Arabic Sciences and Philosophy, 35 (2025) : 39-51 doi:10.1017/S0957423924000109

THÉORIE DES NOMBRES
DES PREUVES DATANT DU XIII^{e} SIÈCLE

SEIF EDDIN TOUMI
Faculté des sciences humaines et sociales de Tunis
Email : toumi.seif@yahoo.fr

FOUED NAFTI
Institut supérieur de l'éducation et de la formation continue, Université de Tunis
Email : foued.nafti@arabica.org

Résumé. Nous entendons dans cet article éditer, traduire et analyser un texte datant du XIII^{e} siècle dans lequel figurent des preuves arithmétiques de la proposition selon laquelle la somme des carrés de deux nombres impairs ne peut pas être un carré. Cette proposition avait déjà été démontrée par al-Ḫāzin au X^{e} siècle par le biais des propositions 3 et 5 du livre II et de la proposition 22 du livre IX des *Éléments* d'Euclide.

Abstract. In this paper, we intend to edit, translate and analyze a 13th-century text containing arithmetical proofs of the proposition that the sum of the squares of two odd numbers cannot be a square. This proposition had already been demonstrated by al-Ḫāzin in the 10th century through propositions 3 and 5 of Book II and proposition 22 of Book IX of Euclid's *Elements*.

1. INTRODUCTION

Le x^e^ siècle a connu de nombreux mathématiciens arabes[1]. L'objectif majeur était de donner de l'ampleur au projet inauguré par al-Ḫwārizmī[2] (780-850), éminemment développé par Abū Kāmil[3] (830-900), à la lumière des *Éléments* traduit en arabe par Al-Ḥağğāğ b. Maṭar[4] (786-833), en s'appuyant également sur la traduction établie en 870 par Qusṭā b. Lūqā des *Arithmétiques* de Diophante[5].

Des successeurs d'Abū Kāmil, notamment al-Karağī (950-1029) et al-Samawʾal (m. 1175), ont ainsi donné à l'algèbre un nouveau souffle qui a conduit, entre autres, au concept de polynôme[6]. Ils sont parallèlement parvenus à développer un chapitre entier sur l'analyse diophantienne rationnelle[7]. Tandis que d'autres, comme al-Ḫāzin (m. 971) et al-Ḫuğandī (940-1000), se sont penchés sur la recherche de solutions entières positives aux différentes équations débattues, instaurant ainsi toute une tradition : l'analyse diophantienne entière[8].

Notons aussi que mis à part l'expansion substantielle du champ lexical mathématique, grâce aux travaux de ces mathématiciens, de nouvelles techniques opératoires[9] ont manifestement émergé pendant cette

[1] Voir Franz Woepcke (éd.), *Extrait du Fakhrî : Traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî* (Paris : Imprimerie impériale, 1853) et Roshdi Rashed, *Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes* (Paris : Les Belles Lettres, 1984).

[2] Roshdi Rashed (éd.), *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre* (Paris : Albert Blanchard, 2007).

[3] Ce sont les dates proposées par Roshdi Rashed au lieu des dates 850-930 adoptées par Heinrich Suter, Louis Charles Karpinski, Josef Weinberg et Martin Levey. Pour plus de détail, voir Roshdi Rashed (éd.), *Abū Kāmil : Algèbre et analyse diophantienne* (De Gruyter, 2012), p. 5.

[4] Une première traduction fut dédiée à Yaḥyā b. Ḫālid al-Barmakī, vizir du calife abbaside Harūn al-Rašīd, et une seconde, révisée et rectifiée, fut dédiée à al-Maʾmūn. Cf. Ibn al-Nadīm, *Al-fihrist* [Le Caire, 1929], p. 371. Notons que cette œuvre fut traduite par la suite en latin au xii^e^ siècle.

[5] Al-Nadīm, *Al-fihrist*, p. 376.

[6] Al-Samawʾal, *Al-bāhir en algèbre d'as-Samawʾal*, éd., notes et introd. par Salah Ahmad et Roshdi Rashed (Presses de l'université de Damas, 1972).

[7] Roshdi Rashed, *Écrits d'histoire et de philosophie des sciences*, vol. 1, « Arithmétique, algèbre et théorie des nombres » (De Gruyter, 2023), p. 279.

[8] Roshdi Rashed, *The development of Arabic mathematics : Between arithmetic and algebra*, trad. A. F. W. Armstrong (Springer, 1994), p. 209.

[9] Cela est surtout visible dans les travaux d'al-Karağī sur les puissances de l'inconnue algébrique. Cf. *Al-faḫrī*, *in* Aḥmad Salīm Saᶜīdān (éd.), *Tārīḫ ᶜilm al-ğabr fī l-ᶜālam al-ᶜarabī* (Koweit, 1986) ; et aussi le chapitre d'*Al-badīᶜ* sur les radicaux, *in* Adel Anbouba (éd.), *L'algèbre Al-badīᶜ d'al-Karagī* (Beyrouth : Publications de l'Université libanaise, 1964).

époque ainsi qu'une mise en œuvre de preuves puisant à la fois aux *Éléments* et aux *Arithmétiques* et d'autres dans lesquelles la géométrie n'est plus centrale[10], signant ainsi un nouvel épisode qui s'ajoute à l'historiographie de la preuve mathématique[11].

Concentrons-nous sur l'analyse diophantienne entière. La quête de triangles rectangles à côtés entiers est un sujet de prédilection démarquant cet axe de recherche. Cette question est fortement liée à l'équation[12] :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Pour établir une condition nécessaire assurant l'existence d'un tel triplet, l'un des représentants de cette tradition, al-Ḫāzin, a énoncé et démontré la proposition qu'«il ne peut résulter de la somme de deux carrés impairs un carré», en s'appuyant explicitement et essentiellement sur les livres II et IX d'Euclide. Dans cette démonstration, les carrés des nombres ainsi que leurs côtés sont représentés par des segments de droites.

Ultérieurement, au XVI[e] siècle, la même problématique sera revisitée par al-Yazdī, l'auteur des «Fontaines de l'arithmétique» (*ᶜUyūn al-ḥisāb*). Néanmoins, en démontrant une version généralisée de la proposition déjà discutée par al-Ḫāzin, al-Yazdī[13] a plutôt adopté une approche équivalente à la notion de congruence, ne faisant aucun recours à la géométrie d'Euclide[14]. Relativement à la genèse des preuves dans ce champ des mathématiques, Rashed se posait la question suivante :

> Et c'est ici que se pose pour l'historien de l'analyse diophantienne l'une des questions les plus importantes, et dont il ne peut faire l'économie : quand et comment a-t-on commencé à procéder dans ce chapitre (théorie des nombres) à des démonstrations purement arithmétiques[15] ?

[10] Par exemple, dans le traité «Causes de l'algèbre» (*ᶜIlal al-ǧabr*) d'al-Karaǧī nous nous trouvons nettement devant un projet structuré et justifié sur la résolution des équations quadratiques sans recours à la géométrie. Foued Nafti, «Les causes de l'algèbre : Nouveautés et retombées», *in* Philippe Abgrall (dir.), *Histoire et philosophie des mathématiques en Méditerranée* (Presses universitaires de Provence, 2023), p. 85-98.

[11] Cf. Karine Chemla, *The history of mathematical proof in ancient traditions* (Cambridge University Press, 2012).

[12] Roshdi Rashed, «Al-Yazdī et l'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2$», *Historia scientiarum*, 4 (1994), p. 79-101.

[13] Nous ne connaissons pas grande chose sur la vie de Muḥammad al-Bāqir al-Yazdī, sauf qu'il fut algébriste, d'origine persane, et qu'il décéda vers l'an 1637.

[14] Cette preuve figure dans un court texte appartenant à al-Yazdī. Cf. Roshdi Rashed, «Al-Yazdī», p. 79-80.

[15] Roshdi Rashed, «Al-Yazdī», p. 80.

Plus précisément, les travaux de Rashed dévoilent déjà une preuve arithmétique au XVI^{e} siècle, appartenant à al-Yazdī, de l'équation plus générale[16] :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^2.$$

Nous nous interrogeons ici sur l'historiographie des preuves adoptant la même approche, pendant ce gouffre séparant les deux époques et qui s'étale sur une période de six siècles.

Comme nous allons le montrer, le débat à propos de cette proposition refait surface au XIII^{e} siècle, chez des arithméticiens qui cherchaient à la démontrer sans recours à la géométrie. L'épître que nous allons analyser offre des éléments quant à l'historicité de ce type de preuves.

Contenant deux preuves du théorème selon lequel « la somme de deux carrés impairs ne peut être un carré », cette épître nous enseigne qu'une tradition cherchant d'autres alternatives pour prouver en arithmétique, en opérant systématiquement en termes de congruence, sans aucun recours à la géométrie, est détectable chez des successeurs d'al-Ḫāzin et des prédécesseurs d'al-Yazdī, surtout si l'on est conscient du fait que « ces arguments, empruntés aux congruences, ne semblaient pas triviaux aux mathématiciens du XVII^{e} siècle, tout au moins à ceux qui travaillaient effectivement en théorie des nombres[17] ».

Si des mathématiciens comme al-Ṭūsī[18] (1201-1274), Ibn Yūnus[19] (1156-1242) ou al-Zanǧānī[20] (m. 1257) ont revisité ce sujet moyennant une approche utilisant la notion de divisibilité et les propriétés des nombres entiers[21], peut-être ne sont-ils pas les seuls. Certes, seule la

[16] Roshdi Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique : D'Abū Kāmil à Fermat* (De Gruyter, 2013), p. 125.

[17] Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*, p. 129.

[18] Naquit à Ṭūs vers 1201 et décéda vers 1274, à Bagdad. Il était l'élève de Kamāl al-Dīn b. Yūnus al-Mawṣilī. On lui doit plusieurs traités de mathématiques, et surtout la fondation de l'observatoire astronomique de Maragha, dont il commençait la construction en 1259.

[19] Plusieurs bibliographes l'ont cité : Ibn Abī Uṣaybiᶜa, *A literary history of medicine : The* ᶜUyūn al-anbāᵓ fī ṭabaqāt al-aṭibbāᵓ *of Ibn Abī Uṣaybiᶜah*, éd. E. Savage-Smith, S. Swain, G. J. van Gelder (Brill, 2020), ch. 10, § 83, vol. 3-2, p. 829-834; Ibn Ḫallikān, *Wafayāt al-aᶜyān wa-anbāᵓ abnāᵓ al-zamān* (Le Caire, 1892), vol. 1, p. 132; David Eugene Smith, *History of mathematics* (Boston : Ginn, 1923-1925), vol. 2, p. 673; Qadrī Ṭūqān, *Turāṯ al-ᶜArab al-ᶜilmī fi al-riyaḍiyyāt wa-al-falak* (Le Caire, 1941).

[20] Il s'agit de ᶜAbd al-Wahhāb b. Ibrāhīm b. Muḥammad al-Ǧurǧānī al-Zanǧānī al-Ḫazraǧī al-Šāfiᶜī. Il a vécu à Tabriz et à Mossoul et est décédé à Bagdad en l'an 1257.

[21] Nous verrons ceci plus tard dans notre texte.

découverte de textes méconnus serait susceptible de corroborer une telle hypothèse.

Dans le reste de notre travail, nous tâcherons de suivre de près les démonstrations figurant dans cette épître. Nous ferons allusion par la suite à la démonstration arithmétique proposée en Orient par al-Yazdī pour la confronter avec celle d'al-Ḫāzin ainsi qu'avec celle du XIII[e] siècle. Nous finirons par une édition critique et une traduction du manuscrit.

2. ANALYSE MATHÉMATIQUE

Comme nous venons de le mentionner, le théorème suivant figure dans un texte d'al-Ḫāzin : « La somme de deux carrés impairs ne peut être un carré. » Il se situe historiquement dans le cadre d'une tradition inaugurée au X[e] siècle par les successeurs d'al-Ḫwārizmī qui traitent de l'analyse diophantienne. Ce qui distingue les propos d'al-Ḫāzin, comparés à ceux de Diophante ou d'al-Karağī, par exemple[22], c'est le fait qu'il s'est focalisé sur l'analyse entière, précisément sur les triangles rectangles aux côtés entiers.

Dans son traité intitulé « Épître sur les triangles rectangles numériques[23] », sans le mentionner explicitement, il conçoit sa démonstration en se basant essentiellement sur trois propositions des *Éléments* d'Euclide. La première est la proposition 22 du livre IX : Toute somme paire de lignes impaires est toujours paire[24]. Quant à la deuxième, elle peut être traduite par la notion de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, à savoir la proposition 3 du livre II : $\mathrm{AB}\,(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}) = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AB}.\mathrm{BD}$, où $[\mathrm{AB}]$ est un segment et $\mathrm{D} \in [\mathrm{AB}]$. La troisième étant la proposition 5 du livre II dont l'énoncé est :

> Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite[25].

[22] Pour plus de détails sur ce sujet, voir Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*.

[23] Al-Ḫāzin, *Risāla fī al-muṯallaṯāt al-qāʾima al-zawāyā wa-al-manfaʿa minhā*, éd. Adel Anbouba *in* « Un traité d'Abū Jaʿfar al-Khāzin sur les triangles rectangles numériques », *Journal for the history of Arabic science*, 3 (1979), p. 134-178; le théorème est p. 175-176.

[24] Thomas L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* (New York : Dover, 1956), livre IX, vol. 2, p. 413-414.

[25] Cf. Euclide, *Les Éléments*, introd. générale par Maurice Caveing, trad. et commentaires par Bernard Vitrac (Paris : Presses universitaires de France, 1994), vol. 1, p. 333.

Al-Ḫāzin raisonne par l'absurde en supposant l'existence de deux carrés[26] impairs dont la somme est aussi un carré[27].

Nous allons dans ce qui suit exposer les preuves de ce même théorème proposées par al-Ṭūsī et Kamāl al-Dīn b. Yūnus, deux figures du XIIIe siècle.

2.1. Preuve de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī

Pour démontrer le même théorème, al-Ṭūsī commence d'abord par introduire deux lemmes. Il les démontre arithmétiquement en se basant sur ce que nous appelons aujourd'hui la congruence. Le premier concerne une propriété du carré d'un nombre entier et le deuxième concerne la différence des carrés de deux nombres impairs.

Selon le premier lemme, le carré d'un nombre ne peut pas être seulement pairement-impair[28]. En notations modernes, cela s'écrit ainsi :

LEMME 1. Si $m \in \mathbb{N}$, alors il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $m^2 = 2(2n+1)$.

Démonstration. Soit un carré pair $m^2 = p$, alors m est pair. Par conséquent, il existe un nombre $q \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2}m = q$. Ainsi, $q^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 = \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}p$. Et donc $p = 4q^2$. Ce qui entraîne que $p = m^2 \equiv 0[4]$, duquel nous déduisons que m^2 n'est pas de la forme $2(2n+1)$.

Le deuxième lemme affirme qu'aucun carré impair ne peut excéder un autre carré impair d'un nombre seulement pairement-impair. En notations modernes, cela s'écrit ainsi :

LEMME 2. Si a et b sont deux nombres impairs, alors il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ vérifiant l'égalité $a^2 - b^2 = 2(2p+1)$.

Démonstration. Soient a et b deux nombres impairs tels que $b < a$, alors il existe un nombre c pair tel que $a = b + c$ (la différence de deux

[26] Par carré, ici, il entend le carré linéaire, c'est-à-dire une ligne dont la longueur est le carré d'une autre.

[27] Voici une transcription en langage arithmétique moderne de la preuve d'al-Ḫāzin. Supposons l'existence de trois carrés a^2 , b^2 et c^2 vérifiant : a^2 et b^2 impairs et $a^2 + b^2 = c^2$. On a : $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = (c-b)(c-b+2b) = (c-b)^2 + 2b(c-b)$. Par conséquent : $a^2 - (c-b)^2 = 2b(c-b)$. Ce qui entraîne : $(a-(c-b))(a+(c-b)) = 2b\,(c-b)$. Or, c^2 est pair (somme de deux impairs) donc c est pair. Et comme b est impair (car b^2 l'est) donc $c-b$ est impair. Et comme a est impair (car a^2 l'est), donc $a+(c-b)$ est pair et $a-(c-b)$ aussi. Donc le produit de ces deux dernières expressions est pairement-pair. Par contre, le produit $b(c-b)$ est impair ainsi $2b(c-b)$ est pairement-impair. Ainsi, les deux produits $(a-(c-b))(a+(c-b))$ et $2b\,(c-b)$ ne peuvent pas être égaux.

[28] Texte original :
لا يمكن أن يكون عدد مربَّع زوج-الفرد فقط. وذلك لأنّ ضلع المربَّع الزوج يكون زوجًا، فله نصف. ومربَّع نصفه يكون رُبع مربَّعه وكلّ عددٍ له رُبع فهو ليس بزوج-الفرد فقط. فإذن، لا مربَّعًا هو زوج-الفرد فقط.

nombres impairs est un nombre pair), et on aura :

$$a^2 - b^2 = (b + c)^2 - b^2 = b^2 + c^2 + 2bc - b^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc,$$
$$a^2 - b^2 = c^2 + 2bc.$$

Comme le nombre c est pair, alors $c \equiv 0[2]$ et $c^2 \equiv 0[4]$ et aussi $2c \equiv 0[4]$. Par conséquent, $2bc \equiv 0[4]$. Il en résulte que : $a^2 - b^2 \equiv 0[4]$. Ainsi, la différence $a^2 - b^2$ ne peut pas être un nombre de la forme $2(2p + 1)$.

Théorème. La somme de deux carrés impairs ne peut pas être un carré.

Après celles des deux lemmes, al-Ṭūsī entreprend la démonstration, par l'absurde, du théorème principal. Il suppose que la somme de deux carrés impairs est le carré d'un nombre entier, puis il prouve que cela contredit le deuxième lemme. Il procède comme suit.

Démonstration. Si m et n sont deux nombres impairs vérifiant $m^2 + n^2 = c^2$, alors le nombre c est forcément pair (la somme de deux nombres impairs est paire et la racine carrée d'un carré pair est aussi paire) et comme $m^2 = c^2 - n^2$, alors si l'on pose $c = n + a$, on aura :

$$m^2 = c^2 - n^2 = (n + a)^2 - n^2 = n^2 + a^2 + 2na - n^2 = a^2 + 2na.$$

Par conséquent, $m^2 - a^2 = 2an$. Cela entraîne que la différence $m^2 - a^2$ est un nombre seulement pairement-impair (car a et n sont impairs donc leur produit l'est aussi), sachant que m et a sont impairs. Or, cela contredit la conclusion du deuxième lemme.

2.2. Preuve de Kamāl al-Dīn b. Yūnus et/ou al-Zanǧānī

Ibn Yūnus (et/ou al-Zanǧānī) aborde le sujet du même théorème, connu depuis al-Ḫāzin, par un lemme dans lequel il met en évidence une propriété de la différence de deux carrés pairs[29], dont l'énoncé est le suivant : «Pour tout couple de nombres pairs, le carré du plus grand excède le carré du plus petit d'un nombre pair dont la moitié est un nombre pair.» En notations modernes, cela se traduit ainsi :

Lemme 3. Si $a \equiv 0[2]$ et $b \equiv 0[2]$, alors $a^2 - b^2 \equiv 0[4]$.

Démonstration. Il commence par supposer que $a > b$ et que $a = b + c$.

[29] Remarquons qu'al-Ṭūsī mettait plutôt l'accent sur les nombres impairs.

Il en conclut que :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (b+c)^2 - b^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2bc - b^2 \\ &= c^2 + 2bc. \end{aligned}$$

Or, $c \equiv 0[2]$ (la différence de deux nombres pairs est un nombre pair) et donc $c^2 \equiv 0[4]$. De même, $2cb \equiv 0[4]$. Par conséquent, $c^2 + 2cb \equiv 0[4]$.

Ensuite, il énonce le théorème suivant :

Théorème. Un carré ne peut pas résulter de la somme de deux carrés impairs.

Démonstration. Soient a et b deux nombres impairs, et supposons qu'il existe un nombre c vérifiant :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cela entraîne que la somme $a + b$ est un nombre pair (somme de deux impairs) plus grand que c. Donc,

$$(a+b)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 2ab.$$

Or, ab est un nombre impair (produit de deux nombres impairs). Donc $2ab$ est seulement pairement-impair. Ainsi, $(a+b)^2 - c^2$ est seulement pairement-impair, ce qui contredit le lemme précédent, où l'on a déjà démontré que la différence des carrés de deux nombres pairs est un nombre pair dont la moitié est paire.

3. CONCLUSION

En guise de conclusion, rappelons d'abord qu'au xvi^e siècle des mathématiciens arabes ont prêté un intérêt à l'analyse diophantienne entière, et spécifiquement à la résolution de l'équation :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x^2.$$

Nous en devons une, au moins, à al-Yazdī. Abordée par une approche arithmétique, basée sur la notion de congruence modulo 4 et modulo 8, la preuve d'al-Yazdī est bien différente de celle proposée par al-Ḫāzin au x^e siècle, qui traitait du cas particulier $n = 2$. En effet, dans un court mémoire pointu, consacré à l'analyse diophantienne entière, et après avoir énoncé la proposition que «la somme d'un nombre pair, n'ayant pas de quart, de carrés impairs ne peut pas être un carré[30] », al-Yazdī présente

https://doi.org/10.1017/S0957423924000109 Published online by Cambridge University Press

et démontre une suite de lemmes[31] pour parvenir à prouver la susdite proposition. Son approche, évitant le recours à la géométrie, dérive probablement d'une tradition ancrée dans les mathématiques arabes bien avant le xvi[e] siècle. En rapport avec cette thématique, Rashed souligne :

> Nous ne pouvons cependant pas affirmer que cette contribution revient à al-Yazdī lui-même, ou reflète une période plus ancienne de l'analyse diophantienne en arabe. Il manque encore trop de textes pour qu'une réponse certaine soit possible[32].

L'épître dont nous venons d'analyser le contenu nous apporte en fait des éléments de réponse, relativement à ce débat. En effet, ce texte nous révèle que des preuves datant du xiii[e] siècle, conçues par des auteurs comme al-Ṭūsī, al-Zanǧānī ou Ibn Yūnus, ont apporté leur pierre à l'édifice initié par leurs prédécesseurs du x[e] siècle.

4. ÉDITION DU TEXTE

Les quatre manuscrits sur lesquels nous nous sommes basés sont les suivants :

Manuscrit A, أ : ms. British Library IO Islamic 824, fol. 58v-59r. Cette copie fut écrite en 1722 (comme le reste du codex[33]), par Aḥmad b. Sulaymān al-Guǧrātī, qui attribue une première preuve à Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī et une deuxième à Kamāl al-Dīn b. Yūnus. À la fin, en glose, le copiste mentionne que cette démonstration appartient aussi à ᶜAbd al-Wahhāb al-Zanǧānī. Cette copie contient plusieurs explications écrites entre les lignes par la main de Aḥmad b. Sulaymān, le petit fils du copiste Muḥammad Ridhā b. Ġulām b. Aḥmad b. Sulaymān.

Manuscrit B, ب : ms. Ǧar Allah (Turquie) 1502, fol. 269v-270r. Le copiste est Ibn Maḥmūd b. Muḥammad al-Kaniyānī. Le codex est écrit en Nasḫ, en 894 H. Dimension : 25,5 × 17,9 cm, 25 lignes par page. La copie commence par la phrase : «À l'auteur de l'épître… » À la fin de la démonstration d'Ibn Yūnus, le copiste de ce texte ne fait aucune allusion à al-Zanǧānī comme l'a fait celui du manuscrit suivant.

[30] Cela se traduit en notations modernes ainsi : si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n nombres impairs, tel que n vérifie les conditions : $n \equiv 0[2]$ et $n \not\equiv 0[4]$, alors la somme $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ ne peut pas être un carré. Pour plus de détails, voir Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*, p. 125-130.

[31] Pour plus de détails, voir Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique*.

[32] Rashed, «Al-Yazdī», p. 80.

[33] Otto Loth, *A catalogue of the Arabic manuscripts in the Library of the India Office* (London, 1877), p. 297-299.

Manuscrit C, ج : ms. BnF Arabe 2467, fol. 196ᵛ-197ʳ. 14 × 21 cm, 14 lignes par page. La copie fut écrite au XVIᵉ siècle par un copiste inconnu qui ne mentionne pas explicitement l'appartenance de la preuve à Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī. Néanmoins, il lui fait allusion en disant « À l'auteur de l'épître… » entendant par cela l'épître qui précède celle-là et qui appartient à al-Ṭūsī. Par contre, il attribue la deuxième preuve à Kamāl al-Dīn b. Yūnus. Puis, à la fin, il souligne : « Il est dit que cette démonstration est au maître, à travers celui qui l'a atteinte, ᶜAbd al-Wahhāb al-Zanǧānī. » On comprend donc, grâce à l'expression « celui qui l'a atteinte », qu'Ibn Yūnus a présenté quelque part la preuve d'al-Zanǧānī en le citant. Un témoignage d'al-Zanǧānī lui-même est susceptible d'étayer notre dernière hypothèse. En effet, dans son traité « L'appui des arithméticiens » (*ᶜUmdat al-ḥussāb*) il mentionne qu'il a déjà démontré ce théorème[34]. À cela s'ajoute un autre témoignage, du même auteur, dans son traité *Balance de l'équation dans la science d'algèbre et al-muqābala* dans lequel il précise qu'il a démontré plusieurs résultats et qu'il n'a malheureusement pas conservé son travail[35] ; ce qui mène à croire que sa preuve est connue au sein de la sphère des mathématiciens.

Manuscrit D, د[36] : ms. Berlin OR Fol 258, fol. 436ᵛ-437ᵛ. Le codex est écrit en 1021 H. Dimension : 20 × 18 cm, 25 lignes par page. La copie commence par la phrase : « À l'auteur de l'épître, sur la démonstration du fait qu'il ne peut résulter de la somme de deux carrés… », et elle se termine par :

> Il est dit que cette démonstration est au maître (*al-ustāḏ*), à travers celui qui l'a atteinte, ᶜAbd al-Wahhāb al-Zanǧānī. Finalisé le premier jour du

[34] Dans son ouvrage « L'appui des arithméticiens », Al-Zanǧānī souligne qu'il a présenté, dans certaines de ses épîtres, la preuve de la proposition qu'il n'existe pas deux carrés impairs dont la somme soit paire. Cf. al-Zanǧānī, *ᶜUmdat al-ḥussāb*, éd. Seif Eddin Toumi (Istanbul : Dār al-Maḫṭūṭat, sous presse), p. 108:
تنبيه: قد ذكرنا في بعض رسائلنا البرهان على أنه لا يوجد مربّعان فردان مجموعهما مربّع أبدا.

[35] Al-Zanǧānī, *Balance de l'équation dans la science d'algèbre et al-muqābala*, éd. Eleonora Sammarchi (Paris : Classiques Garnier, 2022), p. 84: « Au début de ma jeunesse, je m'en étais passionné pendant un certain temps. J'ai voué à cela une partie de l'arbre de ma vie et j'ai dicté sur cela plusieurs épîtres dans lesquelles j'ai mentionné les choses minutieuses que personne n'avait mentionnées auparavant, ainsi que les choses subtiles sur lesquelles personnes n'avait réfléchi avant moi. Malheureusement, le peu d'intérêt que j'y prêtais à cause de ma grande habilité dans ce genre de choses a fait que je n'ai pas conservé les originaux [de ces écrits]. Ceux-ci se sont donc dispersés dans les mains des étudiants qui, pour la majorité d'entre eux, se les sont appropriés, en prétendant être à l'origine de leur découverte et d'en avoir établi les principes et les ramifications. »

[36] Wilhelm Ahlwardt. *Verzeichniss der Arabischen Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin* (Berlin, 1887-1899), vol. 5, p. 351.

mois *rabīᶜ* le premier de l'an 1021 H, par la main du faible serviteur Ġulām Aḥmad al-Qurayšī al-Hāšimī.

https://doi.org/10.1017/S0957423924000109 Published online by Cambridge University Press

Au nom de Dieu le Clément, le Miséricordieux
⟨Texte⟩ appartenant à l'érudit Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī,
que Dieu le bénisse,
sur la démonstration de ⟨la proposition⟩ :
La somme de deux carrés impairs ne peut pas être un carré.

Il a dit : commençons, pour la démontrer, par deux lemmes. Voici le premier : Il est impossible qu'un carré soit seulement pairement-impair. Et cela par ce que le côté du carré pair est pair, il a donc une moitié, et le carré de sa moitié est égal au quart de son carré. | Aucun nombre ayant D 436v un quart ne peut être seulement pairement-impair. Par conséquent, aucun carré n'est seulement pairement-impair.

Le deuxième lemme est que nul carré impair ne peut excéder un carré impair d'un nombre seulement pairement-impair. En effet, la différence entre les deux côtés est un nombre pair ayant une moitié et chacun des compléments possède une moitié. Ainsi, la somme des deux compléments possède un quart et le carré de la différence a aussi un quart. Donc la différence possède aussi un quart. Par conséquent, un carré impair ne peut pas excéder un carré impair d'un nombre seulement pairement-impair.

Admettant ces deux lemmes, nous disons que si la somme de deux carrés impairs était égale à un carré, alors il serait pair et chacun des deux | carrés impairs serait composé d'un carré impair et de deux com- A 58r plements car il est le reste de la différence d'un carré pair et d'un carré impair. Et la somme du carré impair et des deux compléments est un carré impair. Par conséquent, les deux compléments représentent la différence d'un carré impair et d'un autre carré impair. Or, chacun d'eux | est impair, car il est le produit de deux impairs, leur somme est donc C 196r seulement pairement-impair. Par contre, nous avons démontré que la différence de deux carrés impairs ne peut être seulement pairement-impair. Ceci est donc absurde. Ainsi, la somme de deux carrés entiers impairs ne peut pas être un carré. Et c'est Dieu qui sait la vérité, et c'est à lui le retour et le refuge.

| Le cheik, sultan des géomètres, Kamāl al-Dīn b. Yūnus a aussi en- B 296v trepris la démonstration de cela. Il a dit : Il ne peut exister deux carrés impairs dont la somme soit un carré.

بسم الله الرحمن الرحيم

للمحقِّق نصير الدين الطوسي، رحمه اللهُ،

في بيان أنَه لا يمكن أن يجتمع من عددَين مربَّعَين فردَين عدد مربَّع.

قال: ولنقدّم لبيانه مقدِّمتَين: إحداها هذه: لا يمكن أن يكون عدد مربَّع زوج-الفرد فقط. وذلك لأنّ ضلع المربَّع الزوج يكون زوجًا، فله نصف. ومربَّع نصفه يكون رُبع مربَّعه | وكلّ عددٍ له رُبع فهو ليس بزوج-الفرد فقط. فإذن، لا مربَّعًا هو زوج-الفرد فقط. د ٤٣٦ظ

وثانيتهما هذه: لا يمكن أن يَفضُلَ مربّع فرد مربَّعًا فردًا بعددٍ هو زوج-الفرد فقط. وذلك لأَنّ فضل الضلع على الضلع يكون زوجًا وله نصف، فلكل متمّم نصف، ولمجموع الـمتمِّمَين رُبع، ولمربَّع الفضل أيضًا رُبع. فلجميع الفضل رُبع. فإذن، ليس فضل المربَّع الفرد على المربَّع الفرد بزوج-الفرد فقط.

وإذا ثبتت هاتان المقدِّمتان فنقول: لو اجتمع من مربَّعَين فردَين مربع، لكان زوجًا ويكون كل واحد من | المربَّعَين الفردَين مؤلَّفًا من مربّع فرد ومتمِّمَين. أ ٥٨و لأنّه فضل مربَّع زوج على مربَّع فرد ومجموع المربَّع الفرد والمتمِّمَين مربَّع فردٍ. فالمتمِّمان يكونان معًا فضل مربَّع فردٍ على مربَّع فردٍ. ولكنّ كلّ واحدٍ | منهما فرد، ج ١٩٦و لكونه حاصلا من ضرب فردٍ في فردٍ، فمجموعهما زوج-فردٍ فقط. وقد بيَّنَّا أنّه لا يجوز أن يكون فضل المربَّع الفرد على المربَّع الفرد زوج-فردٍ فقط. فهذا خلف. فإذن، لا يمكن أن يجتمع من مربَّعَين فردَين مربَّع. والله أعلم بالصّواب وإليه المرجع والمآب.

| بسم الله الرحمان الرحيم. ب ٢٩٦ظ وللشيخ، سلطان المهندسين، كمال الدين بن يونس في بيانه أيضا. قال: لا يمكن أن يُوجَدَ عددان مربَّعان فردان مجموعهما مربّع.

[١] بسم الله الرحمن الرحيم: ناقصة [ب]. [٢] للمحقِّق نصير الدين الطوسي، رحمه اللهُ: لمصنف الرسالة [ب، ج، د]. [٣] في بيان: ناقصة [ج]. [٤] إحداها: إحديهما [ب، ج، د]. [٤] زوج-الفرد: هو زوج الفرد [ب، ج، د]. [٦] رُبع: ناقصة [ج]. [٦] فإذن، لا مربَّعًا هو زوج-الفرد فقط: ناقصة [ب]. [٦] هو: ناقصة [ج]. [٧] يَفضُلَ: يفصل [د]. [٨] فضل: فصل [د]. [٨] ولمجموع: فلمجموع [أ]. [٩] ولمربَّع الفضل: ويلزم الفصل [ب]. [١١] لكان: أكان [ج]. [١٢] كل واحد: كلواحد [أ، د]. [١٣] فالمتمِّمان: المتممان [ج]. [١٤] كلّ واحدٍ: كلواحد [د]. [١٥] زوج-فردٍ: زوج [د]. [١٦] فهذا خلف: ناقصة [أ]. [١٦] فردَين: فرد [ج]. [١٧] والله أعلم بالصّواب وإليه المرجع والمآب: والله أعلم [ب]. [١٨] بسم الله الرحمان الرحيم: أضيفت من قبل الناسخ [د]. [١٨] بن يونس: ابن يونس [ب، ج، د].

https://doi.org/10.1017/S0957423924000109 Published online by Cambridge University Press

Avant d'aborder cela, il est nécessaire de démontrer un lemme qui est : Pour tout couple de nombres pairs, le carré du plus grand excède celui du plus petit d'un nombre pair dont la moitié est paire.

En effet, le plus grand contient le plus petit plus un excédent. Alors, le carré du plus grand est comme le carré du plus petit plus le carré de l'excédent et le double du produit du plus petit et de l'excédent. Si on lui retranche donc le carré du plus petit, il en reste le carré de l'excédent et les deux complémentaires.

| Or, le carré de l'excédent est un nombre pair dont la moitié est forcé- D 437r
ment paire car sa moitié résulte de son produit par sa moitié, et de tout nombre multiplié par un nombre pair il résulte un nombre pair. Ainsi, sa moitié est paire et chacun des deux complémentaires est aussi pair du fait qu'il est le résultat du produit d'un nombre pair par un nombre pair. Leur somme est donc un nombre pair dont la moitié est paire. Si donc tu les ajoutes au carré de l'excédent, la somme sera un nombre pair dont la moitié est paire.

| Admettant cela, nous disons : il ne peut y avoir deux carrés impairs A 58v
dont la somme soit un carré. Car s'ils existaient, alors leur somme serait un carré pair, du fait qu'il serait l'association de deux impairs, donc sa racine serait paire et la somme des deux racines de ces deux carrés serait aussi paire et plus grande que le nombre pair qui est la racine du carré résultant de la somme des deux carrés, certes. Ainsi, son carré excéderait le carré résultant de la somme des deux carrés et il faut que l'excédent soit un nombre pair dont la moitié est paire. Or l'excédent est ce qui résulte du double du produit de l'une des racines impaires par l'autre, ainsi sa moitié est ce qui résulte du produit de l'un des deux nombres impairs l'un par l'autre. Il en résulte que le produit d'un nombre impair et d'un nombre impair est pair, ce qui est absurde, et c'est Dieu qui sait ⟨la vérité⟩.

Et il est dit que cette démonstration est au maître, à travers celui qui l'a atteinte, ᶜAbd al-Wahhāb al-Zanǧānī, que Dieu lui accorde miséricorde.

وقبل الخوض فيه لا بدّ من بيان مقدّمة هي أنّ: كلّ عددَين زوجَين، فإنّ مربَّع الأَكثر يزيد على مربَّع الأَقلّ بعددٍ زوجٍ نصفه زوجٌ. لأَنّ الأَكثر مشتمِل على الأَقلّ وزيادة، فمربَّع الأَكثر مثل مربَّع الأَقلّ ومربّع الزيادة وضرب الأَقلّ في الزيادة مرّتَين. فإذا أسقطنا منه مربَّع الأَقلّ يبقى مربَّع الزائد والمتمّمان | ومربَّع الزائد عدد زوج نصفه زوج ضرورةً، لأنّ نصفه د ٤٣٧و هو المرتفِع من ضرب نصفه فيه. وكلّ عدد ضرب في زوج فالحاصل زوج؛ فإذن نصفه زوج. وكلّ متمِّمٍ أيضا زوج لتولُّده من زوج في زوج ومجموعهما عدد زوج نصفه زوج. فإذا جمعتهما إلى مربَّع الزائد صار المجموع عددًا زوجا | نصفه زوج. أ ٥٨ظ

وإذا ثبت هذا، فنقول: لا يجوز أن يُوجَد مربَّعان فردان مجموعهما مربَّع. إذ لو وُجِدَ، لكان المجموع مربَّعا زوجا، لكونه مركَّبا من ضمّ فرد إلى فرد، فيكون جذره زوجًا ومجموع جذرَي ذينك المربَّعَين أيضا زوج. ويكون هو أكثر من الزوج الذي هو جذر ذلك المربَّع الحاصل من مجموع المربَّعَين. وينبغي أن تكون تلك الزيادة عددا زوجًا نصفه زوج. لكنّ الزّيادة هي المرتفِع من ضرب أحد الجذرَين الفردَين في الآخر مرّتَين. فنصفه هو المتولِّد من ضرب أحد الفردَين في الآخر. والمرتفِع من ضرب عددٍ فردٍ في عددٍ فردٍ زوج، وهذا خلف. والله أعلم بالصواب.

وقيل: هذا البرهان للأستاذ، عن المتوصّل عبد الوهاب الزنجاني رحمه الله تعالى.

٤ الزائد: الزايد [ب]. ٤ ضرورةً: ضرورة أن [ج]. ٥ المرتفِع: المربع [د]. ٥ فإذن: فإن [د]. ٦ لتولُّده: فتولده [ب، ج، د]. ٦ زوج في زوج: زوج [د]. ٦ ومجموعهما: فمجموعهما [د]. ٧ نصفه زوج: فنصفه [ب، د].

https://doi.org/10.1017/S0957423924000109 Published online by Cambridge University Press