 0$. En appliquant le cas $n = 2$ et l'hypothèse d'induction on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(b + a_n) &\supseteq (\mathrm{Sp}\, b \cup \mathrm{Sp}\, a_n) \backslash \{0\} \\ &\supseteq [((\mathrm{Sp}\, a_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Sp}\, a_{n-1}) \backslash \{0\}) \cup \mathrm{Sp}\, a_n] \backslash \{0\} \\ &= (\mathrm{Sp}\, a_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Sp}\, a_n) \backslash \{0\}. \end{aligned}$$

On trouvera également dans [**16**] la démonstration du résultat suivant.

PROPOSITION 6. *Soient $p, q \in J$ deux projections satisfaisant $pq = 0$. Alors $xy = 0$ quels que soient $x \in U_p J$ et $y \in U_q J$.*

En plus de ces résultats élémentaires, nous aurons besoin de la caractérisation suivante du radical des algèbres $U_p J$.

PROPOSITION 7 (McCrimmon [**19**]). *Si p est une projection dans une algèbre de Jordan, on a*

$$\mathrm{Rad}\; U_p J = \mathrm{Rad}\; J \cap U_p J.$$

Nous dirons que J est une algèbre de Jordan-Banach avec unité 1 s'il existe une norme complète $\|\cdot\|$ sur J satisfaisant

$$\|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\|, \qquad \text{quels que soient } x, y \in J,$$

et

$$\|1\| = 1.$$

(Toutes les algèbres que nous considérons ici sont unitaires.)

Le spectre d'un élément d'une algèbre de Jordan-Banach est toujours un compact non vide, et la fonction spectre est semi-continue supérieurement. Les démonstrations de ces faits sont analogues à celles du cas associatif.

Soit x un élément d'une algèbre de Jordan-Banach unitaire, D un voisinage de $\mathrm{Sp}\, x$ et $h : D \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soit Γ un contour rectifiable dans D qui entoure $\mathrm{Sp}\, x$ et posons

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(\lambda)(x - \lambda 1)^{-1} d\lambda.$$

La valeur de $f(x)$ est indépendante du choix de Γ. On obtient ainsi un calcul fonctionnel holomorphe pour les algèbres de Jordan-Banach. L'application $h \longmapsto h(x)$ est un homomorphisme de $H(\mathrm{Sp}\, x)$, l'algèbre (associative) des fonctions holomorphes au voisinage de $\mathrm{Sp}\, x$, à valeurs dans J, qui satisfait en outre

$$\mathrm{Sp}\; h(x) = \{h(z) \mid z \in \mathrm{Sp}\, x\}.$$

On notera que l'image de cet homomorphisme est alors une sous-algèbre fortement associative de J. Cette sous-algèbre est celle engendrée par 1, x et x^{-1}. On trouvera plus de détails sur ces questions dans [**20**]. En utilisant le calcul fonctionnel holomorphe on peut voir que le théorème de Newburgh (voir [**1**], page 8) s'applique aussi aux algèbres de Jordan-Banach.

Le théorème qui suit est fondamental puisqu'il permet d'appliquer les méthodes sous-harmoniques au cas des algèbres de Jordan-Banach.

THÉORÈME 8, (B. Aupetit et A. Zraïbi [**5**]). *Soit $f : \lambda \longmapsto f(\lambda)$ une fonction holomorphe d'un domaine D dans une algèbre de Jordan-Banach. Alors la fonction $\lambda \longmapsto \mathrm{Sp}\, f(\lambda)$ est analytique multiforme.*

Pour la démonstration du Théorème 8, voir [**5**]. Les fonctions analytiques multiformes sont des fonctions à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de $\mathbf{C}$ qui possèdent certaines propriétés de sousharmonicité (pour plus de détails le lecteur pourra consulter par exemple [**2, 4**]). Le Théorème 8 peut notamment être appliqué pour démontrer le:

THÉORÈME 9, (B. Aupetit et A. Zraïbi [**5**]). *Soit J une algèbre de Jordan-Banach unitaire complexe. Supposons que* $\mathrm{Sp}\, x$ *est réduit à un seul point pour tous les x appartenant à un ouvert non vide de J. Alors $J/\mathrm{Rad}\; J$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ ou $J = \mathrm{Rad}\; J$.*

Remarque. Ce résultat a été généralisé par M. Benslimane et A. Kaïdi qui ont étudié la structure des algèbres de Jordan-Banach à spectre fini [**8**], généralisant ainsi le résultat classique sur les algèbres de Banach à spectre fini ([**1**], page 70).

Le théorème de rareté pour les fonctions analytiques multiformes dénombrables nous sera utile pour établir les Corollaires 12 et 14.

THÉORÈME 10 [**2**]. *Soit K une fonction analytique multiforme définie sur un domaine D. Alors ou bien $K(\lambda)$ est dénombrable pour tout $\lambda \in D$ ou bien l'ensemble*

$$\{\lambda \in D \mid K(\lambda) \text{ est dénombrable}\}$$

est un sous-ensemble de D de capacité extérieure nulle.

La démonstration de ce théorème globalisant est très difficile. On consultera [**2**] pour plus de détails.

Une algèbre de Jordan est dite *non dégénérée* si $U_x = 0$ implique $x = 0$. Rappelons qu'un *idéal quadratique* d'une algèbre de Jordan J est un sous-espace I qui satisfait $U_I J \subseteq I$. Par définition, le *socle* d'une algèbre de Jordan non dégénérée est la somme des idéaux quadratiques minimaux (voir par exemple [**11**]). Si p est une projection et si $U_p J$ est une algèbre de division, alors $U_p J$ est un idéal quadratique minimal de J, et $U_p J \subseteq \text{Soc } J$. Nous pouvons maintenant démontrer l'analogue du Théorème 1 pour les algèbres de Jordan-Banach.

THÉORÈME 11. *Soit J une algèbre de Jordan-Banach avec unité et sans radical. Supposons que chaque élément de J a son spectre au plus dénombrable. Alors* Soc $J \neq \{0\}$.

Démonstration. Comme l'algèbre est sans radical, elle est automatiquement non dégénérée (voir [**18**], Théorème 10). Supposons que Soc $J = \{0\}$. Si Sp x était réduit à un seul point pour tout x, alors d'après le Théorème 9, on aurait $J \cong \mathbf{C}$, contredisant notre hypothèse. Il existe donc un élément x_0 dont le spectre contient deux points isolés α_0 et α_1. Soient $\bar{D}_0$ et $\bar{D}_1$ deux disques fermés disjoints de rayon $r \leqq 1$ tels que

$$\text{Sp } x_0 \cap \bar{D}_i = \text{Sp } x_0 \cap D_i = \{\alpha_i\} \quad (i = 0, 1).$$

Supposons de plus (quitte à faire une translation), que $0 \notin \text{Sp } x_0$. Par semi-continuité supérieure, on peut trouver $r_0 \leqq 1$ tel que

$$\text{Sp } x \cap (\partial D_0 \cup \partial D_1 \cup \{0\}) = \emptyset \quad \text{si } \|x - x_0\| \leqq r_0.$$

Pour $i = 0{,}1$, on peut par le calcul fonctionnel holomorphe construire la projection p_i associée à x_0 et α_i (on prend pour f la fonction holomorphe qui vaut 1 en α_i et 0 sur les autres composantes du spectre). Rappelons que la sous-algèbre B engendrée par 1, x_0 et x_0^{-1} est fortement associative. Tous les

$f(x_0)$ obtenus par le calcul fonctionnel holomorphe appartiennent à cette sous-algèbre associative. On a par construction $p_0p_1 = 0$ et Sp $p_ix_0 = \{0, \alpha_i\}$ et, par associativité dans B,

$$U_{p_i}x_0 = 2p_i(p_ix_0) - p_ix_0 = p_ix_0.$$

Par les Propositions 4 et 7, les algèbres $J_i = U_{p_i}J$ sont des algèbres de Jordan-Banach avec unité p_i et sans radical. De plus,

$$\mathrm{Sp}_{J_i} U_{p_i}x \subseteq \mathrm{Sp}_J U_{p_i}x \quad \text{pour tout } x \in J.$$

Cette inclusion montre que

$$\mathrm{Sp}_{J_i} U_{p_i}x_0 = \{\alpha_i\}$$

car $U_{p_i}x_o = p_ix_0$ est inversible dans J_i, son inverse étant $p_ix_0^{-1}$ (on utilise ici l'associativité dans B).

Soit $r < r_0/3(\|p_0\|^2 + \|p_1\|^2)$ suffisamment petit pour que $\|x - x_0\| < r$ implique

$$\mathrm{Sp}_{J_i}\ U_{p_i}x \subseteq D_i \quad (i = 0, 1).$$

Considérons les ensembles

$$G_i = \{x \in J| \quad \|x - x_0\| < r \quad \text{et} \quad \#\mathrm{Sp}_{J_i}\ U_{p_i}x > 1\}.$$

Les G_i sont ouverts par le théorème de Newburgh. Si $B(x_0, r)\backslash G_0$ contenait un ouvert V, alors on aurait $\#\mathrm{Sp}_{J_0}\ y = 1$ pour tout y appartenant à l'ouvert $U_{p_0}V$ de J_0. D'après le Théorème 9, il en résulterait que $U_{p_0}J \cong \mathbf{C}$, donc p_0 serait minimal, ce qui est contradictoire. Donc G_0 est dense dans la boule, et il en est de même pour G_1. En particulier on déduit que $G_0 \cap G_1 \neq \emptyset$.

Soit donc $y \in G_0 \cap G_1$. Alors $\mathrm{Sp}_{J_i}\ U_{p_i}y$ contient deux points isolés $\alpha_{i0}, \alpha_{i1} \in D_i (i = 0, 1)$. Posons

$$x_1 = U_{p_o}y + U_{p_1}y + (x_0 - p_0x_0 - p_1x_0) = U_{p_0}y + U_{p_1}y + U_{1-p_0-p_1}x_0.$$

En appliquant les Propositions 4c), 5 et 6, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_J\ x_1 &\supseteq [\mathrm{Sp}_J\ U_{p_0}y \cup \mathrm{Sp}_J\ U_{p_1}y \cup \mathrm{Sp}_J\ U_{1-p_0-p_1}y]\backslash\{0\} \\ &\supseteq [\mathrm{Sp}_{J_0}\ U_{p_0}y \cup \mathrm{Sp}_{J_1}\ U_{p_1}y]\backslash\{0\} \\ &\supseteq \{\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &= \|U_{p_0}(y - x_0) + U_{p_1}(y - x_0)\| \\ &\leqq 3(\|p_0\|^2 + \|p_1\|^2)\|y - x_0\| < r_0. \end{aligned}$$

On peut reprendre cet argument avec les projections p_{ij} associées à x_1 et $\alpha_{ij}, i, j = 0, 1$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites binaires finies, muni de l'ordre partiel "$<$" défini par $s < s'$ si s' est obtenu en rallongeant s. On peut construire par induction une suite $(x_n)_{n\geqq 1}$, une suite de rayons $r_n \leqq 1/2^n$, et pour chaque suite $s \in \mathcal{B}$ un disque D_s ayant les propriétés suivantes:

1) $\|x_n - x_{n+1}\| \leqq 1/2^n$ et $\bar{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$,
2) $\bar{D}_s \subseteq \bar{D}_{s'}$ si $s \geqq s', \bar{D}_s \cap \bar{D}_{s'} = \emptyset$ sinon,
3) Sp $x_n \cap D_s = \{\alpha_s\}$ pour tout s de longueur $n+1$,
4) diam $(D_s) \leqq 1/2^{n-1}$ si s est de longueur n.

Soit x la limite de la suite de Cauchy (x_n). Pour toute suite binaire infinie σ, soit σ_n la suite finie constituée des n premiers termes de σ. Alors $\bigcap_{n\geqq 1} \bar{D}_{\sigma_n}$ a un seul élément que nous désignerons par $\alpha(\sigma)$. Comme $\alpha(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \alpha_{\sigma_n}$ et $\alpha_{\sigma_n} \in$ Sp x_n, la semi-continuité supérieure du spectre implique que $\alpha(\sigma) \in$ Sp x. Enfin, remarquons que si $\sigma \neq \sigma'$, alors $\bar{D}_{\sigma_n} \cap \bar{D}_{\sigma'_n} = \emptyset$ pour un certain n et donc $\alpha(\sigma) \neq \alpha(\sigma')$. Puisqu'il y a une quantité non dénombrable de suites binaires infinies, on conclut que Sp x est non dénombrable, ce qui est contradictoire. Donc Soc $A \neq \{0\}$.

Remarque. Si A est une algèbre de Banach sans radical, alors en définissant un nouveau produit $a \circ b = (ab + ba)/2$, on obtient une algèbre de Jordan-Banach (notée A^+) non dégénérée. De plus $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_{A^+} x$ et Soc A = Soc A^+(cela découle du Théorème 17 de [**21**]). Le Théorème 1 peut donc être vu comme un corollaire du Théorème 11.

Notons cependant que le Théorème 1 peut être démontré directement (ce qui engendre moins de difficultés techniques) à partir des mêmes idées que dans la démonstration précédente. En effet, au lieu de considérer les algèbres U_pJ, on considérera les algèbres pAp, et dans l'étape d'induction l'élément x_1 est donné par

$$x_1 = p_0 y p_0 + p_1 y p_1 + (x_0 - p_0 x_0 - p_1 x_0).$$

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration détaillée dans [**4**].

On dit que l'algèbre de Jordan complexe J est involutive s'il existe une application $x \longmapsto x^*$ possédant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}(x+y)^* &= x^* + y^* \\ (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^* \quad (\lambda \in \mathbf{C}), \\ x^{**} &= x\end{aligned}$$

et les éléments satisfaisant $x^* = x$ seront dits *hermitiens*.

On dit d'un sous-ensemble $E' \subseteq E$ qu'il est *absorbant* s'il existe un élément $a \in E'$ tel que pour tout $x \in E$ il existe un $r > 0$ tel que

$$a + \rho(x - a) \in E' \quad \text{pour tout } 0 \leqq \rho < r.$$

COROLLAIRE 12. *Soit J une algèbre de Jordan-Banach complexe involutive avec unité et sans radical. Supposons de plus que tout élément d'un sous-ensemble absorbant de l'ensemble des éléments hermitiens a son spectre dénombrable. Alors le socle de J est non nul.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'hyphothèse implique que le spectre de tout élément est dénombrable. Soit $h \in J$ un élément hermitien de J et considérons la fonction analytique

$$\lambda \longmapsto f(\lambda) = h + \lambda(h - a),$$

où a est l'élément correspondant à la définition de l'ensemble absorbant. La fonction $K(\lambda) = \operatorname{Sp} f(\lambda)$ est analytique multiforme sur $\mathbf{C}$ et est dénombrable sur un intervalle $[0, r]$. On un segment n'est pas de capacité nulle, et le théorème de rareté implique que $K(\lambda)$ est dénombrable pour tout λ, en particulier pour $\lambda = 1$, d'où on déduit que $\operatorname{Sp} h$ est dénombrable. Maintenant tout élément $x \in J$ s'écrit comme $x = h + ik$ où h et k sont hermitiens. En considérant cette fois la fonction $g(\lambda) = h + \lambda k$, un raisonnement semblable montre que $g(\lambda)$ a un spectre dénombrable pour tout λ. En particulier $x = g(i)$ a un spectre dénombrable.

On peut étendre le Théorème 11 au cas des algèbres réelles. (Par définition, le spectre d'un élément d'une algèbre réelle est égal au spectre de cet élément dans la complexifiée $J' = J \oplus iJ$.) Dans le cas associatif, on peut déduire le cas réel du cas complexe en utilisant le fait que xAx est de dimension finie si $x \in \operatorname{Soc} A$, et inversement si A est complexe.

Le cas des algèbres de Jordan est différent. On a bien que tout élément x tel que U_xJ soit de dimension finie est dans le socle de J([**14**], Théorème 1). Malheureusement nous ne connaissons pas de résultat réciproque, de sorte que nous ne pouvons transposer la démonstration du Corollaire 3.

La démonstration du Corollaire 14 qui suit sera plutôt basée sur le résultat suivant qui nous a été communiqué par A. Fernández López.

LEMME 13 (A. Fernández López et E. García Rus [**13**]). *Soit J une algèbre de Jordan réelle non dégénérée et considérons sa complexifiée $J' = J \oplus iJ$. Alors J' est non dégénérée et* $\operatorname{Soc} J' = (\operatorname{Soc} J)'$.

La démonstration repose sur la caractérisation suivante des éléments du socle due à K. McCrimmon et A. Fernández López: si J est une algèbre de Jordan non dégénérée sur le corps K, alors $b \in \operatorname{Soc} J$ si et seulement si la famille d'idéaux quadratiques $\{U_xJ \mid x \in Kb + U_bJ\}$ satisfait la propriété des chaînes décroissantes. Le lecteur est renvoyé à [**13**] pour la démonstration de ces faits.

COROLLAIRE 14. *Soit J une algèbre de Jordan-Banach réelle avec unité et sans radical qui possède un sous-ensemble absorbant d'éléments à spectre dénombrable. Alors le socle de J est non nul.*

Démonstration. Soit J' la complexifiée de J. Alors J' est sans radical. D'après le théorème de rareté, tout élément de J' a son spectre dénombrable. Donc, d'après le Théorème 11, on a Soc $J' \neq \{0\}$. Maintenant, d'après le Lemme 13, on a Soc $J' = (\text{Soc } J)'$, d'où Soc $J \neq \{0\}$.

Il existe une caractérisation algébrique simple des algèbres de Banach sans radical dont tous les éléments ont un spectre fini, ce sont les algèbres de dimension finie. Le cas plus général des algèbres de Banach complexes sans radical où le spectre a au plus 0 comme point d'accumulation a été parfaitement décrit par B. A. Barnes [**6, 7**] qui a montré que ce sont les algèbres modulaires annihilatrices. Dans [**4**], B. Aupetit a utilisé ce résultat, ainsi que le Théorème 1, pour donner un théorème de structure pour les algèbres de Banach dont le spectre est dénombrable.

Nous allons maintenant démontrer un théorème analogue pour les algèbres de Jordan-Banach avec unité.

Etant donné un idéal quadratique $I \subseteq J$, le *coeur* de I, dénoté $K(I)$, est le plus grand idéal contenu dans I. Si de plus I est maximal, $K(I)$ sera dit *idéal primitif*. Tout comme dans le cas associatif, le radical peut être caractérisé au moyen des idéaux maximaux:

THÉORÈME 15 (L. Hogben et K. McCrimmon [**15**]). *Si J est une algèbre de Jordan avec unité, alors on a*

a) Rad J *est l'intersection des idéaux quadratiques maximaux de* J

b) Rad J *est l'intersection des idéaux primitifs de* J.

Si I est un idéal de J, on note kh (I) l'intersection des idéaux primitifs qui contiennent I (avec kh $(I) = J$ s'il n'y en a pas). On peut établir une correspondance entre les idéaux quadratiques maximaux de J et les idéaux quadratiques maximaux de l'algèbre quotient J/I, ces derniers étant précisément les images par la projection canonique des idéaux quadratiques maximaux de J qui contiennent I. En utilisant le théorème précédent on obtient alors les propositions suivantes:

PROPOSITION 16. *Pour tout idéal I de J, on a* $\text{Rad}(J/I) = \text{kh}\,(I)/I$.

PROPOSITION 17. *Pour tout idéal I de J,* $\text{kh}\,(\text{kh}\,(I)) = \text{kh}\,(I)$.

Un algèbre de Jordan J est dite *modulaire annihilatrice* si elle est non dégénérée et si $J/$ Soc J est radicale. La caractérisation des algèbres de Jordan-Banach complexes dont le spectre est dénombrable a été obtenue par M. Benslimane et A. Rodríguez Palacios [**9**]. Leur méthode est essentiellement basée sur les idées de [**3**] où est donnée une nouvelle démonstration très simple dans le cas associatif. A. Fernández López a obtenu les mêmes résultats dans [**12**], indépendamment de [**3**], mais ses méthodes sont beaucoup plus techniques.

THÉORÈME 18 (M. Benslimane et A. Rodríguez Palacios [**9**], A. Fernández López [**12**]). *Soit J une algèbre de Jordan-Banach complexe et sans radical* *où le spectre de tout élément a au plus* 0 *comme point d'accumulation. Alors J est modulaire annihilatrice.*

Soit J une algèbre de Jordan-Banach avec unité. Posons $J_0 = J/\operatorname{Rad} J$, et pour $n \geqq 1$

$$J_n = J_{n-1}/\operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_{n-1}).$$

Soit ϕ_0 la projection de J sur J_0 et π_n la projection de J_n sur J_{n+1}. Par induction, on peut définir pour tout n un homomorphisme ϕ_n de J sur J_n par $\phi_n = \pi_{n-1} \circ \phi_{n-1}$, et on pose $I_n = \ker\ \phi_n$.

Désignons par Ω la classe des ordinaux de première ou deuxième classe (voir [**22**]). La construction précédente peut être étendue à tout $\alpha \in \Omega$ de la façon suivante:

– Si α n'est pas un ordinal limite, on pose

$$\begin{aligned} J_\alpha &= J_{\alpha-1}/\operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_{\alpha-1}) \\ \phi_\alpha &= \pi_{a-1} \circ \phi_{\alpha-1} \\ I_a &= \ker\ \phi_\alpha \end{aligned}$$

où $\pi_{\alpha-1}$ est la projection de $J_{\alpha-1}$ sur J_α.

– Si α est un ordinal limite, on pose

$$I_a = \operatorname{kh}\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta\Big)$$

et on définit $J_\alpha = J/I_\alpha$ avec ϕ_α la projection associée.

THÉORÈME 19. *Soit J une algèbre de Jordan-Banach complexe avec unité où le spectre de chaque élément est au plus dénombrable. Supposons de plus que J est séparable. Alors il existe un ordinal α_0 de première ou deuxième classe et une suite de composition $(I_\alpha)_{\alpha \leqq \alpha_0}$ d'idéaux fermés de J tel que $I_0 = \operatorname{Rad} J$, $I_{\alpha_0} = J$ et $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ est modulaire annihilatrice pour $\alpha \leqq \alpha_0$.*

Démonstration. Les algèbres J_α construites ci-haut sont toutes sans radical et à spectre au plus dénombrable. Les idéaux I_α forment une suite croissante d'idéaux fermés. D'après le théorème de Kuratowski ([**17**], page 146), cette suite se stabilise à partir d'un plus petit ordinal α_0. On a alors

$$\{0\} = I_{\alpha_0+1}/I_{\alpha_0} \cong \operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_{\alpha_0}).$$

Le Théorème 11 implique donc que $J_{\alpha_0} = \{0\}$, d'où $I_{\alpha_0} = J$. D'autre part,

$$I_{\alpha+1}/I_\alpha \cong \operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_\alpha)$$

est une algèbre sans radical car

$$\operatorname{Rad}(\operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_\alpha)) = \operatorname{kh}(\operatorname{Soc}\ J_\alpha) \cap \operatorname{Rad} J_\alpha = \{0\}$$

(voir [**19**], Théorème **3**). De plus, le spectre de tout élément de kh (Soc J_α) a au plus 0 comme point d'accumulation (voir [**9**]). Donc, par le Théorème 18, $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ est modulaire annihilatrice pour tout $\alpha \leqq \alpha_0$.

Remarque. Ce théorème a d'abord été démontré dans le cas associatif dans [**4**]. Dans ce cas on a la conclusion additionnelle que I_{α_0} est de codimension finie.

Bibliographie

1. B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach,* Lecture Notes in Mathematics *735* (Springer, Heidelberg, 1979).

2. ———*Geometry of pseudoconvex open sets and distribution of values of analytic multivalued functions,* Contemporary Math *32* (1984), 15–34

3. ———*Inessential elements in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. *18* (1986) 493–497.

4. ———*A Primer on Spectral Theory*, Universiteset (Springer, New York), à paraître.

5. B. Aupetit et A. Zraïbi, *Propriétés analytiques du spectre dans les algèbres de Jordan-Banach,* Manuscripta Math. *38* (1982), 381–386.

6. B. A. Barnes, *On the existence of minimal ideals in a Banach algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. *133* (1968), 511–517.

7. ———*A generalized Fredholm theory for certain maps in the regular representations of an algebra*, Can J. Math. *20* (1968), 495–504.

8. M. Benslimane et A. Kaïdi, *Structure des algèbres de Jordan-Banach non commutatives complexes régulières ou semi-simples à spectre fini,* J. Algebra, à paraître.

9. M. Benslimane et A. Rodríguez Palacios, *Caractérisation spectrale des algèbres de Jordan-Banach non commutatives complexes modulaires annihilatrices*, J. Algebra, à paraître.

10. F. F. Bonsall et J. Duncan, *Complete normed algebras* (Springer-Verlag, New York, 1973).

11. A. Fernández López, *Modular annihilator Jordan algebras*, Commun. in Algebra *13* (1985), 2597–2613.

12. ———*Noncommutative Jordan Riesz algebras*, Quart. J. Math. Oxford (2) *39* (1988), 67–80.

13. A. Fernández López et E. García Rus, *A characterization of the elements of the socle of a Jordan algebra*, soumis pour publication.

14. A. Fernández López et A. Rodríguez Palacios, *On the socle of a noncommutative Jordan algebra*, Manuscripta Math. *56* (1986), 269–278.

15. L. Hogben et K. McCrimmon, *Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra*, J. Algebra *68* (1981), 155–169.

16. N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications *39* (Providence, Rhode Island, 1968).

17. C. Kuratowski, *Topologie 1*, 4ème éd. (Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne, Varsovie, 1958).

18. K. McCrimmon, *The radical of a Jordan algebra, Proc. N. A. S. 62* (1969), 671–678.

19. ———*A characterization of the radical of a Jordan algebra,* J. Algebra *18* (1971), 103–111.

20. J. Martínez Moreno, *Sobre algebras de Jordan normadas completas,* Tesis doctoral (Universidad de Granada, Secretariado de Publicaciones, Granada, 1977).

21. J. M. Osborn et M. L. Racine, *Jordan rings with nonzero socle,* Trans. Amer. Math. Soc. *251* (1979), 375–387.

22. W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers* (Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1965).

Université Laval,
Cité Universitaire,
Québec, Québec