Astin Bulletin 11 (1980) 107-118

ÉQUILIBRAGE D'UN MARCHÉ DE RÉASSURANCE

JEAN LEMAIRE et MICHEL LOREA
Université Libre de Bruxelles

It is demonstrated that the problems of balancing a reinsurance network and finding the maximum flow in a graph are identical. Gale's theorem is applied first in order to prove a conjecture of Sousselier concerning simple first order networks, next to extend those results to any network. The balanced reinsurance scheme can effectively be constructed by means of Ford and Fulkerson's algorithm, as is shown by an example. Finally, we demonstrate that graph theory provides tools able to tackle more general problems than the one considered by Sousselier: capacity constraints and reinsurance costs are introduced in the model.

1. INTRODUCTION

Dans sa communication au colloque ASTIN de Taormine, J. SOUSSELIER (1978) a présenté le marché de la réassurance sous forme d'un graphe. Des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibrage puisse être réalisé ont été présentées dans un théorème de base et sa réciproque, que l'auteur n'a pu démontrer que dans le cas d'un marché ne comprenant pas plus de 4 assureurs.

Nous nous proposons de démontrer ces théorèmes, en ramenant le problème de l'équilibrage à la détermination du flot maximum dans un réseau de transport. Le théorème de base se déduit alors d'un résultat de Gale. Si l'équilibrage est possible, l'algorithme de Ford et Fulkerson permet de construire la solution; s'il est impossible, l'algorithme indique les raisons qui empêchent la réalisation de l'équilibre.

Sousselier avait conjecturé le théorème de base uniquement dans le cas d'un "réseau simple de premier degré", ne comprenant que des assureurs et réassureurs de premier degré, sans liaisons internes ni rétrocessions. A l'aide du dédoublement de certains sommets et d'un algorithme de transitivisation du graphe, nous étendons le théorème au réseau le plus général, pouvant comporter plusieurs degrés de réassurance, des rétrocessions, des cycles de réassurance, . . . et nous construisons effectivement le schéma de réassurance. Cette section est illustrée par un exemple.

Nous montrons enfin que la théorie des graphes permet d'aborder des problèmes de réassurance plus généraux que celui envisagé par Sousselier:

— des limitations de cessions entre assureurs et un réassureur peuvent être introduites sous forme de contraintes de capacité;
— un coût de réassurance peut être associé à chaque arc; dans le cas d'une surabondance de réassurance, le schéma le plus économique peut être obtenu en appliquant un algorithme "flot maximum de coût minimum".

2. PROBLÈMES DU FLOTS EN THÉORIE DES GRAPHES

Un graphe (X, U) est défini par

X $= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble de ses sommets, et

U $\subset$ X x X l'ensemble de ses arcs, un arc $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ étant défini par son extrémité initiale x_i et son extrémité terminale x_j.

Un graphe est appelé "réseau de transport" si à chaque sommet x est associé un nombre réel $d(x)$, et si à chaque arc $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ est associée une capacité C_{ij}; si $d(x) > 0$, il y a en x une demande d'une quantité $d(x)$ d'un produit quelconque; si $d(x) < 0$, le sommet x offre une quantité $[-d(x)]$ du produit envisagé, il fabrique la quantité strictement positive $[-d(x)]$; enfin, si $d(x) = 0$, le sommet ne fabrique ni ne consomme le produit. Résoudre un problème de transport consiste à faire circuler le produit dans les arcs du graphe, depuis les points de fabrication jusqu'aux points de demande, en respectant les contraintes de capacité: par tout arc $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ peut passer un flot, φ_{ij}, positif ou nul, mais qui ne peut en aucun cas dépasser la capacité C_{ij} de l'arc.

Le problème possède une solution si toutes les offres et toutes les demandes peuvent être satisfaites. Une condition nécessaire (mais non suffisante) d'existence d'une solution est que

$$\sum_{x:d(x)>0} d(x) = \sum_{x:d(x)<0} [-d(x)] \tag{1}$$

Dans le cas où (1) est satisfaite, le théorème de GALE (1957) fournit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution

$$d(S^c) \leqslant C(S, S^c) \qquad \forall\ S \subset X, \tag{2}$$

où S est un ensemble de sommets, S^c son complémentaire,

$$d(S^c) = \sum_{x \in S^c} d(x) \text{ et } C(S, S^c) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S^c} C_{ij}.$$

(2) exige donc que la demande d'un groupe quelconque de sommets soit inférieure ou égale à la somme des capacités des arcs entrant dans ce groupe.

L'algorithme de FORD et FULKERSON (1962), brièvement décrit ci-après, permet de construire effectivement une solution. Il est d'abord nécessaire de compléter le graphe en ajoutant deux sommets fictifs:

— l'entrée, ou la source, x_{i_E}, reliée à tout sommet producteur par un arc de capacité $[-d(x)]$;
— la sortie, ou la destination, x_{i_S}, reliée à tout sommet demandeur par un arc de capacité $d(x)$.

Le problème consiste alors à faire passer un flot de valeur maximale depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Ce flot, de valeur ϕ et d'éléments φ_{ij}, doit satisfaire aux contraintes

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} \text{a)} & \varphi_{ij} \geqslant 0 & \forall\ i, j \\ \text{b)} & \varphi_{ij} \leqslant C_{ij} & \\ \text{c)} & \sum\limits_{j} (\varphi_{ij} - \varphi_{ji}) = 0 & \forall\ i \neq i_E, i_S \\ \text{d)} & \sum\limits_{j} (\varphi_{i_E j} - \varphi_{j i_E}) = \sum\limits_{j} (\varphi_{j i_S} - \varphi_{i_S j}). & \end{array}$$

L'interprétation de ces contraintes est immédiate: par tout arc passe un flot non négatif, respectant les contraintes de capacité; il n'y a ni destruction ni construction de flot dans les sommets intermédiaires; le flot total est donc le flot net issu de l'origine, ou arrivant à destination.

Algorithme de Ford et Fulkerson

1. On part de n'importe quel flot de valeur ϕ (éventuellement nulle), satisfaisant aux contraintes.
2. On attribue à chaque sommet producteur x_i une marque (à condition que $\alpha_i > 0$)

   $$(i_E,\ \alpha_i,\ +)$$

   α_i est égale à la capacité résiduelle de l'arc $\mathbf{x}_{i_E}\mathbf{x}_i$: $C_{i_E i} - \phi_{i_E i} = -d(x_i) - \varphi_{i_E i}$
   α_i représente donc l'accroissement possible de flot en x_i.
3. On essaie de marquer chaque sommet. Un sommet x_j peut être marqué à partir de x_i
   - soit dans le sens de l'arc: $(i,\ \alpha_j,\ +)$, avec $\alpha_j = \min(\alpha_i,\ C_{ij} - \varphi_{ij})$; l'accroissement possible de flot en x_j est limité par l'accroissement en x_i et par la capacité résiduelle de l'arc $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ $(\alpha_j > 0)$;
   - soit dans le sens opposé: $(i, \alpha_j, -)$, avec $\alpha_j = \min(\alpha_j,\ \phi_{ji})$; on augmente le flot net arrivant en x_j en diminuant le flot qui en sort $(\alpha_j > 0)$.
4. - Si on arrive à marquer la sortie x_{i_S} au moyen d'une marque $(x_j, \alpha_{i_S}, +)$, il est possible d'augmenter le flot d'un quantité α_{i_S}. Le premier élément de chaque marque permet de retrouver le chemin par lequel l'accroissement de flot passe et de modifier les φ_{ij} et les capacités résiduelles en conséquence
     - si la nouvelle valeur du flot $\phi' = \phi + \alpha_{i_S}$ est égale à la valeur maximale $\sum\limits_{x:d(x)>0} d(x)$, on a construit une solution au problème;
     - sinon, on reprend à l'étape 2.
   - Si on n'arrive pas à marquer la sortie, il n'y a pas moyen d'augmenter la valeur du flot et il n'y a pas de flot meilleur que ϕ.

https://doi.org/10.1017/S0515036100006693 Published online by Cambridge University Press

Ford et Fulkerson ont, en outre, démontré le théorème suivant. Une coupe dans un réseau est une partition (S, S^c) des sommets, telle que $X_{i_E} \in S$ et $X_{i_S} \in S^c$. La valeur du flot maximum est égale à la capacité de la coupe minimum

$$\max \phi = \min_{S} C(S, S^c).$$

Dans le cas où il n'y a pas de solution, la coupe minimum est constituée par (M, M^c), où M est l'ensemble des sommets marqués au cours de la dernière itération. La considération de cette coupe est particulièrement intéressante, car elle indique les raisons qui empêchent la satisfaction de la rencontre offre-demande. En effet, les sommets producteurs marqués sont ceux qui ne parviennent pas à écouler leur marchandise, et les sommets consommateurs non marqués sont ceux qui ne parviennent pas à satisfaire leurs demandes.

3. LE RÉSEAU DE RÉASSURANCE SIMPLE DE PREMIER DEGRÉ

Considérons un marché (ou un réseau) de réassurance, formé par un ensemble de m assureurs directs A_i qui se réassurent auprès de n réassureurs de premier degré R_j; ceux-ci, à leur tour, rétrocèdent une partie de leur encaissement à des réassureurs de 2e degré, et ainsi de suite, jusqu'à un émiettement complet ou atomisation des risques. Notons a_i les cessions des cédantes A_i, r_j les conservations des réassureurs R_j, A l'ensemble des assureurs et R l'ensemble des réassureurs.

Pour reprendre la terminologie de Sousselier, le marché de réassurance est simple s'il n'existe ni cessions internes (rétrocessions d'assureurs entre eux ou entre réassureurs de même degré) ni cessions rétrogrades (cession d'un réassureur auprès d'un assureur ou d'un réassureur de degré inférieur). Il est de premier degré s'il n'existe aucun réassureur de degré supérieur à un.

Un réseau simple de premier degré se ramène facilement à un réseau de transport en supposant que les cédantes sont les producteurs $[a_i = -d(x_i)]$ et que les consommateurs sont les réassureurs $[r_j = +d(x_j)]$.

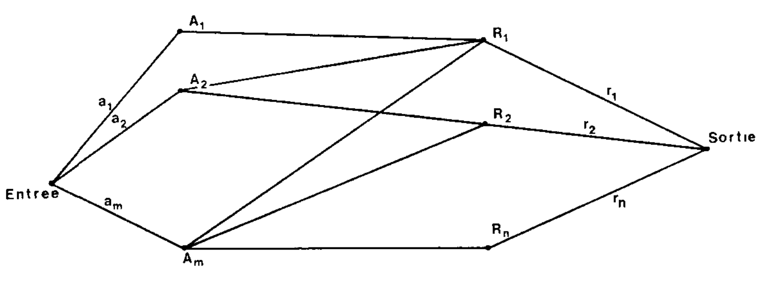

Fig. 1, Réseau simple de premier degré.

https://doi.org/10.1017/S0515036100006693 Published online by Cambridge University Press

De la source part un arc de capacité a_i vers chaque A_i. De chaque R_j part un arc de capacité r_j. Un traité de réassurance entre un assureur A_i et un réassureur R_j est représenté par un arc $\mathbf{A}_i\mathbf{R}_j$ de capacité infinie. Le marché de réassurance est dit équilibré si chaque assureur parvient à céder tout son excédent a_i et si chaque réassureur reçoit son plein de conservation r_j. Le problème de l'équilibrage du marché de réassurance se ramème ainsi à la détermination d'un flot de valeur $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$ dans le réseau de transport associé.

Théorème 1 (ou théorème de réciprocité de Sousselier)

Si $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} r_j$, une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau de réassurance simple de premier degré puisse être équilibré est que, pour tout ensemble R^+ de réassureurs,

$$\sum_{j \in R^+} r_j \leqslant \sum_{i \in A(R^+)} a_i, \tag{4}$$

où $A(R^+)$ est l'ensemble des assureurs connectés à au moins un réassureur de R^+.

Démonstration.

Nous allons démontrer que le théorème 1 se déduit du théorème de Gale; il nous faut donc montrer que, dans le cas du réseau simple de premier degré, (2) et (4) sont équivalentes. La démonstration s'effectue dans le graphe ne comportant pas les sommets "entrée" et "sortie".

(2) *implique* (4). En effet, il suffit de poser

$$S^c = [R^+ \cup A(R^+)].$$

Par définition de S^c, aucun arc ayant son origine en S n'a son extrémité en S^c. Donc $C(S, S^c) = 0$, et (2) se ramène à

$$\begin{aligned} d(S^c) &= \sum_{x \in S^c} d(x) \\ &= \sum_{x \in R^+} d(x) + \sum_{x \in A(R)^+} d(x) \\ &= \sum_{j \in R^+} r_j - \sum_{i \in A(R^+)} a_i \leqslant 0, \text{ ce qui établit (4).} \end{aligned}$$

(4) *implique* (2). Soit S un ensemble de sommets. Trois cas peuvent se présenter:

1. il y a au moins un arc de S vers S^c.
   (2) est alors trivialement satisfaite (l'arc étant de capacité infinie);

https://doi.org/10.1017/S0515036100006693 Published online by Cambridge University Press

2. il n'y a aucun arc de S vers S^c et $R \cap S^c = \phi$.
   (2) est satisfaite car

$$d(S^c) = - \sum_{i \in (A \cap S^c)} a_i \leqslant 0 = C(S, S^c);$$

3. il n'y a aucun arc de S vers S^c et $R \cap S^c = R^+ \neq \phi$.

$$\text{Alors} \sum_{j \in R^+} r_j \leqslant \sum_{i \in A(R^+)} a_i \quad \text{(par hypothèse)}$$

$$\leqslant \sum_{i \in (A \cap S^c)} a_i \text{ (car } A \cap S^c \supset A(R^+)\text{, aucun arc n'allant de } S \text{ vers } S^c\text{),}$$

$$\text{Donc} \sum_{j \in (R \cap S^c)} r_j - \sum_{i \in (A \cap S^c)} a_i \leqslant 0 = C(S, S^c).$$

Corrollaire (ou théorème de base de Sousselier)

Si $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$, une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau de réassurance puisse être équilibré est que, pour tout ensemble A^+ d'assureurs,

$$\sum_{i \in A^+} a_i \leqslant \sum_{j \in R(A^+)} r_j, \tag{5}$$

où $R(A^+)$ est l'ensemble des réassureurs connectés à au moins un assureur de A^+.

Ce corollaire est immédiat si l'on remarque qu'à un flot de réassurance dans un sens correspond un flot de primes de réassurance dans l'autre sens.

Comme l'a fait remarquer Sousselier, le nombre de conditions du type (4) ou (5) à vérifier devient considérable lorsque le réseau est grand. Pour vérifier si l'équilibrage est possible, il nous paraît beaucoup plus simple d'appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson, programmé aujourd'hui pour des graphes comportant jusqu'à 500 sommets et 4000 arcs. S'il existe une solution, l'algorithme la fournit. S'il n'en existe pas, l'étude des sommets marqués lors de la dernière itération nous donne:

- les assureurs (marqués) qui ne peuvent se réassurer intégralement et auraient intérêt à établir de nouveaux traités, de préférence avec
- les réassureurs (non marqués) qui ne parviennent pas à atteindre leur plein de conservation.

4. LE RÉSEAU DE RÉASSURANCE GÉNÉRAL

Dans le cas du réseau de réassurance le plus général, nous ne ferons pas, comme Sousselier, la distinction entre les degrés de réassureurs. Nous considérons seulement un ensemble A d'assureurs et un ensemble R de réassureurs, les cessions rétrogrades entre réassureurs devenant ainsi des liaisons internes. De même, nous éliminons les liaisons internes entre assureurs et les liaisons rétrogrades entre réassureurs et assureurs en dédoublant certains sommets: chaque fois qu'une compagnie joue à la fois le rôle d'assureur et le rôle de réassureur, nous lui associons deux sommets, l'un correspondant à sa fonction d'assureur direct, l'autre à son occupation de réassureur. Tout réseau de réassurance peut ainsi se ramener à un graphe canonique, sans liaisons internes entre assureurs ni cessions rétrogrades, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple.

Soient 8 compagnies ($A_1, \ldots, A_8$), dont les cessions valent respectivement (10, 15, 5, 10, 20, 25, 10, 5) et 2 réassureurs (R_2, R_3) qui acceptent respectivement 16 et 40. Les compagnies (A_1, A_6, A_8) jouent cependant également le rôle de réassureurs de pleins respectifs 13, 23 et 8; nous leur associons 3 "filiales" (R_1, R_4, R_5).

Supposons que les traités de réassurance suivants aient été conclus:

A_1 vers R_2 et R_3	R_1 et R_2 ont signé un traité d'échange
A_2 vers R_1 et R_2	R_4 vers R_3
A_3 vers R_3	R_5 vers R_3 et R_4
A_4 vers R_3	
A_5 vers R_2, R_3, R_4	
A_6 vers R_3, R_5	
A_7 vers R_5	
A_8 vers R_4.	

Le réseau de transport sous forme canonique associé est présenté en figure 2.

Nous allons ramener ce problème au cas précédent en associant au graphe sous forme canonique un réseau simple de premier degré appelé graphe transitivisé, obtenu en remplaçant les liaisons internes entre réassureurs par des arcs entre assureurs et réassureurs exprimant toutes les liaisons indirectes possibles. Par exemple, A_8 n'a pas conclu de traité de réassurance avec R_3, mais elle lui est quand même liée indirectement, par l'intermédiaire de R_4. Nous remplacerons donc l'arc $\mathbf{R_4R_3}$ par un arc $\mathbf{A_8R_3}$. Bien entendu, après cette opération de transitivisation, il faut supprimer les arcs éventuels reliant une compagnie à sa filiale, pour exprimer le fait qu'une compagnie ne désire évidemment pas se réassurer elle-même (dans l'exemple il s'agit des arcs $\mathbf{A_1R_1}$ et $\mathbf{A_6R_4}$).

Mathématiquement, le graphe transitivisé peut s'obtenir en considérant la matrice d'adjacence $(A - R)^1$ entre assureurs et réassureurs (la matrice qui comporte, en $i^{ème}$ ligne et en $j^{ème}$ colonne, un 1 s'il existe un arc $\mathbf{A}_i\mathbf{R}_j$, un zéro sinon) et la matrice d'adjacence $(R — R)$ entre réassureurs. La matrice d'ad-

https://doi.org/10.1017/S0515036100006693 Published online by Cambridge University Press

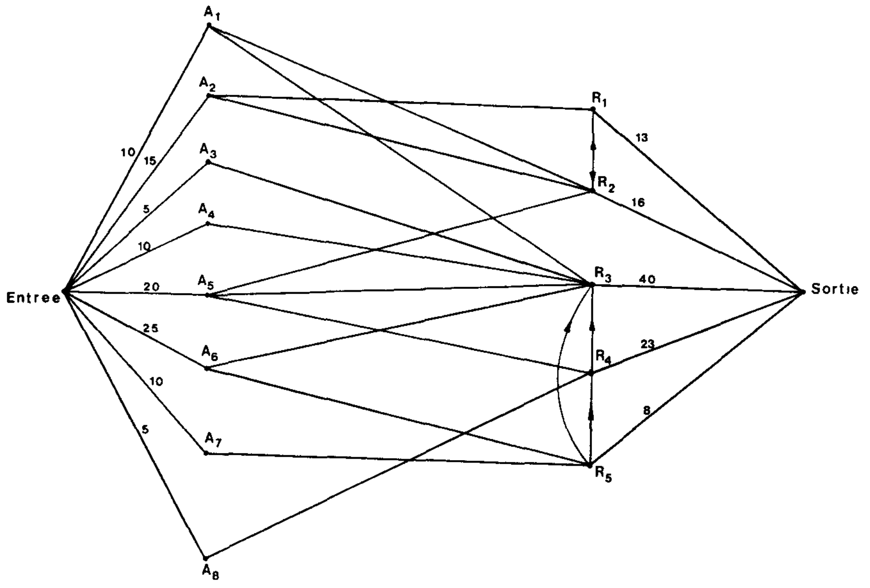

Fig. 2, Réseau de réassurance général. Forme canonique.

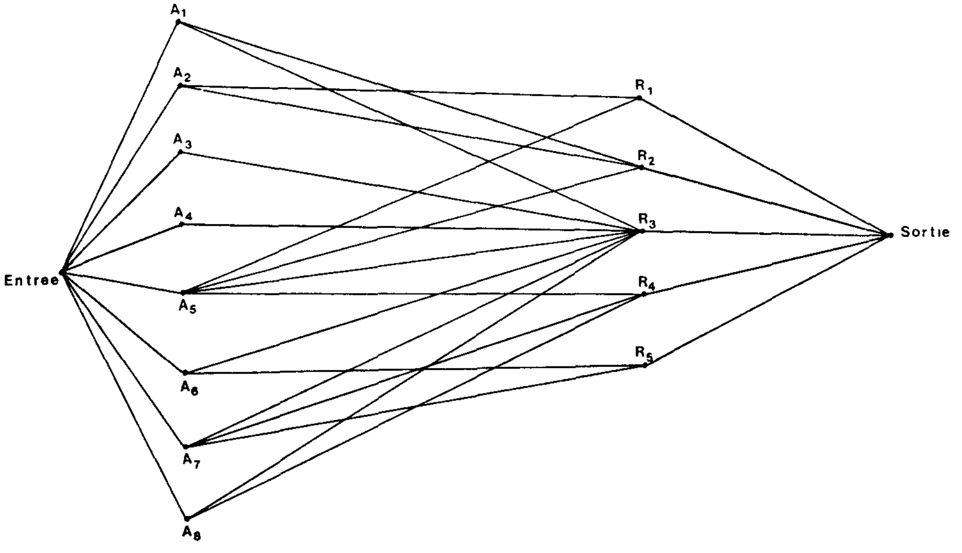

Fig. 3, Réseau de réassurance général. Forme transitivisée.

https://doi.org/10.1017/S0515036100006693 Published online by Cambridge University Press

jacence $(A - R)^k$ dont les éléments valent 1 ou 0 selon qu'il existe ou non un chemin indirect de longueur k entre A_i et R_j, s'obtient par multiplication booléenne

$$(A - R)^k = (A - R)^{k-1} \otimes (R - R), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

La somme booléenne

$$(A - R) = \sum_{k=1}^{n} (A - R)^k$$

fournit (à l'élimination des arcs entre compagnies et filiales près) le graphe transitivisé.

Ce graphe étant un réseau simple de premier degré, nous sommes ramenés au cas précédent, ce qui nous permet

- de trivialement généraliser le théorème 1 au cas général

Théorème 2.

Si $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de réassurance quelconque puisse être équilibré est que, pour tout ensemble R^+ de réassureurs,

$$\sum_{j \in R^+} r_j \leqslant \sum_{i \in A(R^+)} a_i,$$

où $A(R^+)$ est l'ensemble des assureurs connectés à au moins un réassureur de R^+ par un chemin de longueur quelconque.

Le corollaire se généralise de la même manière;

- d'appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson pour construire la solution, ce qui est fait ci-dessous dans le cas de l'exemple.

Itération	Marques	Flot total
1	A_1: $(E, 10, +)$; R_2: $(A_1, 10, +)$; S: $(R_2, 10, +)$	10
2	A_2: $(E, 15, +)$; R_2: $(A_2, 6, +)$; S: $(R_2, 6, +)$	16
3	A_2: $(E, 9, +)$; R_1: $(A_2, 9, +)$; S: $(R_1, 9, +)$	25
4	A_3: $(E, 5, +)$; R_3: $(A_3, 5, +)$; S: $(R_3, 5, +)$	30
5	A_4: $(E, 10, +)$; R_3: $(A_4, 10, +)$; S: $(R_3, 10, +)$	40
6	A_5: $(E, 20, +)$; R_1: $(A_5, 20, +)$; S: $(R_1, 4, +)$	44
7	A_5: $(E, 16, +)$; R_3: $(A_5, 16, +)$; S: $(R_3, 16, +)$	60
8	A_6: $(E, 25, +)$; R_3: $(A_6, 9, +)$; S: $(R_3, 9, +)$	69
9	A_7: $(E, 10, +)$; R_4: $(A_7, 10, +)$; S: $(R_4, 10, +)$	79
10	A_8: $(E, 5, +)$; R_4: $(A_8, 5, +)$; S: $(R_4, 5, +)$	84
11	A_6: $(E, 16, +)$; R_5: $(A_6, 16, +)$; S: $(R_5, 8, +)$	92
12	A_6: $(E, 8, +)$; R_3: $(A_6, 8, +)$; A_5: $(R_3, 8, —)$; R_4: $(A_5, 8, +)$; S: $(R_4, 8, +)$	100

La solution est donc

Assureur	Réassureur	Cession	Remarque
A_1	R_2	10	
A_2	R_2	6	Directement ou par l'intermédiaire de R_1
A_2	R_1	9	Directement par ou l'intermédiaire de R_2
A_3	R_3	5	
A_4	R_3	10	
A_5	R_1	4	Par l'intermédiaire de R_2
A_5	R_3	8	Directement ou par l'intermédiaire de R_4
A_5	R_4	8	
A_6	R_3	17	Directement ou par l'intermédiaire de R_5
A_6	R_5	8	ou par le chemin $A_6R_5R_4R_3$
A_7	R_4	10	Par l'intermédiaire de R_5
A_8	R_4	5	
		100	

REMARQUES

1. La solution proposée ci-dessus n'est certainement pas la seule. L'ordre de marquage des sommets n'est en effet pas imposé par l'algorithme et un autre ordre peut conduire à une autre solution. Nous avons choisi un ordre permettant de démontrer l'utilité des marques négatives à la dernière itération.
2. Chaque itération permet de saturer un assureur ou un réassureur.
3. Il existe souvent plusieurs manières de réaliser une cession; ainsi, la cession 17 de A_6 à R_3 peut s'effectuer soit de manière directe, soit par l'intermédiaire de R_5, soit encore par le chemin $A_6R_5R_4R_3$. On peut par exemple décider de toujours sélectionner le chemin qui comporte le moins d'intermédiaires.
4. Dans l'exemple que nous avons considéré, il est extrêmement simple de déterminer les differents chemins qu'une cession peut emprunter, puis de déterminer le plus court. Sur ordinateur, cela peut être réalisé à l'aide d'un algorithme de plus court chemin quelconque (par exemple l'algorithme de Ford ou celui de Bellman-Kalaba, décrits dans Roy (1969)).
5. L'algorithme n'est pas perturbé par la présence d'un cycle (entre R_1 et R_2).
6. On peut vérifier que si l'on supprime le seul arc $\mathbf{R_5R_4}$, il n'existe pas de solution. Le flot maximal est de 98; une des compagnies A_3, A_4, A_6 ou A_7 ne parviendra pas à se réassurer complètement, et un des réassureurs R_1, R_2 ou R_4 n'atteindra pas son plein de conservation.

5. GÉNÉRALISATIONS

La théorie des graphes permet de considérer des problèmes plus généraux que ceux envisagés dans ce qui précède. Citons notamment:

5.1. *Introduction de contraintes de capacité*

Il se peut fort bien qu'un assureur A_i ne souhaite pas "mettre tous ses œufs dans le même panier" et impose une limitation $c_{ij} < a_i$ à sa cession vers R_j. De même, un réassureur peut vouloir diversifier son portefeuille et ne pas trop recevoir d'une seule source. L'algorithme de Ford et Fulkerson n'est pas modifié par l'introduction de capacités, et le théorème 2 devient:

Théorème 3.

Si $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} r_j$, une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau puisse être équilibré est que, $\forall R^+ \subset R$,

$$\sum_{j \in R^+} r_j \leqslant \sum_{i \in A(R^+)} \min[a_i, \sum_{j \in R^+} c_{ij}],$$

où, comme précédemment, $A(R^+)$ est l'ensemble des assureurs connectés (directement ou indirectement) à au moins un réassureur de R^+.

5.2. *Surabondance de réassurance. Introduction d'un critère-coût*

Si $\sum_{i=1}^{n} r_j > \sum_{j=1}^{m} a_i$, un critère supplémentaire peut être introduit: le coût de la réassurance. Si par exemple les assureurs choisissent tous un traité en quote-part, et si les réassureurs appliquent le principe de l'espérance mathématique, en exigeant en plus de la prime pure une surcharge de sécurité proportionnelle à l'espérance du risque pris en charge, on peut associer un "coût unitaire de transport" $t_{ij} = \beta_j \, E(a_{ij})$ à chaque unité a_{ij} cédée, où β_j est le taux de chargement de R_j. Il faut alors déterminer un flot satisfaisant aux contraintes (3) et minimisant $\sum_U t_{ij} \, \varphi_{ij}$.

Il existe plusieurs algorithmes (FORD et FULKERSON (1962)) permettant de résoudre ce problème de type "flot maximum de coût minimum". Vu la structure simple du graphe transitivisé, on peut se ramener à un problème de transport classique (KAUFMANN (1964)) en introduisant un assureur fictif supplémentaire de cession $\sum_j r_j - \sum_i a_i$, avec des coûts unitaires de transport prohibitifs.

5.3. *Remarque d'Ordre Pratique*

Le fait d'avoir résolu les problèmes de l'équilibrage d'une manière théorique n'est pas d'un grand secours sur le plan pratique, car, ainsi que l'a déjà indiqué Mr. SOUSSELIER, il faudrait pour cela un bureau international possédant toutes les données sur les besoins de réassurance des diverses Compagnies directes ainsi que sur les possibilités d'acceptation de *tous* les Réassureurs, ce qui est déjà inconcevable et de plus, ce qui l'est encore d'avantage, une autorité centrale capable d'imposer à toutes les parties une coordination rigoureuse de toutes leurs opérations de réassurance.

Cela revient à dire que même si les conditions théoriques de l'équilibre sont remplies, l'équilibre ne serait pas atteint dans la réalité. Ainsi le "rendement" de la réassurance est très inférieur à 100 %.

Ce qui justifie l'idée, plusieurs fois exprimée par Mr. Sousselier, de rechercher, au moins pour les risques importants et les risques catastrophiques, d'autres modes de réassurance susceptibles d'obtenir un meilleur rendement.

BIBLIOGRAPHIE

Ford, L. R., et D. R. Fulkerson (1962). *Flows in network.* Princeton Univ. Press.
Gale, D. (1957). *A theorem on flows in networks.* Pacific J. of maths, **7**, 1073-1082.
Kaufmann, A. (1964). *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.* Dunod, Paris.
Roy, B. (1969). *Algèbre moderne et théorie des graphes.* Dunod, Paris.
Sousselier, J. (1978). *Le marché de la réassurance.* Colloque ASTIN à Taormine.