Arabic Sciences and Philosophy, 34 (2024) : 153-185 doi:10.1017/S0957423924000018

LA VERSION ARABE DE LA *MESURE DU CERCLE* D'ARCHIMÈDE I

ROSHDI RASHED
Laboratoire SPHERE, CNRS – univ. Paris-Diderot
Email : rashed@paris7.jussieu.fr

Résumé. Depuis son édition par Heiberg au XIX^{e} s., on savait que le texte grec de *La mesure du cercle* d'Archimède qui nous est parvenu est fautif, altéré par l'intervention d'un compilateur. Pour certaines de ses parties au moins, il est donc d'une authenticité douteuse. Plus récemment, l'examen de la traduction latine (au IX^{e} siècle) de la traduction arabe de ce texte a permis de conclure que le manuscrit grec traduit appartient à une tradition textuelle meilleure et plus ancienne que le texte édité par Heiberg. Dans cette étude, on trouve l'*editio princeps* de la traduction arabe de *La mesure du cercle*, sa première traduction et une analyse historique et mathématique. Les nombreuses lectures de cette traduction faites au cours des siècles ont inspiré plusieurs «rédactions». Trois d'entre elles seront éditées, traduites et examinées dans une prochaine étude.

Abstract. Ever since its publication by Heiberg in the 19th century, we have known that the surviving Greek text of *The Measurement of the Circle* by Archimedes is faulty, altered by the intervention of a compiler. At least some parts of it are therefore of dubious authenticity. More recently, an examination of the ninth-century Latin translation of the Arabic translation of this text has led to the conclusion that the translated Greek manuscript belongs to a better and older textual tradition than the text edited by Heiberg. This study contains the *editio princeps* of the Arabic translation of *The Measurement of the Circle*, its first translation and a historical and mathematical analysis. The many readings of this translation over the centuries have inspired several "redactions." Three of these will be edited, translated and examined in a forthcoming study.

1. INTRODUCTION

Parmi les écrits mathématiques anciens qui ont été les plus diffusés, figure l'opuscule d'Archimède sur la mesure du cercle. Dans les mathématiques grecques, il a été cité et commenté par Dioclès, Héron d'Alexandrie, Ptolémée, Pappus, Théon d'Alexandrie, Eutocius, etc. Traduit en arabe, il a été étudié par al-Kindī, les Banū Mūsā, puis par Abū al-Wafāʾ al-Būzǧānī, Ibn al-Hayṯam, al-Bīrūnī, al-Ṭūsī, et plus tard par al-Kāšī, entre autres. Plus encore, cet opuscule a très tôt fait partie, dans sa traduction arabe, d'une collection, dite «les intermédiaires» – intermédiaires entre les *Éléments* d'Euclide et l'*Almageste* de Ptolémée –, destinée à l'enseignement dans les écoles et de ce fait largement diffusée. Traduit deux fois en latin à partir de la version arabe, la deuxième fois par Gérard de Crémone, il a aussi été traduit en hébreu [1], également à partir de l'arabe. L'une des raisons de cette ample diffusion est que, avec *La sphère et le cylindre* d'Archimède et le livre XII des *Éléments* d'Euclide, ces traités ont constitué les premières sources de la connaissance de la méthode d'exhaustion et de l'étude des déterminations infinitésimales.

Tout cela est bien connu, et depuis fort longtemps. Quant au texte grec de cet écrit, J. L. Heiberg en a donné deux éditions critiques successives – en 1866 et en 1913/15 –, avec une traduction latine. Ces éditions ont été établies à partir des manuscrits grecs datés du xvi^e siècle, qui tous remontent à un manuscrit transcrit au ix^e siècle, aujourd'hui perdu. Mais, selon Heiberg lui-même, ce texte grec de la *Mesure du cercle* qui nous est parvenu souffre de multiples omissions et défauts, qui témoignent de l'intervention d'un compilateur. De son côté, M. Clagett, dans son *Archimedes in the Middle Ages*, confronté à la traduction latine de la version arabe par Gérard de Crémone, écrit :

> […] *Gerard's translation – or rather the Arabic tradition from which it was made – seems to indicate access to a Greek tradition somewhat more complete than the Byzantine tradition on which the extant Greek text is based* [2].

Ainsi, tel qu'il se présente aujourd'hui, le texte grec de la *Mesure du cercle* n'est donc pas celui d'une édition conforme à ce que les mathématiciens grecs entendaient par ce terme, et la question de son authenticité se pose nécessairement. Cette question a reçu plusieurs réponses.

[1] R. Glasner, «Hebrew Translations in Medieval Christian Spain: Alfonso of Valladolid Translating Archimedes?», *Aleph*, vol. 13, nº 2 (2013), p. 185-199.

[2] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, *The arabo-latin tradition* (Madison, 1964), p. 32.

Ainsi, A. Favaro a expliqué que les défauts du texte de la *Mesure du cercle* tiennent au fait que ce n'est pas l'écrit entier d'Archimède, mais un fragment d'un écrit plus substantiel, aujourd'hui perdu, dans lequel Archimède avait étudié le problème de l'approximation du rapport d'un arc à sa corde [3]. Après A. Favaro, E. J. Dijksterhuis a écrit dans le même sens :

> *As appears both from its language, from which all traces of the Siculo-Dorian dialect have vanished, and from the argumentation, which is scrappy and rather careless, it has not come down to us in its original form. It is quite possible that the fragment we possess formed part of a longer work, which is quoted by Pappus* [Collectio*, V, 2; 312, line 20*] *under the title On the Circumference of the Circle (περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας), and that the latter also dealt with the more general question as to the ratio between the length of an arc of a circle and that of its chord* [4].

On pourrait multiplier les citations pour montrer que, depuis Heiberg, les historiens avaient conscience du mauvais état du texte grec qui nous est parvenu, d'autant plus qu'à ces défauts s'en ajoutent quelques autres : par exemple, une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre est considérée comme une valeur exacte.

Récemment, W. Knorr a réactivé avec enthousiasme l'ancien débat. À l'aide des témoignages des mathématiciens anciens et de nombreuses conjectures, il a conclu que le texte grec existant n'est pas vraiment une édition, mais une compilation disparate à laquelle auraient pris part Héron, Pappus, Théon d'Alexandrie, Sporos de Nicée, entre autres. Cette thèse hardie a eu l'avantage de permettre une reprise de l'interrogation et d'enrichir la discussion [5].

Mais, pour restituer fidèlement les faits sans recourir aux conjectures indécidables, je voudrais d'abord revenir aux textes de la *Mesure du cercle* qui portent explicitement le nom d'Archimède comme seul auteur. Ils sont au nombre de trois :

– le texte grec édité par Heiberg et traduit par lui en latin ; cette édition critique est faite à partir de plusieurs manuscrits qui remontent tous, sauf un, à un seul manuscrit copié au IXe siècle à l'initiative de Léon le mathématicien ; ce manuscrit a été perdu en 1491 et seuls restent ceux qui en sont dérivés ; Heiberg a également utilisé dans sa seconde édition du texte (1913-1915) un palimpseste trouvé à Jérusalem ;

[3] A. Favaro, *Archimede* (Rome, 1923), p. 53.

[4] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes* (Copenhague, 1956), p. 222.

[5] W. Knorr, « Archimedes' Dimension of the Circle : A View of the Genesis of the Extant Text », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 35, nº 4 (1986), p. 281-324.

– une traduction arabe d'un ancien manuscrit grec que l'on attribue sans preuve à Ṯābit b. Qurra ou à Qusṭā b. Lūqā ; elle pourrait être de la main de Ḥunayn b. Isḥāq ;

– la traduction latine par Gérard de Crémone d'un autre manuscrit arabe de la *Mesure du cercle* ; cette traduction a donné accès à la traduction arabe, dont elle est assez proche sans lui être identique.

On peut également citer des sources attribuées à d'autres auteurs, et souvent partielles :

– un fragment de la *Collection mathématique* de Pappus, où celui-ci démontre la première proposition ;

– un fragment de Théon d'Alexandrie dans son commentaire de l'*Almageste* ;

– le commentaire d'Eutocius, notamment de la troisième proposition ;

– le commentaire par al-Kindī de cette même troisième proposition ;

– l'édition de la traduction arabe de la *Mesure du cercle* par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, ainsi que quelques autres rédactions de la main de mathématiciens arabes [6].

À ces sources, on peut encore ajouter de nombreux témoignages et fragments dus à Zénodore, Héron d'Alexandrie, Proclus, Simplicius et bien d'autres, tous évoqués par Hultsch, Heiberg, Rome, etc.

Dans cette étude, nous nous fixons comme tâche première d'identifier le texte auquel on devrait se fier lorsque l'on traite de la *Mesure du cercle*. Nous allons à cette fin exploiter la tradition textuelle arabe de cet opuscule avant de la confronter à la tradition textuelle grecque – démarche préalable à tout jugement sérieux.

2. LA TRADUCTION ARABE DE LA *MESURE DU CERCLE*

Le livre d'Archimède a été traduit en arabe avant le milieu du IXᵉ siècle, comme l'attestent al-Kindī et les trois frères Banū Mūsā. En effet, al-Kindī a commenté la troisième proposition de la *Mesure du cercle* : l'approximation du rapport de la circonférence à son diamètre [7]. On sait également, par son livre *Le grand art*, où il commente certains

[6] Pour ces rédactions, voir notre étude à paraître, «La version arabe de la *Mesure du cercle* d'Archimède II», *Arabic Sciences and Philosophy*.

[7] Roshdi Rashed, «Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle"», *Arabic Sciences and Philosophy*, 3 (1993), p. 7-53; repris dans *idem*, *Écrits d'histoire et de philosophie des sciences*, vol. 2, *Géométries* (De Gruyter, 2023), p. 1-44.

chapitres de l'*Almageste*, qu'il connaissait la première proposition, sur l'aire du cercle, ainsi que la seconde, sur le rapport entre le carré du diamètre du cercle et son aire [8]. Cela montre qu'al-Kindī connaissait et démontrait les trois propositions de la *Mesure du cercle*.

Mais son commentaire de la troisième proposition nous donne davantage d'informations sur la date et le contexte de la traduction. Il se présente sous la forme d'une épître dans laquelle il répond au médecin et helléniste Yūḥanna b. Māsawayh [9]. Celui-ci lui avait écrit pour lui demander de lui expliquer les propos d'Archimède dans la *Mesure du cercle* sur l'approximation du rapport du périmètre du cercle à son diamètre. Or Yūḥanna b. Māsawayh tenait un salon (*mağlis*), où il enseignait, et parmi ses élèves se trouvaient des traducteurs de livres scientifiques et philosophiques grecs, comme Ḥunayn b. Isḥāq : comme Yūḥanna b. Māsawayh est mort en 857 on peut en conclure que la traduction en arabe de la *Mesure du cercle* est antérieure à cette date, et que, parmi les candidats susceptibles de l'avoir faite, figure Ḥunayn b. Isḥāq.

Mais on sait qu'al-Kindī collaborait avec plusieurs traducteurs de textes philosophiques et scientifiques grecs, et notamment avec Qusṭā b. Lūqā qui, selon l'ancien biobibliographe Ibn Abī Uṣaybīᶜa, a traduit en arabe *La sphère et le cylindre* d'Archimède [10]. Nous aurions donc là un deuxième traducteur possible de la *Mesure du cercle* au ɪxᵉ siècle.

Le second témoignage nous vient des Banū Mūsā, contemporains d'al-Kindī, dans leur livre sur *L'aire des figures planes et sphériques* [11]. Ils y reprennent deux propositions de la *Mesure du cercle*, la première, sur l'aire du cercle et la troisième, sur l'approximation du rapport de la circonférence au diamètre. À propos de la première (la quatrième dans leur livre), ils écrivent :

> Pour tout cercle, le produit de son demi-diamètre par son demi-périmètre est égal à son aire.

[8] Al-Kindī, *Fī al-ṣināᶜa al-ᶜuẓmā*, éd. ᶜAzmī Ṭaha al-Sayyid Aḥmad (Nicosie, 1987).

[9] Sur la vie d'Ibn Māsawayh et ses activités, voir en particulier al-Nadīm, *Kitāb al-fihrist*, éd. R. Tajaddud (Téhéran, 1971), p. 295-296; Ibn Abī Uṣaybiᶜa, *ᶜUyūn al-anbāᵓ fī ṭabaqāt al-aṭibbāᵓ*, éd. N. Riḍā (Beyrouth, 1965), p. 246-255. Voir aussi l'article de J. C. Sournia et G. Troupeau, «Médecine arabe : Biographies critiques de Jean Mésué (ᴠɪɪɪᵉ siècle) et du prétendu "Mésué le Jeune" (xᵉ siècle)», *Clio Medica*, 3 (1968), p. 109-117.

[10] Ibn Abī Uṣaybiᶜa, *ᶜUyūn al-anbāᵓ*, p. 285-293.

[11] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du ɪxᵉ au xɪᵉ siècle*, vol. 1, *Fondateurs et commentateurs : Banū Mūsā, Ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd* (Londres, 1996).

Ils en donnent une démonstration un peu différente de celle d'Archimède [12].

Quant à la troisième proposition d'Archimède (la sixième de leur livre), ils énoncent :

> Calculons ensuite le rapport du diamètre au périmètre par la méthode appliquée par Archimède. En effet, aucune autre méthode découverte par un autre, jusqu'à notre époque, ne nous est parvenue. Même si cette méthode ne conduit pas à connaître la grandeur de l'un par rapport à l'autre pour que celle-ci soit conforme à la vérité, elle conduit à déterminer la grandeur de l'un par rapport à l'autre avec n'importe quel degré d'approximation voulu par celui qui cherche [13].

De plus, les Banū Mūsā citent le corollaire de la première proposition, et écrivent à la fin de la proposition 4 de leur livre :

> Il est clair à partir de cela que le produit du demi-diamètre par la moitié d'un arc quelconque supposé est égal à l'aire du secteur entouré par cet arc et les deux demi-droites qui passent par ses deux extrémités [14].

Ce corollaire, cité par les Banū Mūsā à partir de la traduction arabe de la *Mesure du cercle*, ne figure pas dans les manuscrits grecs consultés par Eutocius ni dans ceux qu'a utilisés Heiberg dans son édition critique. La traduction arabe utilisée par les Banū Mūsā a donc été faite à partir d'un manuscrit grec appartenant à une tradition textuelle plus ancienne. C'est précisément cette traduction arabe de la *Mesure du cercle* qui nous est parvenue en deux manuscrits :

– ms. Istanbul, Süleymaniye, Fātiḥ 3414, f. 2ᵛ-6ᵛ ;
– ms. Bursa, Haraççi 1174, f. 98ᵛ-101ᵛ.

Le premier fait partie d'une collection qui comprend aussi la traduction de *La sphère et le cylindre* d'Archimède et son commentaire par Eutocius. On trouve également dans cette collection l'original arabe du *Liber assumptorum*. Le copiste est le mathématicien Ibn Abī Ǧarrada, qui l'a transcrite en 684/1285.

La collection du second manuscrit comprend elle aussi la traduction arabe de *La sphère et le cylindre* d'Archimède. Le copiste n'a noté ni son nom, ni la date de la copie, qui a probablement été faite au XIIIᵉ siècle.

Outre ces deux manuscrits de la traduction en arabe de la *Mesure du cercle*, les mathématiciens nous ont laissé plusieurs rédactions de cette traduction, comme celle de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī. Autant de témoins des

[12] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. 1, p. 68.
[13] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. 1, p. 74.
[14] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. 1, p. 70.

lectures faites au cours des siècles, auxquels s'ajoute la traduction latine de cette traduction arabe [15].

3. LE GREC ET L'ARABE : UNE VERSION OU DEUX ?

Le texte grec de la *Mesure du cercle* dans l'édition de Heiberg – noté G – et la traduction arabe éditée ici – notée A – sont l'un et l'autre composés de trois propositions, dans le même ordre. Dans cet ordre, la démonstration de la seconde proposition ne dépend pas seulement de la première, mais aussi de la troisième. Cette anomalie a été maintes fois soulignée. Il existe entre G et A des différences irréductibles qui montrent que G et A ne sont pas héritiers de la même tradition textuelle. Nous avons déjà noté la présence dans A du corollaire à la première proposition, et son absence de G. Il y a d'autres différences importantes, que nous avons notées en italique dans la traduction française faite de A. Nous examinerons ces différences au cours de notre commentaire des propositions.

3.1. La relation entre l'aire et le périmètre

Archimède montre dans la proposition 1, à l'aide de la méthode d'exhaustion, que l'aire S du cercle est égale à celle de la figure rectiligne (triangle rectangle) dont l'un des côtés est égal au rayon r du cercle, et l'autre à son périmètre : $\mathrm{S} = \frac{1}{2}rp$.

C'est précisément ce qui est énoncé et démontré dans G et A. Mais les témoins historiques, tels que Héron d'Alexandrie, Théon d'Alexandrie, Pappus, transmettent des formes équivalentes, ce qui a incité certains historiens à soulever la question de la multiplicité des rédactions de la *Mesure du cercle*. En effet, Héron écrit :

> [...] δείκνυσι δὲ αὐτὸς Αρχιμήδης ἐν τῇ τοῦ κύκλου μετρήσει, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου.
>
> [...] le même Archimède démontre dans la *Mesure du cercle* que le rectangle compris sous la circonférence du cercle et le rayon est le double du cercle [16].

Selon Héron, Archimède a démontré que $2\mathrm{S} = rp$.

À son tour, Théon d'Alexandrie écrit qu'Archimède a démontré que :

> [...] τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας εἰς εὐθεῖαν ἐξαπλουμένης περιεχόμενου ὀρθογώνιον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

[15] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, p. 30 *sq.*

[16] *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. 3, éd. Hermann Schöne (Leipzig : Teubner, 1903), p. 66, l. 27-30.

> […] le rectangle compris sous le diamètre et la circonférence du cercle déroulée en une droite est quadruple de la surface du cercle [17].

Ainsi, selon Théon, Archimède a démontré que $4S = dp$, avec d le diamètre du cercle.

C'est une forme pratiquement équivalente qui a été transmise par Pappus. Il écrit :

> Ὅτι μὲν οὖν τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν.
>
> Archimède a démontré que le rectangle compris sous le périmètre du cercle et le rayon est le double du cercle [18].

Pappus propose de démontrer cette proposition d'une autre manière dans le huitième livre de la *Collection mathématique*. Il écrit :

> […] τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης, καὶ ὡς ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ δέδεικται καὶ ὑφ' ἡμῶν δι' ἑνὸς θεωρήματος.
>
> […] car le rectangle compris sous le rayon du cercle et le périmètre du cercle est le double de l'aire du cercle, comme cela a été démontré par Archimède, ainsi que par nous-même au moyen d'un théorème particulier dans le commentaire sur le premier livre des *Mathématiques* [19].

Quelques siècles plus tard, al-Kindī écrit dans son livre *Le grand art* :

> Nous avons montré dans notre livre *Sur les sphères* que, si la circonférence du cercle est multipliée par son diamètre, le rectangle obtenu est le quadruple de l'aire du cercle ; et ce que l'on obtient du produit du diamètre du cercle par le quart de son périmètre est égal à l'aire du cercle, donc l'aire du cercle est égale à quatorze auprès de onze [20].

Ainsi, selon al-Kindī, on a $S = \frac{1}{4}pd$ et $\frac{d^2}{S} = \frac{14}{11}$. Rappelons pour mémoire qu'al-Kindī connaissait la traduction arabe de la *Mesure du cercle*, et par conséquent les deux premières propositions. Comme on peut s'en douter, les auteurs grecs et arabes cités ne pouvaient ignorer que ces expressions sont équivalentes et que les quelques différences renvoient à des variantes dans la rédaction de la démonstration. Mais, comme G

[17] Théon d'Alexandrie, *Commentaria in Ptolemaei Syntaxin mathematicam I-IV*, éd. Adolphe Rome (Rome : Cité du Vatican, Bibliothèque apostolique du Vatican, 1936-1943), p. 395.

[18] *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, éd. et trad. lat. Friedrich Hultsch (Berlin : 1876-1878) ; *La Collection mathématique de Pappus d'Alexandrie*, trad. fr. Paul Ver Eecke (Paris : A. Blanchard, 1933-1982), vol. 1, p. 243.

[19] *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, éd. Hultsch, p. 1106; trad. Ver Eecke, p. 866-867.

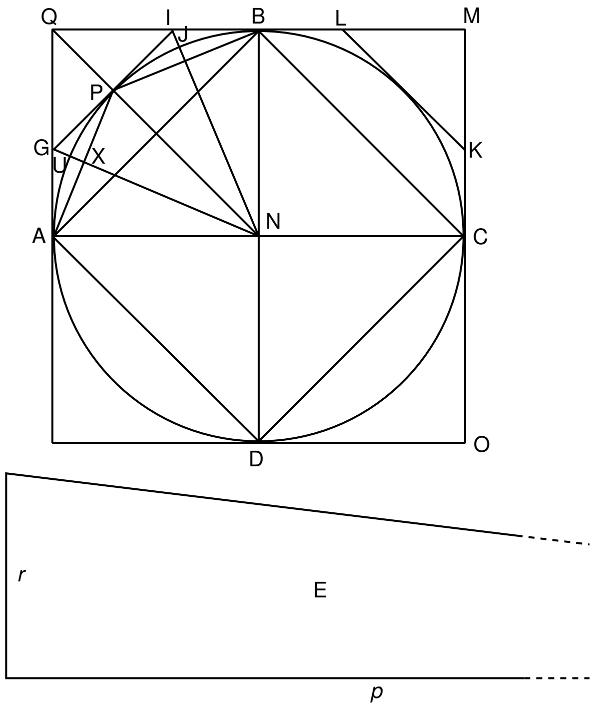
[20] Al-Kindī, *Fī al-ṣināʿa al-ʿuẓmā*, p. 175.

et A attribuent à Archimède l'expression $\mathrm{S} = \frac{1}{2}rp$ et que, dans chacun de ces deux textes, on a recours à un triangle rectangle auxiliaire, il nous semble que conjecturer la multiplicité des versions de la *Mesure du cercle* est quelque peu forcé.

Revenons à présent à la comparaison entre G et A pour localiser et préciser les différences. Voici d'abord un résumé de la démonstration de cette proposition dans A.

Proposition 1. L'aire S d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement égaux au rayon r et au périmètre p du cercle : $\mathrm{S} = \frac{1}{2}pr$.

Démonstration. Soit ABCD le cercle (N, r) et E le triangle rectangle de côtés r et $\frac{1}{2}p$ (voir fig. ci-dessous).



(1) Supposons $\mathrm{S} > \frac{1}{2}pr$ et posons $\mathrm{S} - \frac{1}{2}pr = \varepsilon$, aussi petit que l'on veut.

Si on inscrit successivement dans le cercle un carré ABCD d'aire S_1, un octogone APB ... d'aire S_2, un polygone régulier de 16 côtés d'aire S_3, et ainsi de suite, on aura $S_1 > \frac{S}{2}$, d'où [21] :

$$\begin{aligned}
r_1 &= S - S_1 < \frac{S}{2} < S_1\\
r_2 &= S - S_2 < \frac{1}{2}r_1 < \frac{S}{4} < \frac{S_1}{2}\\
r_3 &= S - S_3 < \frac{1}{2}r_2 < \frac{S}{8} < \frac{S_1}{4}\\
&\vdots\\
r_n &= S - S_n < \frac{1}{2}r_{n-1} < \frac{S}{2^n} < \frac{S_1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Les restes successifs sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'après les *Éléments* X, 1, il existe un reste r_n tel que $r_n < \varepsilon$, donc $S - S_n < \varepsilon$, $S_n > S - \varepsilon$, donc $S_n > \frac{1}{2}pr$. Mais ceci est impossible car S_n est le demi-produit du périmètre p_n par l'apothème a_n (dans le cas de l'octogone $p_n = 8AP$ et $a_n = NX$ (cf. figure). Or $p_n < p$ et $a_n < r$; on a donc $S_n = \frac{1}{2}p_n a_n < \frac{1}{2}pr$. Il est donc impossible d'avoir $S > \frac{1}{2}pr$.

(2) Supposons $S < \frac{1}{2}pr$ et posons $\frac{1}{2}pr - S = \varepsilon$ aussi petit que l'on veut.

On considère alors le carré QO circonscrit au cercle, les points de contact du carré et du cercle étant A, B, C et D, puis l'octogone régulier circonscrit GILK..., et ainsi de suite. Désignons par $S'_1, S'_2, S'_3, \ldots$ les aires des polygones successifs, on a :

$$r'_1 = S'_1 - S < \frac{1}{2}S'_1.$$

En effet, on a vu que $S_1 < S < S'_1$ et $S_1 = \frac{1}{2}S'_1$, donc

$$r'_1 = S'_1 - S < \frac{1}{2}S'_1.$$

On a :

$$\begin{aligned}
r'_1 &= 4\,\mathrm{aire}(APBQ)\\
r'_2 &= S'_2 - S = 4\,\mathrm{aire}(AGPIBJPU)\\
&= 4\,\mathrm{aire}(APBQ) - 4\,\mathrm{aire}(IQG).
\end{aligned}$$

[21] S_1 étant l'aire du carré inscrit et S'_1 celle du carré circonscrit, si r est le rayon du cercle, on a $S_1 = 2r^2$ et $S'_1 = 4r^2 = 2S_1$, donc $S_1 < S < 2S_1$, d'où $S_1 > \frac{S}{2}$. On a posé $r_1 = 4\,\mathrm{segment}(APB)$; S_2 étant l'aire de l'octogone, on a de même $r_2 = S - S_2 = 4[\mathrm{segment}(APB) - \mathrm{triangle}(APB)]$. Or $\mathrm{segment}(APB) > \mathrm{triangle}(APB) > \frac{1}{2}\mathrm{trapèze}(AGIB) > \frac{1}{2}\,\mathrm{segment}(APB)$, donc $\mathrm{segment}(APB) - \mathrm{triangle}(APB) < \frac{1}{2}\,\mathrm{segment}(APB)$, $r_2 < 2\,\mathrm{segment}(APB)$; c'est-à-dire $r_2 < \frac{r_1}{2}$. On démontre de même que $r_3 < \frac{r_2}{2}$.

Mais, IP $=$ IB, tangentes égales, et QI $>$ IP, donc QI $>$ IB. On a alors

$$\text{aire(QPI)} > \frac{1}{2}\,\text{aire(QPB)}$$

et, à plus forte raison,

$$\text{aire(QPI)} > \frac{1}{2}\,\text{aire(QPJB)}.$$

De même, aire(QPG) $> \frac{1}{2}$ aire(QPUA), on a donc

$$\text{aire(APBQ)} > \text{aire(IQG)} > \frac{1}{2}\,\text{aire(APBQ)},$$

d'où

$$\text{aire(APBQ)} - \text{aire(IQG)} < \frac{1}{2}\,\text{aire(APBQ)},$$

d'où

$$r'_2 = \mathrm{S}'_2 - \mathrm{S} < \frac{1}{2}r'_1 < \frac{1}{4}\mathrm{S}'_1.$$

De la même façon, on montre que

$$\begin{aligned} r'_3 &= \mathrm{S}'_3 - \mathrm{S} < \frac{1}{2}r'_2 < \frac{1}{8}\mathrm{S}'_1 \\ &\vdots \\ r'_n &= \mathrm{S}'_n - \mathrm{S} < \frac{1}{2}r'_{n-1} < \frac{1}{2^n}\mathrm{S}'_n. \end{aligned}$$

Les restes successifs sont encore en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; il existe donc un reste r'_n tel que $r'_n < \varepsilon$, donc $\mathrm{S}'_n < \mathrm{S} + \varepsilon$ et par suite $\mathrm{S}'_n < \frac{1}{2}pr$.

Mais ceci est impossible car on a $\mathrm{S}'_n = \frac{1}{2}p'_n r$ et $p'_n > p$, donc

$$\mathrm{S}'_n > \frac{1}{2}pr.$$

Il est donc impossible d'avoir $\mathrm{S} < \frac{1}{2}pr$.

On peut remarquer qu'Archimède augmente le nombre de cotés des polygones jusqu'à ce que la différence entre le cercle et le polygone soit suffisamment petite pour que l'on puisse procéder à la contradiction.

Conclusion : $\mathrm{S} = \frac{1}{2}pr$.

Corollaire. L'aire d'un secteur circulaire est égale au demi-produit du rayon par la longueur de l'arc.

D'après la traduction arabe, Archimède déduit le corollaire comme conséquence de la démonstration précédente.

La démonstration de la proposition 1 est en deux parties, (1) et (2).

(1) On lit dans G :

> Inscrivons y (dans le cercle) le carré ΑΓ, et que les arcs soient coupés en deux parties égales[22].

Dans A on lit :

> Inscrivons dans le cercle le carré ΑΓ, alors il se sépare du cercle ΑΒΓΔ plus grand que sa moitié, c'est-à-dire le carré ΑΓ ; partageons l'arc ΑΡΒ en deux moitiés au point Ρ et aux points homologues à celui-ci, et joignons ΑΡ, ΡΒ et leurs homologues. Ainsi il s'est séparé également du reste de la portion du cercle ΑΒΓΔ <une partie> plus grande que sa moitié, c'est-à-dire ΑΡΒ et ses homologues.

Notons que Heiberg, dans sa traduction latine de G, tente bien de rectifier le texte en ajoutant après «et que les arcs soient coupés en deux parties égales», *arcus autem in binas partes dividantur ⟨et ducantur rectas BZ, ZA, AM, MΔ cet.⟩*, et il note «Archimède avait sans doute ligne 9 ajouté quelque chose de tel.» Il poursuit : «Dans la totalité de cet opuscule, le style et l'expression souffrent d'une concision si négligente qu'on y reconnaît la main d'un compilateur plutôt que celle d'Archimède[23].»

On lit ensuite dans G :

> Que les segments du cercle ont à la fin une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle[24].

Dans A, on lit :

> Si nous faisons de même, successivement, il restera des portions qui sont inférieures à la grandeur de l'excédent du cercle sur le triangle.

(2) Dans la seconde partie de la démonstration, on suppose que le triangle est plus grand que le cercle, et on retrouve des différences analogues entre G et A.

Prenons l'exemple de la justification de l'inégalité

$$\mathrm{aire}(\mathrm{IQG}) > \frac{1}{2}\,\mathrm{aire}(\mathrm{AUPJBQ}),$$

dans le grec, $\mathrm{PO\Pi} > \frac{1}{2}\,\mathrm{OAMZ}$ (p. 234, l. 10-11), «et le triangle ΡΟΠ est plus grand que la moitié de la figure ΟΖΑΜ».

[22] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, éd. J. L. Heiberg (Stuttgart, réimpr. 1972 de l'éd. de 1910), p. 232, l. 8-9.

[23] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 233, n. 3.

[24] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 234.

Mais, alors que dans A l'égalité est déduite au cours de la démonstration, dans G il n'y a aucune justification, ce qui a mené Heiberg à donner une démonstration en note 2. Eutocius n'avait pas rencontré la justification de cette inégalité dans la version qu'il commente de la *Mesure du cercle*[25].

On constate une notable symétrie dans la rédaction des deux parties de la démonstration. Cette symétrie ne peut être l'effet d'une simple coïncidence. Il suffit de lire les autres rédactions d'Archimède pour saisir que A reflète une méthode d'exposition et de démonstration, alors que G est un bon résumé.

On peut également rappeler le témoignage d'Eutocius puisqu'il commente cette première proposition. Or la partie qu'il lui dédie est très brève, contrairement à celle qu'il consacre à la troisième proposition. En effet, il commence par affirmer que « le premier théorème ne semble offrir aucune difficulté[26]... », et conclut comme suit ce bref commentaire :

> Comme nous l'avons dit, le premier théorème n'exige aucune recherche. Car les affirmations que le triangle ΠΟΡ est supérieur à la moitié de la figure ΑΖΟΜ, et qu'il est possible d'une façon générale de circonscrire à un cercle donné une figure rectiligne de manière que la somme des segments compris entre les arcs du cercle et les côtés de la figure rectiligne circonscrite soit inférieure à une aire donnée, ont été clairement expliquées dans ce que nous avons écrit dans notre commentaire au premier livre de *La sphère et le cylindre*[27].

Or on a vu que, dans la traduction arabe d'un ancien manuscrit grec, la démonstration est parfaitement rédigée. Cette citation d'Eutocius laisse supposer que le manuscrit de la *Mesure du cercle* dont il disposait diffère de celui que le traducteur a rendu en arabe. Mais on observe également, entre G et A, une autre différence importante dans le style de la rédaction. Il s'agit de la fréquence de l'occurrence du terme « homologue », *naẓīr*, ὅμοιος, que l'on rencontre tout au long de la démonstration. Ce terme s'impose, en raison de l'absence de symbolisme, pour étendre une opération ou une propriété. Or, si ce terme est systématiquement utilisé dans A, il est absent de G. Mais on perçoit dans G une trace de son existence : on lit en effet, dans la seconde partie de la démonstration, « [...] les segments homologues au segment ΠΖΑ », οἳ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι[28].

[25] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 3, p. 230, l. 17-18.
[26] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 3, p. 230.
[27] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 3, p. 230-232.
[28] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 234, l. 11-12.

On observe aussi que la démonstration que Pappus propose de cette même proposition[29] diffère de celle que l'on trouve dans A, même si l'inspiration de cette démonstration, comme celle de Théon d'Alexandrie, provient d'Archimède. Dans toutes ces démonstrations, l'idée principale est bien en effet celle d'Archimède. Il s'agit d'obtenir une figure rectiligne I, d'abord inscrite, telle que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ soient les longueurs de ses n côtés respectifs.

On abaisse du centre du cercle des perpendiculaires de longueurs h_i, avec $1 \leq i \leq n$, aux côtés de longueur i_i, et soit s_i les

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i_i h_i < \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{n} i_i < \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}_i.$$

Il reste que la rédaction de cette même idée diffère chez Pappus non seulement de celle de A, mais aussi de G.

On vient de constater que la démonstration par Archimède de cette proposition est par la méthode d'exhaustion, ce qui lui permet d'éviter la notion non encore définie de l'infini actuel pour déterminer les limites des progressions géométriques qu'il a introduites. Cette méthode exige que soit connu au préalable le résultat que l'on veut obtenir – ici, l'aire du cercle – car c'est un procédé de démonstration et non de découverte. Il faut également connaître une grandeur à laquelle on compare le résultat obtenu pour montrer son unicité par une double réduction à l'absurde. Ici, cette grandeur est une figure rectiligne – un triangle rectangle.

Pour le dire autrement, cette méthode, appliquée lors de l'étude des aires des surfaces courbes et des volumes courbes, est un procédé pour découper ceux-ci selon l'une ou l'autre progression, géométrique ou arithmétique, pour déterminer les bornes supérieures des ensembles de portions découpées. C'est sur l'existence de ces bornes et leur unicité que cette méthode est fondée. Ainsi, dans la *Mesure du cercle*, Archimède coupe le cercle en un ensemble de portions selon une progression géométrique pour déterminer les bornes de l'ensemble des portions découpées. Il a fondé la mesure du cercle sur les propriétés de ces bornes et leur unicité. Ensuite il compare ces bornes à d'autres, obtenues à l'occasion de recherches analogues sur une figure rectiligne.

Cette méthode repose également, comme on l'a souvent remarqué, sur l'axiome d'Eudoxe-Archimède ou sur la proposition X, 1 des *Éléments* d'Euclide. Voici comment s'écrit cet axiome, comme l'avait noté Ibn al-Hayṯam :

[29] *La Collection mathématique de Pappus d'Alexandrie*, trad. fr. Ver Eecke, livre V, prop. 3.

> Pour deux droites inégales, si l'on double la plus petite autant de fois indéfiniment, ce doublement aboutira à une grandeur supérieure à la grandeur de la droite la plus grande[30].

Quant à la proposition X, 1 des *Éléments*, elle s'écrit :

> Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Autrement dit : Soient A et a deux grandeurs continues de même espèce telles que $\mathrm{A} > a$, et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de rapports égaux ou inégaux telle que $\frac{1}{2} \leq \alpha_i < 1$ pour $i = 1, 2, \ldots$, considérons les grandeurs

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_1 = (1-\alpha_1)\,\mathrm{A} \\ &\mathrm{A}_2 = (1-\alpha_2)\,\mathrm{A}_1 = (1-\alpha_1)\,(1-\alpha_2)\,\mathrm{A} \\ &\vdots \\ &\mathrm{A}_k = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

alors il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n > \mathrm{N})\mathrm{A}_n < a$.

Enfin cette méthode, lors de certaines applications, suppose la prémisse dite de la quatrième proportionnelle qui a été démontrée par al-Ḫayyām (1048-1131), qui démontre le théorème suivant :

> Soit A et B deux grandeurs dans un rapport donné, et la grandeur C donnée de même espèce que A et B, alors il existe nécessairement une quatrième grandeur D telle que $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$.

Une des conditions supposées par Archimède pour pouvoir procéder par la méthode d'exhaustion est que la grandeur retranchée soit plus grande que la moitié de la grandeur initiale. Quant à la double réduction à l'absurde, elle suppose que l'on admette le principe du tiers exclu.

Pour procéder par cette méthode dans la *Mesure du cercle*, Archimède a établi dans *La sphère et le cylindre* les conditions de possibilité pour inscrire dans le cercle, et pour lui circonscrire, des suites de polygones – monotones et additives – dont les différences sont inférieures à toute grandeur donnée.

Il admet comme premier postulat :

> De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite[31],

[30] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. 1, p. 348.

et il écrit ensuite :

> […] si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le périmètre du polygone inscrit est plus court que la circonférence du cercle, car chacun des côtés du polygone est plus court que l'arc du cercle découpé par lui[32].

Dans la première proposition, il démontre que :

> Si on circonscrit un polygone à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que le pourtour du cercle[33].

3.2. Le rapport de l'aire au carré du diamètre

L'énoncé de la proposition 2 est presque identique dans G et A. Dans G on lit : « Le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14. » Dans A on lit : « Le rapport de l'aire de tout cercle au carré de son diamètre est égal au rapport de 11 à 14. »

Le reste de la proposition demeure presque identique dans les deux textes, à l'exception de la fin de la démonstration :

> […] ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ'ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται.
>
> […] puisque, d'une part, la hauteur ΑΓ est égale au rayon du cercle et que, d'autre part, la base est égale, comme nous le montrerons, au triple du diamètre, augmenté d'un segment égal, avec une grande approximation, à son septième[34].

Dans son édition du texte grec, Heiberg propose d'amender ce passage et écrit :

> *Hic locus* ἐπεί *lin. 2–5* δειχθήσεται *mire confusus transcriptori tribuendus, qui eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutauit; neque enim Archimedes hanc propositionem ante prop. 3, qua nititur, posuit*[35].

D'autres historiens ont repris cette affirmation ; T. Heath par exemple écrit :

[31] Archimède, *Œuvres complètes*, éd. et trad. Charles Mugler (Paris : Les Belles Lettres, 1970-1972), vol. 1, p. 10.

[32] Archimède, *Œuvres complètes*, vol. 1, p. 11.

[33] Archimède, *Œuvres complètes*, vol. 1, p. 12. Dans sa rédaction de *La sphère et le cylindre*, Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī justifie ainsi la place qu'il réserve à sa rédaction de la *Mesure du cercle* : « J'ai joint à la fin ⟨de cette rédaction⟩ le livre d'Archimède sur l'aire du cercle, car il a été construit sur quelques axiomes mentionnés dans ce livre. » Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, *Mağmūʿat rasāʾil riyādiyya wa-falakiyya* (Hyderabad, 1359 AH ; réimpr. Frankfurt am Main, 1998), vol. 1, *Kitāb al-kura wa-al-ʾusṭuwāna*, p. 3.

[34] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 236, l. 2-5.

[35] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 237, n. 2.

The text of this proposition [2] *is not satisfactory, and Archimedes can not have placed it before Proposition 3, as the approximation depends upon the result of that proposition* [36].

Or dans A ce paragraphe s'écrit, si on utilise les lettres grecques :

> […] puisque la perpendiculaire AΓ est égale à la droite menée du centre de ce cercle à son périmètre *et que la base ΓZ est égale au périmètre*, car le périmètre du cercle est supérieur au triple de son diamètre d'un septième du diamètre approximativement.

On constate que le membre de phrase souligné est absent de G. On le trouve également dans le manuscrit arabe traduit en latin par Gérard de Crémone au XIIe siècle :

> […] *quoniam perpendicularis AG est equalis linee qui egreditur a centro circuli ad lineam ipsum circumdantem, et basis ΓZ est aequalis circumferentia circuli, quoniam est plus triplo diametri ipsius et septima diametri fere* [37].

Si cette phrase était ajoutée au texte grec, celui-ci ne serait pas «confus».

D'autre part, dans A ne figure pas la séquence ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ'ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται, «la base est égale, comme nous le montrerons, au triple du diamètre augmenté d'un segment égal, avec une grande approximation, à son septième [38] ».

Dans A, il n'y a à cet endroit aucune référence à la démonstration dans la troisième proposition ; la valeur approchée $3+\frac{1}{7}$ est supposée connue.

Reprenons la démonstration selon A.

Proposition 2. Si S est l'aire d'un cercle, d son diamètre, alors $\frac{\mathrm{S}}{d^2} = \frac{11}{14}$, ou $\frac{\mathrm{S}}{r^2} = \frac{22}{7}$.

La démonstration suppose connu le rapport $\frac{p}{d} = 3+\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, mais n'annonce pas que l'étude de ce rapport se fera dans la proposition 3.

Soit un cercle de diamètre $\mathrm{AB} = d$, et CH le carré circonscrit de côté CD, dont l'aire est d^2 (voir fig. p. 181 *infra*). $\mathrm{CE} = 3\mathrm{CD}$ et $\mathrm{EG} = \frac{1}{7}\mathrm{CD}$.

On a $\frac{\mathrm{aire(ACG)}}{\mathrm{aire(ACD)}} = \frac{22}{7}$; mais $4\,\mathrm{aire(ACD)} = \mathrm{aire(CH)} = \mathrm{AB}^2 = d^2$ et $\mathrm{aire(ACG)} = \frac{1}{2}pr = \mathrm{S}$, donc $\frac{4\mathrm{S}}{d^2} = \frac{22}{7}$ et $\frac{\mathrm{S}}{d^2} = \frac{11}{14}$.

[36] *The Works of Archimedes Edited in Modern Notation, with Introductory Chapters by T. L. Heath* (New York, 1953), p. 93.

[37] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, p. 46.

[38] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 236, l. 2-5.

3.3. L'approximation du rapport du périmètre au diamètre

Dans la proposition 3 Archimède non seulement donne un encadrement de ce rapport, mais il le démontre. Cette démonstration a été l'objet au siècle dernier de plusieurs commentaires. On voulait surtout savoir si Archimède procède par anthyphérèse, et comment. Plus généralement, on comprend le succès que cette proposition a pu connaître tout au long de l'histoire, à tel point qu'elle a parfois été séparée des deux premières propositions pour être copiée ou commentée indépendamment ; c'est ce qu'a fait al-Kindī [39]. Elle a également incité les mathématiciens à chercher une meilleure approximation de ce rapport, comme l'on fait al-Būzǧānī, al-Bīrunī, al-Kāšī, Viète et bien d'autres.

3.3.1. Comme, à elle seule, la troisième proposition occupe plus de la moitié de la *Mesure du cercle*, il sera plus commode d'exposer la démonstration telle qu'elle est établie dans la traduction arabe, pour ensuite commenter la démarche d'Archimède et les différences entre les deux versions, grecque et arabe.

Proposition 3. Si p désigne le périmètre du cercle de diamètre d, alors $\left(3+\frac{10}{71}\right)d < p < \left(3+\frac{1}{7}\right)d$.

Majorons d'abord p. Soit un cercle de centre E, AC son diamètre et G un point de la tangente en C tel que $\widehat{\mathrm{CEG}} = \frac{1}{3}$ d'un droit (voir fig. p. 183 *infra*).

On trace les droites EH, EI, EK et EL qui sont respectivement les bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{CEG}}$, $\widehat{\mathrm{CEH}}$, $\widehat{\mathrm{CEI}}$ et $\widehat{\mathrm{CEK}}$.

On a $\dfrac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GC}} = 2 = \dfrac{306}{153}$ et $\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{GC}} = \sqrt{3} > \dfrac{265}{153}$.

Dans le triangle CEG on a $\dfrac{\mathrm{GE}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HC}}$, d'où $\dfrac{\mathrm{GE}+\mathrm{EC}}{\mathrm{GC}} = \dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CH}}$, donc $\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CH}} > \dfrac{571}{153}$.

On en déduit $\dfrac{\mathrm{EH}^2}{\mathrm{CH}^2} > \dfrac{349450}{23409}$ (car $\mathrm{EH}^2 = \mathrm{EC}^2 + \mathrm{CH}^2$) et [40] $\dfrac{\mathrm{EH}}{\mathrm{CH}} >$

[39] R. Rashed, «Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle"».

[40] Archimède n'expose que les résultats. Les calculs détaillés sont donnés par al-Kindī dans son commentaire. Cf. R. Rashed, «Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle"», p. 7-53. Archimède n'a pas expliqué comment il a trouvé la double inégalité $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Depuis un siècle et demi au moins, les historiens des mathématiques ont déployé beaucoup d'efforts pour retrouver son cheminement. Cf. par exemple F. Hultsch, «Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes», *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Univ. zu Göttingen*, 1893, p. 367-428; M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. 1, 2e éd. (Leipzig, 1894), p. 301-303; T.

$\frac{591}{153}$.

De la même façon, on montre à partir du triangle HEC que $\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CI}} > \frac{1162+\frac{1}{8}}{153}$ et que $\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IC}} > \frac{1172+\frac{1}{4}}{153}$; puis, à partir du triangle IEC, on montre que $\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CK}} > \frac{2334+\frac{1}{4}}{153}$ et que $\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{CK}} > \frac{2339+\frac{1}{4}}{153}$; enfin, à partir du triangle KEC, on montre que $\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CL}} > \frac{4673+\frac{1}{2}}{153}$.

Mais $\widehat{\mathrm{LEC}} = \frac{1}{48}$ droit ; le segment CL est la moitié du côté du polygone régulier de 96 côtés circonscrit au cercle. Le périmètre de ce polygone est donc $p_1 = 2\mathrm{CL} \cdot 96$. On a alors

$$\frac{\mathrm{AC}}{p_1} = \frac{2\mathrm{EC}}{2\mathrm{CL} \cdot 96} > \frac{4673+\frac{1}{2}}{14688}.$$

Mais

$$14688 = \left(4673+\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + 667 + \frac{1}{2}$$

donc

$$14688 < \left(4673+\frac{1}{2}\right)\left(3+\frac{1}{7}\right)$$

et

$$p_1 < \left(3+\frac{1}{7}\right)\mathrm{AC}.$$

On sait que 3AC est le périmètre de l'hexagone inscrit dans le cercle, on sait donc que $p_1 > 3\mathrm{AC}$.

Archimède énonce la conclusion :

$$p_1 - 3\mathrm{AC} < \frac{1}{7}\mathrm{AC}.$$

Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. 2 (Oxford, 1921), p. 51 *sq.* ; C. Müller, «Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von $\sqrt{3}$?» *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B : Studien*, vol. 2, n$^{\mathrm{o}}$ 3 (1932), p. 281-285; J. Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide* (Paris, 1962), p. 26-32; E. J. Dijksterhuis, *Archimedes* (Copenhague, 1956), p. 223 *sq.* Un résumé du débat est exposé par T. Heath, *The Works of Archimedes*, p. LXXX-XCIX. On peut également citer P. Tannery, «Sur la Mesure du cercle d'Archimède», *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2$^{\mathrm{e}}$ série, 1882, t. IV, p. 313-337 (réimpr. *in* P. Tannery, *Mémoires scientifiques*, vol. 1, p. 226-253). Au cours de cette discussion, on a évoqué le procédé de Héron d'Alexandrie pour extraire la racine carrée, et l'itération de ce procédé pour obtenir l'approximation de $\sqrt{3}$, aussi bien que la méthode des fractions continues pour trouver toutes les réduites intermédiaires de $\sqrt{3}$.

Le périmètre du cercle étant p, on a $p < p_1$, donc $p < \left(3 + \frac{1}{7}\right)$ AC.

Démontrons maintenant la minoration. Soit un cercle de diamètre AC et $\widehat{\mathrm{BAC}} = \frac{1}{3}$ droit, $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = 2 = \frac{1560}{780}$ et $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.

On trace les droites AH, AI, AK et AL qui sont respectivement les bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{HAC}}$, $\widehat{\mathrm{IAC}}$ et $\widehat{\mathrm{KAC}}$ (voir fig. p. 185 *infra*).

La droite AH coupe BC en G. Les deux triangles rectangles GHC et AHC sont semblables car $\widehat{\mathrm{HAC}} = \widehat{\mathrm{HAB}} = \widehat{\mathrm{HCB}}$. On a donc

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{GC}}.$$

D'autre part dans le triangle ABC dont AG est une bissectrice, on a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{GC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

donc

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AB}}{\mathrm{BC}},$$

d'où $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}} < \frac{2911}{780}$ et $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CH}} < \frac{3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780}$ (car $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CH}^2$).

De la même manière, on montre que $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AH}}{\mathrm{CH}}$, donc $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IC}} < \frac{5924 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CI}} < \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240}. \tag{1}$$

On a $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KC}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AI}}{\mathrm{CI}}$, donc $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KC}} < \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$; on en déduit :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{KC}} < \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66}. \tag{2}$$

On a $\frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{LC}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AK}}{\mathrm{CK}} < \frac{2016 + \frac{1}{6}}{66}$; on en déduit :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CL}} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}. \tag{3}$$

La droite CL est le côté du polygone régulier de 96 côtés inscrit dans le cercle ; le périmètre de ce polygone est $p_2 = 96\mathrm{CL}$, donc

$$\frac{p_2}{\mathrm{AC}} = \frac{96\mathrm{CL}}{\mathrm{AC}} > \frac{96 \cdot 66}{2077 + \frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}.$$

Si p est le périmètre du cercle, on a $p > p_2$, donc $\dfrac{p}{\mathrm{AB}} > 3 + \dfrac{10}{71}$. On a donc montré que $\dfrac{p}{\mathrm{AB}} > \left(3 + \frac{10}{71}\right) d$; et $\left(3 + \frac{10}{71}\right) d < p < \left(3 + \frac{1}{7}\right) d$.

3.3.2. Examinons à présent quelques différences entre G et A.

3.3.2.1. La première différence porte sur la locution ἁ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\text{σξε}}$ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$[41]. Dans son édition, C. Mugler opte comme Heiberg pour l'élimination de τὴν[42], pour la raison que, dans les trois manuscrits notés D, E, H, dérivés du manuscrit principal disparu au cours de la seconde moitié du xvi^e^ siècle, on trouve ὃν au lieu de ἤ ὃν. Cette locution, telle qu'elle se présente, est ainsi traduite : «[…] et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153[43] ». Or cette locution est dite dans A : «le rapport de ΕΓ à ΓΖ est plus grand que le rapport de deux cent soixante-cinq à cent cinquante-trois». Mais on sait que ΓΖ est le côté de l'hexagone, donc égal au rayon $r = 153$, et $\mathrm{E\Gamma}^2 = 3r^2 = 70227$, donc $\mathrm{E\Gamma} > 265$ et $\dfrac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{EZ}} > \dfrac{265}{153}$, valeur donnée par A.

La valeur donnée par G a mis les historiens dans l'embarras. Ainsi Ver Eecke écrit que la valeur donnée par G est une approximation[44]. Mais, pour rendre le reste du texte cohérent, il remplace dans son commentaire toutes les inégalités strictes par des inégalités larges. Dijksterhuis pour sa part écrit :

> *In his terminology Archimedes does not always distinguish between exact and approximate equality*[45].

Ce jugement semble un peu trop général pour régler la question de la cohérence du texte d'Archimède. Il va donc falloir chercher la raison de la différence entre G et A. Dans A on lit :

ونسبة ه جـ إلى ز جـ أعظم من نسبة المائتين والخمسة والستين إلى المائة والثلاثة والخمسين.

Cette expression traduit : ἡ δὲ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤ ὃν $\overline{\text{σξε}}$ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$.

Ainsi μείζονα, أعظم, semble être tombé de la tradition manuscrite à partir de laquelle G a été établi. D'ailleurs, une fois ce terme disparu, ἤ ὃν, attesté par les manuscrits D, E, H, tous dérivés d'un même manuscrit, ne pouvait pas être longtemps maintenu. Les deux manuscrits

[41] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 236.

[42] Archimède, *Œuvres complètes*, vol. 1, p. 140.

[43] Archimède, *Œuvres complètes*, vol. 1, p. 140.

[44] P. Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, traduites du grec en français avec une introduction et des notes* (Paris / Bruxelles, 1921), vol. 2, p. 703, n. 5.

[45] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 225-226.

B et G, eux aussi dérivés du même manuscrit d'origine, ont corrigé en omettant ἤ. Ainsi, en l'absence du terme μείζονα, le rapport d'inégalité a été transformé en rapport d'égalité. On trouvera la même erreur dans le texte commenté par Eutocius [46].

L'autre différence entre G et A est l'écriture des nombres : en arabe, ils sont écrits en toutes lettres. Or on sait que les traducteurs en arabe des textes arithmétiques – Qusṭā b. Lūqā par exemple dans les traductions des *Arithmétiques* de Diophante – procédaient ainsi pour éviter le risque d'erreur lors de la copie.

3.3.2.2. Un autre exemple de la différence entre G et A : dans G, on trouve la locution καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέτι, «et par permutation et par composition», que Heiberg propose de supprimer. Il écrit :

> Les mots suivants [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέτι] ont été introduits ici par un copiste suivant un ordre fautif, d'après Eutocius [47].

Or cette locution n'existe pas dans le manuscrit grec traduit en arabe dans A.

3.3.2.3. Troisième différence :

> ونسبة ه ك إلى جـ ك أعظم من نسبة الألفين والثلاثمائة والستة والثلاثين والربع إلى المائة والثلاثة والخمسين.
>
> […] donc le rapport de ΕΚ à ΓΚ est plus grand que le rapport de $2339 + \frac{1}{4}$ à 153.

Cette locution est absente de G, mais figure dans le commentaire d'Eutocius : Ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν $\overline{\text{͵βτλθ}}$ δ´ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$ [48]. Omise dans G, cette locution devait se trouver à cette place, comme l'indiquent les autres calculs d'Archimède. Elle figure également dans le texte d'al-Kindī [49].

3.3.2.4. On lit dans G la locution Ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ $\overline{\text{͵δχογ}}$ ϛ´ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$ [50], «Le rapport de ΕΓ à ΛΓ en longueur est donc plus grand que…» Heiberg propose de supprimer «en longueur», μήκει. Mais ce terme est bien présent dans le grec que traduit A. On lit en effet :

> فنسبة ه جـ إلى جـ ل في الطول أعظم من […]

[46] Archimède, *Œuvres complètes*, vol. 4, *Commentaires d'Eutocius et fragments*, éd. et trad. par Charles Mugler (Paris : Les Belles Lettres, 1972), p. 145, l. 14.

[47] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 237, n. 4.

[48] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 3, p. 240, l. 12-13.

[49] R. Rashed, «Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle"», p. 36.

[50] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 238.

où on trouve l'expression في الطول, «en longueur». Il est vrai que, sans ce terme, le texte est correct, mais μήκει ajoute un sens supplémentaire, à savoir que le rapport entre longueurs est un rapport rationnel. Autant de raisons pour ne pas le supprimer et laisser le texte tel qu'il est.

3.3.2.5. Dans G on a la locution suivante : ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη [51], «puisque l'angle ΖΕΓ égal au tiers d'un angle droit a été divisé en deux moitiés quatre fois, l'angle ΛΕΓ est la 48e partie de l'angle droit».

Dans A on lit : «Puisque l'angle ΖΕΓ est égal à un tiers d'un angle droit, il s'ensuit que l'angle ΛΕΓ est une partie de quarante-huit parties d'un angle droit.» Il manque donc à A la locution τέτμηται τετράκις δίχα, «a été divisé quatre fois en deux parties». Cette locution est également absente du commentaire d'Eutocius.

3.3.2.6. On lit dans G : Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ [52], «puisque l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à ΗΑΓ. De plus l'angle droit ΑΗΓ est commun, par conséquent le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ.»

Voici la traduction du paragraphe correspondant dans A : «Puisque l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ (et que l'angle ΒΑΓ a été partagé en deux moitiés par la droite ΑΗ), il faut que l'angle ΗΓΒ soit égal à l'angle ΗΑΓ. Or l'angle ΑΗΓ est commun, les angles du triangle ΑΗΓ sont donc égaux aux angles du triangle ΗΓΖ.»

Notons que la locution entre parenthèses manque à G. Par ailleurs, les deux rédactions ne sont pas identiques. Partant de la rédaction grecque, Eutocius a été obligé d'expliquer pour conclure la similitude de deux triangles, implicite dans G [53].

On peut conclure de la comparaison précédente que la traduction dans A est celle d'un manuscrit grec différent de ceux qui sont à l'origine de l'édition de Heiberg, plus complet et moins défectueux, et aussi plus ancien.

3.3.3. Remarques.

3.3.3.1. Dans la démonstration de la première partie, on procède par des divisions successives en moitiés de l'angle CEG $= \frac{1}{2}$ droit, pour pou-

[51] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 238.
[52] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 1, p. 240.
[53] *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. 3, p. 238, l. 1-8.

voir former une figure rectiligne multiangle – i. e. un polygone régulier circonscrit au cercle. On a ainsi commencé par former un hexagone, puis un dodécagone, et ainsi de suite jusqu'à un polygone régulier à 96 côtés – p_{96}. Comme on a supposé $\mathrm{EG} = 2r = 306$ et $\mathrm{GC} = \frac{1}{2}\mathrm{EG} = 153$, le choix de ces valeurs, comme de celles de 1560, 780 dans la seconde partie, est parce que $\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GC}} = 2$ et $\mathrm{EC}^2 = 3\mathrm{CG}^2$.

Si on pose $\mathrm{CG} = a$, on a $\mathrm{EC}^2 = 3a^2$ et $\mathrm{EC} = a\sqrt{3}$. Il est possible que a ait été choisi pour que le nombre $3a^2$ soit voisin d'un nombre entier. Si en effet $a = 153$, on a $a^2 = 23409$ et $3a^2 = 70227$; le nombre $3a^2$ est très voisin de $70225 = 265^2$. L'erreur faite si on prend $a\sqrt{3} = 265$ est négligeable. Si $a = 780$, on a $a^2 = 608400$, nombre très voisin de $1825201 = 1351^2$, l'erreur faite si on prend $a\sqrt{3} = 1351$ est négligeable.

Les autres calculs exigent encore des calculs de racines carrées. Les erreurs relatives que l'on commet en donnant la valeur approchée d'une racine à une unité près, ou à $\frac{1}{4}$ près, ou à $\frac{1}{8}$ près, sont d'autant plus petites que le nombre dont on extrait la racine est plus grand.

3.3.3.2. L'encadrement obtenu est d'amplitude $\frac{1}{7} - \frac{10}{71} = \frac{1}{497} \approx \frac{1}{500}$. La moyenne des deux bornes est $\left(3 + \frac{10}{71} + \frac{1}{7}\right) = \left(3 + \frac{141}{994}\right) \approx \left(3 + \frac{141}{1000}\right)$. Elle donne une valeur approchée de π avec une bonne approximation.

4. ÉDITION ET TRADUCTION

Au nom de Dieu clément et miséricordieux A 2v
B 98v

Livre d'Archimède sur la mesure du cercle

– 1 – Tout cercle est équivalent au triangle rectangle dont l'un des deux côtés qui entourent l'angle droit est égal au demi-diamètre du cercle et dont l'autre est égal au périmètre du cercle.

Que le cercle ABCD soit équivalent au triangle E, selon ce que nous avons posé précédemment dans l'énoncé.

Je dis que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle.

S'il n'en est pas ainsi, alors le cercle est ou bien plus grand ou bien plus petit que lui [1]. Qu'il soit d'abord plus grand que lui. Inscrivons dans le cercle le carré AC. *Alors il se sépare du cercle ABCD ⟨une partie⟩ plus grande que sa moitié, soit le carré AC*. Partageons l'arc APB en deux moitiés et les arcs homologues toujours en deux moitiés au point P et aux points homologues de celui-ci, et joignons AP, PB et leurs homologues. Ainsi, il se sépare également du reste, des portions du cercle ABCD, ⟨des parties⟩ plus grandes que sa moitié, soit APB et ses homologues. Si nous poursuivons en procédant ainsi, il restera des portions qui sont inférieures à la grandeur de l'excédent du cercle sur le triangle E. La figure rectiligne polygonale inscrite dans le cercle est alors plus grande que le triangle. Posons N le centre du cercle et menons la perpendiculaire NX. La droite NX sera alors plus petite que l'un des côtés du triangle qui entourent l'angle droit [2] et le périmètre du polygone est plus petit que le côté qui reste, car il est également plus petit que le périmètre du cercle. *Mais ce qui résulte du produit de l'un des deux côtés du triangle qui entourent l'angle droit par l'autre, c'est-à-dire le double de l'aire du triangle, est plus grand que le produit obtenu de NX par le périmètre du polygone, | c'est-à-dire le double de l'aire du polygone. Les moitiés de ceux-* A 3r *ci le sont également*. Le triangle est donc supérieur au polygone ; or il lui était inférieur, ce qui est absurde et ne se peut pas.

De même, que le cercle soit inférieur au triangle E, si ceci est possible.

Circonscrivons au cercle un carré, soit le carré OQ. *Alors il se sépare du carré OQ ⟨une partie⟩ plus grande que sa moitié, c'est-à-dire le cercle*.

[1] En italique : absent du texte grec.

[2] L'angle droit du triangle E.

بسم اللّه الرحمن الرحيم ا ٢ظ
ب ٩٨ظ

رب يسر ولا تعسر

كتاب أرشميدس في مساحة الدائرة

– آ – كلّ دائرة فإنّها مساوية للمثلث القائم الزاوية الذي أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة مساوٍ لنصف قطر الدائرة والضلع الآخر منهما مساوٍ للخط المحيط بالدائرة.

فلتكن دائرة ا ب جـ د قد ساوت مثلث ه في الأشياء التي ذكرناها آنفًا في الخبر.

فأقول: إنّ مساحاتها مساوية لمساحاته.

فإنْ لم يكن كذلك، فإنّ الدائرة أعظم أو أصغر منه. فلتكن أولاً أعظم منه. ونعمل في الدائرة مربّع ا جـ. فقد انفصل من دائرة ا ب جـ د أعظم من نصفها، وهو مربع ا جـ. ونقطع قوس ا ف ب بنصفين ونظائرها من القسي بنصفين نصفين على نقطة ف ونظائرها من النقط، ونصل ا ف ف ب ونظائرها. فقد انفصل أيضًا من بقية قطع دائرة ا ب جـ د أعظم من نصفها – وهو ا ف ب – ونظائره. فإذا فعلنا ذلك على ما يتلو، فسوف تبقى قطع هي أصغر من مقدار زيادة الدائرة على مثلّث ه. فالشكل حينئذٍ المستقيم الخطوط الكثير الزوايا الذي تحيط به الدائرة هو أعظم من المثلّث. ونجعل مركز الدائرة ن، ونخرج عمود ن ش. فخطّ ن ش أقلّ من أحد ضلعي المثلّث المحيطين بالزاوية القائمة، ومحيط الشكل الكثير الزوايا أقلّ من الضلع الباقي منهما، لأنّه أيضًا أقلّ من الخطّ المحيط بالدائرة. والذي يكون من ضرب أحد ضلعي المثلّث المحيطين بالزاوية القائمة في الآخر، وهو ضعف ‹تكسير› المثلّث، أكثر من المجتمع من ضرب ن ش في محيط الكثير | الزوايا، وهو ضعف تكسير الكثير الزوايا. وأنصاف ذلك أيضًا كذلك. فالمثلّث أعظم من الكثير الزوايا، وقد كان أصغر منه، هذا خلف لا يمكن. ا ٣و

ولتكن أيضًا الدائرة أصغر من مثلث ه، إن كان يمكن ذلك.

ونخطّ عليها مربّعًا يحيط بها، وهو مربّع ع ق. فقد انفصل من مربّع ع ق أكثر من

١ بسم اللّه الرحمن الرحيم: ناقصة [ب]، كتب ناسخ [ا] بعدها "رب يسّر ولا تعسّر". ٤ آ: ١ [ب].
٦ ذكرناها: ذكرنا [ا]. ٨ منه: ناقصة [ب]. ٨ فلتكن: فليكن [ب]. ١٠ بنصفين: ناقصة [ا].
١٠ ونظائرها: في نظائرها [ب]. ١٠ نصفين: ناقصة [ب]. ١١ ف ب: و ب [ب]. ١٢ ونظائره: ونظائرها [ب]. ١٢ ذلك: كذلك [ا] ١٣ يتلو: يتلو [ا، ب]. ١٨ وهو: هو [ب]. ٢٠ الكثير: كثير [ب] وهو أفصح. ٢٢ مربّعًا ... وهو: ناقصة [ب].

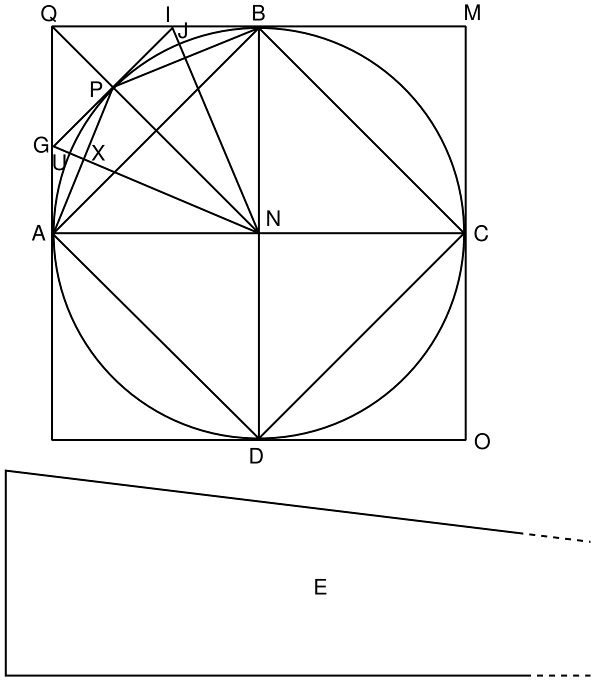
Partageons l'arc BA en deux moitiés au ⟨point⟩ P | et les arcs homologues toujours en deux moitiés. Qu'il passe par les points de division des droites tangentes au cercle, la droite GI se partage alors en deux moitiés au point P et la droite NQ est perpendiculaire à GI, il en est de même pour les droites qui leur [3] sont homologues. Puisque QG et QI ⟨réunies⟩ sont supérieures à IG, leurs moitiés sont supérieures à sa moitié. La droite QI est donc supérieure à IP, qui est égale à IB. *Le triangle QPI est donc supérieur à la moitié du triangle QPB, il le sera encore davantage à la moitié de la figure QPJB entourée par les deux droites BQ et QP et l'arc BJP. De même, le triangle QPG sera supérieur à la moitié de PUAQ,* donc IQG tout entier est supérieur à la moitié de la figure AUPJBQ. *De même, les triangles qui lui sont homologues sont plus grands que la moitié des homologues de l'autre portion. Si nous poursuivons en procédant ainsi,* il restera des portions extérieures au cercle et dont la somme est inférieure à l'excédent du triangle E sur le cercle ABCD. Qu'il reste la portion PGA et les portions qui lui sont homologues. La figure rectiligne circonscrite au cercle est alors inférieure au triangle E, ceci n'est pas possible car elle lui est supérieure. En effet, NA est égale à la hauteur du triangle et le périmètre du polygone est supérieur à l'autre côté du triangle, qui entoure l'angle droit, car il est supérieur au périmètre du cercle. *Le résultat du produit de AN par le périmètre du polygone | est supérieur au produit de l'un des deux côtés du triangle qui entourent l'angle droit par l'autre. Le cercle n'est donc pas inférieur au triangle E. Mais on a montré précédemment qu'il ne lui est pas supérieur.* Le cercle ABCD est donc | équivalent au triangle E.

B 99r A 3v B 99v

[3] Les homologues de GI et NQ. Dans le texte : «qui lui sont homologues».

نصفه وهو الدائرة، ونقسم قوس ب ا بنصفين على ف | ونظائرها من القسي بنصفين ب ٩٩و
نصفين. ولتمرّ بنقط الأقسام خطوط مماسّة للدائرة، فخطّ ز ط قد انقسم بنصفين على نقطة ف، وخطّ ن ق عمود على ز ط، وكذلك أيضًا نظائره من الخطوط. ولأنّ ق ز وق ط أعظم من ط ز، يكون نصفهما أعظم من نصفه. فخطّ ق ط أعظم من ط ف الذي هو مثل ط ب. فمثلّث ق ف ط أعظم من نصف مثلّث ق ف ب، وبأكثر من ذلك يكون أعظم من نصف شكل ق ف ي ب الذي يحيط به خطّا ب ق ق ف وقوس ب ي ف. وكذلك يكون مثلّث ق ف ز أعظم من ‹نصف› ف ص ا ق، فجميع ط ق ز أعظم من نصف شكل ا ص ف ي ب ق. وكذلك تكون نظائره من المثلّثات أكثر من النصف من نظائر القطع الأخر. فإذا فعلنا ذلك فيما يتلو، فستبقى قطعٌ تفضل على الدائرة، وتكون إذا اجتمعت أقل من زيادة مثلّث ه على دائرة ا ب جـ د. فلتبق قطعة ف ز ا ونظائرها من القطع. فالشكل – حينئذٍ – المستقيم الخطوط الذي يحيط بالدائرة أصغر من مثلّث ه، هذا غير ممكن، لأنّه أعظم منه. وذلك أنّ ن ا مساوٍ لعمود المثلّث، ومحيط الشكل الكثير الزوايا أعظم من ضلع المثلّث الآخر الذي يحيط بالزاوية القائمة لأنّه أعظم من الخطّ المحيط بالدائرة. والذي يكون من ضرب ا ن في محيط
الكثير الزوايا | أعظم من ضرب أحد ضلعي المثلّث – المحيطين بالزاوية القائمة – في ا ٣١ظ
الآخر. فليست الدائرة بأصغر من مثلّث ه. وقد تبيّن فيما تقدّم أنّها ليست بأعظم منه.
فدائرة ا ب جـ د إذًا | مساوية لمثلّث ه. ب ٩٩ظ

٣ أيضًا: ناقصة [ا]. ٤ نصفهما: نصفها [ب]. ٦ نصف: ناقصة [ب]. ٦ ق ف ي ب: ق ط ي ب [ب]. ٦ ب ق ق ف: ب ط ط ف [ب]. ٧ ف ص ا ق: فصار [ا]، ف ص ا ز [ب]. ٨ ط ق ز: ط ف ف ز [ب]. ٨ ا ص ف ي ب ق: ا ص ف ب ي ق [ب]. ٨ نظائره من: مكررة [ب]. ٨ المثلّثات: المثلث [ب]. ٩ ذلك: كذلك [ا]. ٩ يتلو: يتلوا [ا، ب]. ١٠ اجتمعت: جمعت [ب]. ١٠ فلتبق: فليبقى [ب]. ١٢ ن ا: ز ا [ب]. ١٤ والذي: الذي [ب]. ١٤ محيط: محيط الدائرة [ب]. ١٦ بأصغر: اصغر [ب]. ١٦ تبيّن: يتبين [ب].

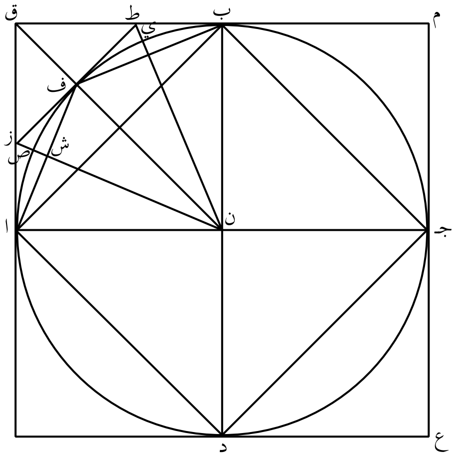


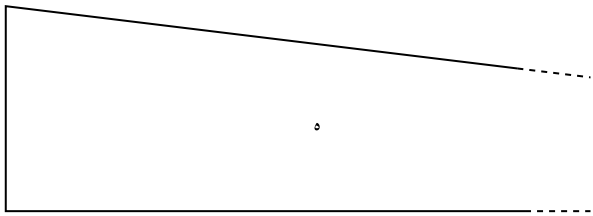
De même l'aire du triangle E est égale au résultat du produit de sa hauteur par la moitié de sa base. Mais sa hauteur est égale au demi-diamètre du cercle ABCD et sa base est égale au périmètre du cercle ABCD. Le résultat du produit du demi-diamètre par la moitié du périmètre du cercle ABCD est donc égal à l'aire du triangle E. Ce qu'il fallait démontrer.

C'est pourquoi, le produit du demi-diamètre par la moitié d'une portion du périmètre est l'aire de la figure entourée par cette portion et par les deux droites menées des deux extrémités de la portion au centre.

| – 2 – Le rapport de l'aire de tout cercle au carré de son diamètre est égal au rapport de onze à quatorze. A 4[r]

Soit la droite AB le diamètre du cercle, que l'on circonscrive au cercle le carré CH. Soit DC la moitié de la droite DE et soit la droite EG un septième de CD. Puisque le rapport du triangle ACE au triangle ACD est égal au rapport de vingt et un à sept et que le rapport de ACD à AEG est égal au rapport de sept à un, le rapport du triangle ACG au





وأيضًا، فإنّ مساحة مثلّث ه مساوية للذي يكون من ضرب عموده في نصف قاعدته. وعموده مساوٍ لنصف قطر دائرة ا ب جـ د، وقاعدته مساوية لمحيط دائرة ا ب جـ د. فالذي يكون من ضرب نصف القطر في نصف الخطّ المحيط بدائرة ا ب جـ د مساوٍ لتكسير مثلّث ه. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ومن أجل ذلك، يكون ضرب نصف القطر في نصف قطعة من المحيط هو تكسير الشكل الذي تحيط به تلك القطعة والخطّان المخرجان من طرفي القطعة إلى المركز.

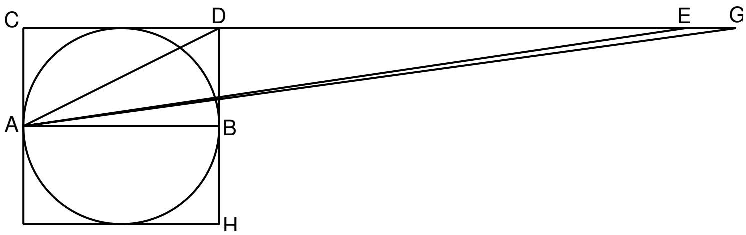
| – ب – نسبة تكسير كل دائرة إلى مربّع قطرها كنسبة الأحد عشر إلى الأربعة عشر. ١٤و

فليكن خطّ ا ب قطر الدائرة، وليعمل عليها مربّع جـ ح. وليكن د جـ نصف خطّ د ه، وليكن خطّ ه ز سبع جـ د. ولأنّ نسبة مثلّث ا جـ ه إلى مثلّث ا جـ د كنسبة الأحد والعشرين إلى السبعة، ونسبة ا جـ د إلى ا ه ز كنسبة السبعة إلى الواحد، فلذلك

[٢] ا ب جـ د: ا ب جـ [ا]. [٢] مساوية: لمساوية [ب]. [٢] ا ب جـ د: ا ب جـ [ا]. [٣] ا ب جـ د: ا ب جـ [ا]. [٦] والخطّان المخرجان: والخطين المخرجين [ب]. [٦] المركز: أضافها بعدا "وذلك ما أردنا أن نبين" [ب]. [٧] ب: ٢ [ب]. [٨] عليها: عليه [ا، ب]. [٩] ولأنّ: فلأن [ب]. [١٠] ا ه ز: ه ز [ب].

triangle ACD sera égal au rapport de vingt-deux à sept. Mais le carré CH est le quadruple du triangle ADC et le triangle ACG est égal au cercle AB, puisque la perpendiculaire AC est égale à la droite menée du centre de ce cercle à son périmètre et que la base CG est égale au périmètre, le périmètre du cercle étant supérieur au triple de son diamètre d'un septième du diamètre approximativement [4].

Il est donc clair d'après ce que nous avons dit que le rapport du cercle AB au carré CH est égal au rapport de onze à quatorze. Ce qu'il fallait démontrer.



– 3 – Pour tout cercle, le périmètre excède le triple de son diamètre de moins d'un septième de diamètre et de plus de dix parties de soixante et onze parties du diamètre.

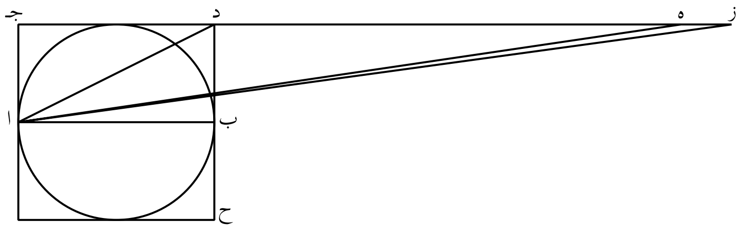
Soit | AC un diamètre d'un cercle, E son centre, la droite DG une tangente au cercle et l'angle GEC un tiers d'un angle | droit. Le rapport de EG à GC est donc égal au rapport de trois cent six à cent cinquante-trois et le rapport de EC à GC est supérieur au rapport de deux cent soixante-cinq à cent cinquante-trois. Partageons l'angle GEC en deux moitiés par la droite EH, le rapport de GE à EC est donc égal au rapport de GH à HC, le rapport de la somme de GE et EC à GC est alors égal au rapport de EC à CH, le rapport de CE à CH sera alors supérieur au rapport de cinq cent soixante et onze à cent cinquante-trois. Le rapport de EH en puissance à CH en puissance est donc supérieur [5] au rapport de trois cent quarante-neuf mille quatre cent cinquante à vingt-trois mille quatre cent neuf. Quant à son rapport à celui-ci en longueur, il est supérieur au rapport

A 4^v
B 100^r

[4] Résultat qui est établi dans la proposition 3.
[5] Littéralement : égal.

تصير نسبة مثلّث ا جـ ز إلى مثلّث ا جـ د كنسبة الاثنين والعشرين إلى السبعة. ولكن مربّع جـ ح أربعة أضعاف ‹مثلّث› ا د جـ، ومثلّث ا جـ ز مساوٍ لدائرة ا ب لأنّ عمود ا جـ مساوٍ للخطّ الذي يخرج من مركز هذه الدائرة إلى الخطّ المحيط بها وقاعدة جـ ز مساويةٌ للخطّ المحيط بها، لأنّ الخطّ المحيط بالدائرة أكثر من ثلاثة أضعاف قطرها بسبع القطر بالتقريب.

فقد وضح ممّا قلنا أن نسبة دائرة ا ب إلى مربع جـ ح كنسبة الأحد عشر إلى الأربعة عشر. وذلك ما أردنا أن نبيّن.



– جـ – كل خطّ محيط بدائرة فإنّه زائد على ثلاثة أضعاف قطرها بأقلّ من سبع القطر وأكثر من عشرة أجزاء من أحد وسبعين جزءًا من القطر.

فليكن | ا جـ قطر دائرة ومركزها ه وخطّ د ز مماسًا للدائرة وزاوية ز ه جـ ثلث زاوية | قائمة، فنسبة ه ز إلى ز جـ كنسبة الثلاثمائة والستة إلى المائة والثلاثة والخمسين، ونسبة ه جـ إلى ز جـ أعظم من نسبة المائتين والخمسة والستين إلى المائة والثلاثة والخمسين. ونقسم زاوية ز ه جـ بنصفين بخط ه ح، فنسبة ز ه إلى ه جـ كنسبة ز ح إلى جـ ح، فنسبة ز ه وه جـ مجموعين إلى ز جـ كنسبة ه جـ إلى جـ ح، فتصير نسبة جـ ه إلى جـ ح أعظم من نسبة الخمسمائة والأحد والسبعين إلى المائة والثلاثة والخمسين. فنسبة ه ح في القوة إلى جـ ح في القوة كنسبة ‹الثلاثمائة والأربعين و› التسعة الآلاف والأربعمائة والخمسين إلى الثلاثة ‹والعشرين› الألف والأربعمائة والتسعة. فأمّا نسبته إليه في الطول فأعظم من

ا ١٤ظ
ب ١٠٠و

٣-٤ وقاعدة ... بها: ناقصة [ب]. ٤ أضعاف: أمثال [ب]. ٥ بسبع: وسبع [ب]. ٦ نسبة: أثبتها في الهامش [ب]. ٨ جـ: ٣ [ب]. ٩ وأكثر: وبأكثر [ب]. ١٠ د ز: ه ز [ب]. ١٠ مماسًا: مماس [ب]. ١٣ ه ح: ج ه [ب]. ١٣ كنسبة: كتب فوقها "لا" [ا]. ١٣ جـ ح: ح جـ [ا]. ١٥ والسبعين: والتسعين [ب]. ١٦ جـ ح: ح جـ [ا]. ١٦ الآلاف: الاف [ا]، الالف [ب]، في كل النص، فلن نشير إليها فيما بعد. ١٧ والتسعة: كتب فوقها "الى" [ا].

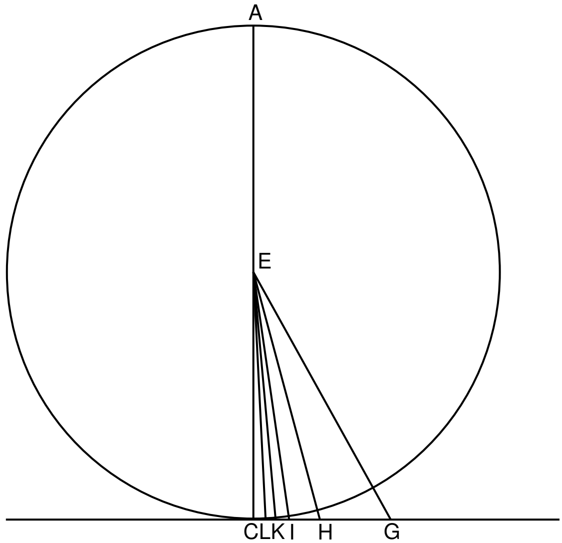
de cinq cent quatre-vingt-onze et un huitième à cent cinquante-trois. Partageons de même en deux moitiés l'angle HEC par la droite EI. Pour les mêmes raisons que nous avons évoquées, on montre que le rapport de EC à CI est supérieur au rapport de mille cent soixante-deux plus un huitième à cent cinquante-trois ; le rapport de IE à IC est donc supérieur au rapport de mille cent soixante-douze plus un huitième à cent cinquante-trois. De même, partageons l'angle IEC en deux moitiés par la droite EK ; le rapport de EC à CK est donc supérieur au rapport de deux mille trois cent trente-quatre plus un quart à cent cinquante-trois, *donc le rapport de EK à CK est supérieur au rapport de deux mille trois cent trente-neuf plus un quart à cent cinquante-trois.* De même, partageons l'angle KEC en deux moitiés par la droite LE, donc le rapport de EC à CL en longueur | est supérieur au rapport de quatre mille six A 5^{r}
cent soixante-treize et un demi à cent cinquante-trois. Puisque l'angle GEC est égal à un tiers d'un angle droit, il s'ensuit que l'angle LEC est une partie de quarante-huit parties d'un angle droit. Construisons au point E un angle égal à l'angle LEC, soit l'angle CEM ; l'angle LEM est donc une partie de vingt-quatre parties d'un angle droit, la droite LM est donc le côté du polygone circonscrit au cercle et qui a quatre-vingt-seize angles égaux. Puisque nous avons montré que le rapport de EC à CL est supérieur au rapport de quatre mille six cent soixante-treize et un demi à cent cinquante-trois, que le double de EC est la droite AC et que le double de CL | est la droite LM, il s'ensuit nécessairement que le rap- B 100^{v}
port de AC au périmètre du polygone ayant quatre-vingt-seize angles est supérieur au rapport de quatre mille six cent soixante-treize et un demi à quatorze mille six cent quatre-vingt-huit, et celui-ci est plus grand que le triple [6] ⟨du premier⟩ de six cent soixante-sept et un demi, dont le rapport à quatre mille six cent soixante-treize et un demi est inférieur à un septième. Il faut donc que le polygone [7] circonscrit au cercle | soit supé- A 5^{v}
rieur au triple de son diamètre de moins d'un septième du diamètre. À plus forte raison le périmètre du cercle est moindre que le triple de son diamètre plus son septième.

[6] Littéralement : de son triple.

[7] Sous-entendu, le périmètre de la figure.

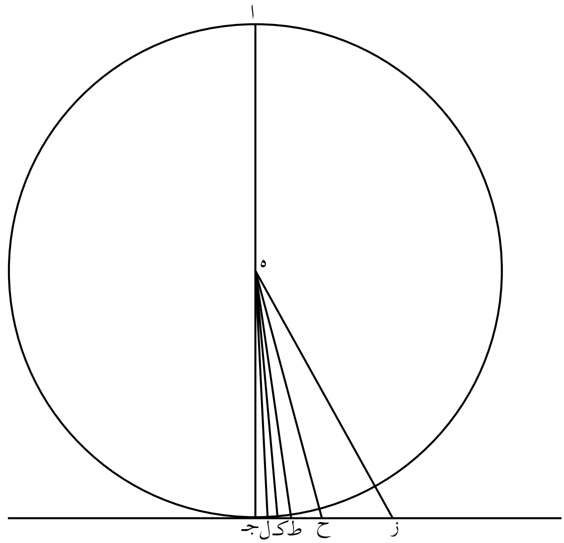
نسبة الخمسمائة والأحد والتسعين ‹وثمن› إلى المائة والثلاثة والخمسين. وأيضًا فلنقسم زاوية ح ه جـ بنصفين بخطّ ه ط. فبمثل ما قلنا يتبيّن أن نسبة ه جـ إلى جـ ط أعظم من نسبة الألف والمائة والاثنين والستين والثمن إلى المائة والثلاثة والخمسين، فنسبة ط ه إلى ط جـ أعظم من نسبة الألف والمائة والاثنين والسبعين والثمن إلى المائة والثلاثة والخمسين. وأيضًا فلنقسم زاوية ط ه جـ بنصفين بخط ه ک، فنسبة ه جـ إلى جـ ک أعظم من نسبة الألفين والثلاثمائة والأربعة والثلاثين والربع إلى المائة والثلاثة والخمسين، فنسبة ه ک إلى جـ ک أعظم من نسبة الألفين والثلاثمائة والتسعة والثلاثين والربع إلى المائة والثلاثة والخمسين. وأيضًا فلنقسم زاوية ک ه جـ بنصفين بخط ل ه، فنسبة ه جـ إلى جـ ل في الطول | أعظم من نسبة الأربعة الآلاف والستمائة والثلاثة والسبعين والنصف ا ٥٠و إلى المائة والثلاثة والخمسين. ولأنّ زاوية ز ه جـ قد كانت ثلث زاوية قائمة ‹وقسمت أربع مرّات›، يجب أن تكون زاوية ل ه جـ جزءًا من ثمانية وأربعين جزءًا من زاوية قائمة. ونعمل على نقطة ه زاوية مساوية لزاوية ل ه جـ، وهي زاوية جـ ه م، فزاوية ل ه م هي جزء واحد من أربعة وعشرين جزءًا من زاوية قائمة، فخطّ ل م المستقيم هو ضلع الشكل الكثير الزوايا المحيط بالدائرة ذي الست والتسعين زاوية متساوية. ولأنّا قد كنّا بيّنا أنّ نسبة ه جـ إلى جـ ل أعظم من نسبة الأربعة الآلاف والستمائة والثلاثة والسبعين والنصف إلى المائة والثلاثة والخمسين، وضعف ه جـ خطّ ا جـ، وضعف جـ ل | خطّ ل م، يلزم ب ١٠٠ظ أن تكون نسبة ا جـ إلى محيط الشكل الكثير الزوايا ذي الستّ والتسعين زاوية أعظم من نسبة الأربعة الآلاف والستمائة والثلاثة والسبعين والنصف إلى الأربعة عشر ألفًا والستمائة والثمانية والثمانين، وذلك أكثر من ثلاثة أضعافه بستمائة وسبعة وستين ونصف التي نسبتها إلى الأربعة الآلاف والستمائة والثلاثة والسبعين والنصف أقلّ من السبع. فيجب أن يكون الشكل الكثير الزوايا المحيط بالدائرة | أكثر من ثلاثة أضعاف قطرها بأقل من سبع القطر. ا ٥٠ظ فما أكثر نقصان الخطّ المحيط بالدائرة من ثلاثة أضعاف قطرها وسبعه.

[١] المائة: الثلاثمائة [ب]. [٢] يتبيّن: تبين [ب]. [٤] ط ه: ه ط [ب]. [٤] والثمن: والربع [ا، ب]. [٥] جـ ک: ح ک [ب]. [٩] جـ ل: جـ ط [ب]. [١٠] ولأنّ: فلان [ب]. [١١] زاوية: ناقصة [ب]. [١٢] ل ه جـ: ا ه جـ [ب]. [١٣] جزء: جزء من [ب]. [١٤] الزوايا: الزوايا في [ب]. [١٤] الست: الستة [ب]. [١٤] زاوية متساوية: الزاوية المتساوية [ب]. [١٤] قد كنّا: كنا قد [ب]. [١٧] زاوية: الزاوية [ب]. [١٨] ألفًا: الف [ا]، الألف [ب]. [١٩] أضعافه: امثال [ب].



Soit un cercle de diamètre AC, l'angle BAC un tiers d'un angle droit. Le rapport de AB à BC est alors inférieur au rapport de mille trois cent cinquante et un à sept cent quatre-vingts. Quant au rapport de AC à CB, il est égal au rapport de mille cinq cent soixante à sept cent quatre-vingts, *car AC est le double de CB*.

Partageons l'angle BAC en deux moitiés par la droite AH, puisque l'angle BAH est égal à l'angle HCB et *que l'angle BAC a été partagé en deux moitiés par la droite AH*, il s'ensuit que l'angle HCB est égal à l'angle HAC. Or l'angle AHC est commun, les angles du triangle AHC sont donc égaux aux angles du triangle HCG. Le rapport de AH à HC est égal au rapport de CH à HG, est égal au rapport de AC à CG et est égal au rapport de la somme de CA et AB à BC. Donc le rapport de la somme de CA et AB à BC est égal au rapport de AH à HC. On montre à partir de cela que le rapport de AH à HC est inférieur au rapport de deux mille neuf cent onze à sept cent quatre-vingts et que le rapport de AC à CH est inférieur au rapport de trois mille treize plus un demi plus un quart



ولتكن دائرة على قطرها ا جـ وزاوية ب ا جـ ثلث قائمة، فنسبة ا ب إلى ب جـ أقلّ من نسبة الألف والثلاثمائة والأحد والخمسين إلى السبعمائة والثمانين. فأمّا نسبة ا جـ إلى جـ ب، فمثل نسبة الألف والخمسمائة والستين إلى السبعمائة والثمانين لأنّ ا جـ ضعف جـ ب.

ونقسم زاوية ب ا جـ بنصفين بخطّ ا ح، ولأنّ زاوية ب ا ح مساوية لزاوية ح جـ ب وزاوية ب ا جـ قد قسمت بنصفين بخطّ ا ح، يجب أن تكون زاوية ح جـ ب مساوية لزاوية ح ا جـ. وزاوية ا ح جـ مشتركة، فزوايا مثلّث ا ه جـ مساوية لزوايا مثلّث ح جـ ز. فنسبة ا ح إلى ح جـ كنسبة جـ ح إلى ح ز وكنسبة ا جـ إلى جـ ز وكنسبة جـ ا ا ب جميعًا إلى ب جـ. فنسبة جـ ا ا ب جميعًا إلى ب جـ كنسبة ا ح إلى ح جـ. ومن ذلك يتبيّن أنّ نسبة ا ح إلى ح جـ أقلّ من نسبة الألفين والتسعمائة والأحد عشر إلى السبعمائة والثمانين، وأنّ نسبة ا جـ إلى جـ ح أقلّ من نسبة الثلاثة الآلاف والثلاثة عشر والنصف

١ ولتكن: كتب قبلها "د" [ا]. ٢ والثلاثمائة: والمائة [ب]. ٥ ا ح: ا جـ [ب]. ٥ ولأنّ: فلان [ب]. ٥ ح جـ ب: جـ ه ب [ب]. ٦ ب ا جـ: ب ا ح [ب]. ٦ ح جـ ب: جـ ح ب [ب]. ٨ ح جـ: جـ ح [ب]. ٨ ح ز: حـ ر [ب]. ٨ وكنسبة: كنسبة [ب]. ٨ جـ ا ا ب: ا ب ح ا [ب]. ٩ فنسبة: ونسبة [ا، ب]. ٩ ب جـ: ب ح [ب]. ١٠ يتبيّن: تبين [ب]. ١٠ والتسعمائة: والسبعمائة [ب]. ١١ إلى: ناقصة [ب].

à sept cent quatre-vingts. Partageons l'angle CAH en deux moitiés par la droite AI, il est alors clair, d'après ce que nous avons évoqué, que le rapport de AI à IC est inférieur au rapport de cinq mille neuf cent vingt-quatre | plus un demi plus un quart à sept cent quatre-vingts, ce qui B 101r est égal au rapport de mille huit cent vingt-trois à deux cent quarante, car le rapport de chacun des deux premiers nombres à son homologue des deux derniers nombres est égal au rapport de trois plus un quart à l'unité ; le rapport | de AC à CI sera inférieur au rapport de mille huit A 6r cent trente-huit plus neuf parties de onze parties de l'unité à deux cent quarante. Partageons de même l'angle IAC en deux moitiés par la droite AK. Le rapport de AK à KC est donc inférieur au rapport *de trois mille six cent soixante et un plus neuf parties de onze parties de l'unité à deux cent quarante, ce qui est égal au rapport* de mille sept à soixante-six car le rapport de chacun des deux premiers nombres à son homologue des deux derniers nombres est égal au rapport de quarante à onze. Le rapport de AC à KC est donc inférieur[8] au rapport de mille neuf plus un sixième à soixante-six. Partageons de même l'angle KAC en deux moitiés par la droite LA. Le rapport de AL à LC est donc inférieur au rapport de deux mille seize plus un sixième à soixante-six, donc le rapport de AC à CL est inférieur au rapport de deux mille dix-sept plus un quart à soixante-six. Si nous inversons, le rapport du périmètre du polygone – dont chacun des côtés est égal à la droite CL – au diamètre sera supérieur au rapport de six mille trois cent trente-six à deux mille dix-sept plus un quart. Mais les six mille trois cent trente-six sont supérieurs au triple de deux mille dix-sept plus un quart de plus de dix parties de soixante et onze parties de deux mille dix-sept plus un quart d'unité.

Le périmètre du polygone ayant quatre-vingt-seize angles, inscrit dans le cercle, excède le triple de son diamètre de plus de dix parties de soixante et onze parties ⟨de ce diamètre⟩. Le périmètre du cercle | A 6v est donc supérieur au triple de son diamètre de plus de dix parties de

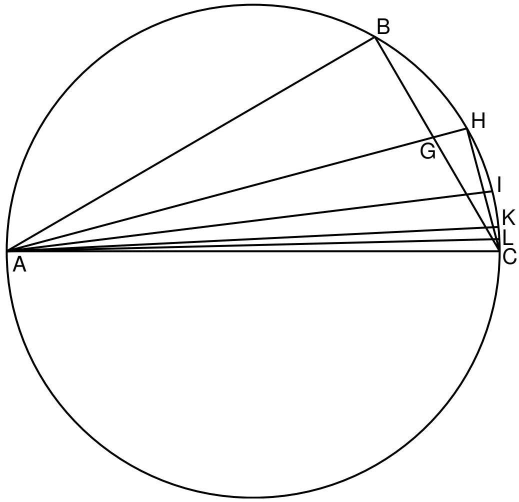
[8] Littéralement : égal.

والربع إلى السبعمائة والثمانين. فلنقسم زاوية جـ ا ح بنصفين بخط ا ط، فيتبيّن ممّا قلنا أن نسبة ا ط إلى ط جـ أقلّ من نسبة الخمسة الآلاف والتسعمائة والأربعة والعشرين | ب ١٠١و النصف والربع إلى السبعمائة والثمانين، وذلك كنسبة الألف والثمانمائة والثلاثة والعشرين إلى المائتين والأربعين، لأنّ نسبة كلّ واحد من العددين الأولين إلى نظيره من العددين الآخرين كنسبة الثلاثة والربع إلى الواحد. فتصير نسبة | ا ٦١و ا جـ إلى جـ ط أقلّ من نسبة الألف والثمانمائة والثمانية والثلاثين والتسعة الأجزاء من الأحد عشر جزءًا من الواحد إلى المائتين والأربعين. وأيضًا فإنّا نقسم زاوية ط ا جـ بنصفين بخطّ ا ک. فنسبة ا ک إلى ک جـ أقلّ من نسبة الثلاثة الآلاف والستمائة والأحد والستين والتسعة الأجزاء من الأحد عشر جزءًا من الواحد إلى المائتين والأربعين، وذلك كنسبة الألف والسبعة إلى الستة والستين لأنّ نسبة كلّ واحد من العددين الأولين إلى نظيره من العددين الآخرين كنسبة الأربعين إلى الأحد عشر. فنسبة ا جـ إلى ک جـ كنسبة الألف والتسعة والسدس إلى الستة والستين. وأيضًا فلنقسم زاوية ک ا جـ بنصفين بخطّ ل ا، فنسبة ا ل إلى ل جـ أقلّ من نسبة الألفين والستة عشر والسدس إلى الستة والستين، فنسبة ا جـ إلى جـ ل أقلّ من نسبة الألفين والسبعة عشر والربع إلى الستة والستين. وإذا قلبنا، صارت نسبة محيط الشكل الكثير الزوايا الذي كلّ ضلع من أضلاعه مساوٍ لخطّ جـ ل إلى القطر أعظم من نسبة الستة الآلاف والثلاثمائة والستة والثلاثين إلى الألفين والسبعة عشر والربع. ولكن الستة الآلاف والثلاثمائة والستة والثلاثين هي أكثر من ثلاثة أضعاف الألفين والسبعة عشر والربع بأكثر من عشرة أجزاء من أحد وسبعين جزءًا من ‹الألفين وسبعة عشر والربع من› واحد.

فمحيط الشكل الكثير الزوايا ذي الستّ والتسعين زاوية الذي تحيط به الدائرة يزيد على ثلاثة أضعاف قطرها بأكثر من عشرة أجزاء من أحد وسبعين جزءًا، فيصير الخطّ المحيط بالدائرة | ا ٦١ظ أكثر من ثلاثة أضعاف قطرها بأكثر من عشرة أجزاء من أحد وسبعين

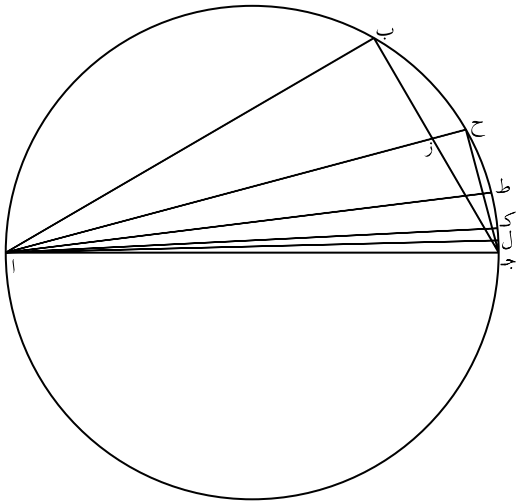
[١] فيتبيّن: فتبين [ب]. [١] ممّا: ما [ب]. [٢] إلى: ا [ب]. [٥] جـ ط: ح جـ [ب]. [٦] والتسعة: والسبعة [ب]. [٦] الأجزاء من: ناقصة [ب]. [٦] الأحد: أحد [ا]. [٨] والتسعة: والسبعة [ب]. [١١] والتسعة: والسبعة [ب]. [١٢] ل ا: ا ل [ب]. [١٢] ل جـ: ا جـ [ب]. [١٥] كلّ: جـ ل [ب]. [١٥] مساوٍ لخطّ جـ ل: ناقصة [ب]. [١٨] من: ناقصة [ب]. [١٩] واحد: ناقصة [ب]. [٢٠] الستّ: الستة [ب]. [٢٠] زاوية: الزاوية [ب]. [٢١.١٨٤-١.١٨٥] فيصير ... جزءًا: ناقصة [ب].

soixante et onze parties, son excédent à cette grandeur est supérieur à l'excédent de la somme des côtés du polygone. Donc le périmètre du cercle excède le triple de son diamètre de moins de son septième et de plus de dix parties de soixante et onze parties ⟨de ce diamètre⟩. Ce qu'il fallait démontrer.



Le livre d'Archimède sur la mesure du cercle est achevé.

جزءًا، وتكون زيادتها على هذا المقدار أكثر من زيادة أضلاع الشكل الكثير الزوايا، فالخطّ المحيط بالدائرة يزيد على ثلاثة أضعاف قطرها بأقلّ من سبعه وأكثر من عشرة أجزاء من أحد وسبعين جزءًا. وذلك ما أردنا أن نبيّن.



تمّ كتاب أرشميدس في مساحة الدائرة.

الحمد للّه وصلواته على خيرته من خلقه محمّد نبيّه وآله وصحبه وسلامه.

١ أضلاع: الأضلاع [ب]. ٤-٥ تمّ ... وسلامه: ناقصة [ب].