ÜBER DEN BIZYKLISCHEN BIQUADRATISCHEN ZAHLKÖRPER

TOMIO KUBOTA

Unter einem bizyklischen biquadratischen Zahlkörper verstehen wir einen absolut abelschen Zahlkörper vierten Grades, der von zwei verschiedenen quadratischen Zahlkörpern zusammengesetzt wird. Wir behandeln im folgenden die Einheiten- und Idealklassengruppe dieses Körpers, indem wir die Ergebnisse von [6] und [7] weiterführen.

Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit den drei quadratischen Teilkörpern k_1, k_2 und k_3. Als die Struktur der Einheitengruppe vom reellen K sind dann nach [7] die sieben Typen möglich. Ist nämlich ε_i die Grundeinheit von k_i $(i=1, 2$ und $3)$, so besitzt K als ein System der Grundeinheiten irgendeines aus den folgenden: i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; ii) $\sqrt{\varepsilon_1}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; iii) $\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}, \varepsilon_3$; iv) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; v) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_3}, \varepsilon_2$; vi) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}, \sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_1}$; vii) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Wir stellen in §3 fest, zusammen mit dem entsprechenden Resultate für den imaginären K, dass es unendlich viele zu jedem genannten Typus gehörende K gibt.

Nun sei $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von k_i, $\mathfrak{h}_i$ die Idealklassengruppe von k_i und $\mathfrak{H}$ die Idealklassengruppe von K. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3$ ein Element des direkten Produktes der drei Idealgruppen von k_1, k_2 und k_3, so entsteht aus der Zuordnung $\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_3\rightarrow\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{h}_1\times\mathfrak{h}_2\times\mathfrak{h}_3$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$. Während wir in §4 den Kern $\mathfrak{h}_0$ dieses Homomorphismus und die Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ bestimmen, erkennt man insbesondere, dass die beiden Gruppen $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ Gruppen vom Typus $(2, 2, \ldots)$ sind, und dass ihre Ordnungen explizite ausgedrückt werden können. Dadurch erhält man sogleich einen klassenkörpertheoretischen Beweis des von Herglotz verallgemeinerten Dirichletschen Satzes, der einmal in [6] zuerst erbracht worden ist.

Beiläufig ermöglichen unsere Resultate die Klassenzahl und ein System der

Received December 7, 1955.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

Grundeinheiten von K ganz leicht aus denen von k_i zu berechnen, was in §5 durch einige Beispiele erklärt wird.

Im folgenden wird der rationale Zahlkörper mit P und die absolute Norm $N_{\Omega/P}$ bzw. die absolute Spur $S_{\Omega/P}$ mit N_Ω bzw. S_Ω bezeichnet. Überdies nehmen wir die Hassesche vereinfachte Bezeichnungsart von Gruppen an, die ein allgemeines Element einer Gruppe gleichzeitig die Gruppe selbst darstellen lässt.

§ 1. Hilfssätze

HILFSSATZ 1. *Eine Einheit η eines quadratischen Zahlkörpers k hat dann und nur dann eine Darstellung $\eta = \frac{\rho^2}{r}$ $(\rho \in k,\ r \in P)$, wenn $N_k\eta = 1$ ist. Dabei ist notwendig (ρ) ein ambiges Hauptideal von k/P.*

Beweis. Ist $N_k\eta = 1$, so gilt nach Hilbert $\eta = \rho^{1-s}$ mit $\rho \in k$, wo s der von 1 verschiedene Automorphismus von k/P ist. Also ist $\eta = \frac{\rho^2}{N_k\rho}$. Umgekehrt folgt aus $\eta = \frac{\rho^2}{r}$ ersichtlich $N_k\eta = 1$. Dass dabei (ρ) ein ambiges Hauptideal von k/P ist, ergibt sich sofort aus $(\rho)^2 = (r)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir setzen hier die folgenden Bezeichnungen fest.

K: bizyklischer biquadratischer Zahlkörper.

k_i: quadratischer Teilkörper von K $(i = 1, 2$ oder $3)$.

σ_i: der Automorphismus $\neq 1$ von K/k_i.

s_i: der Automorphismus $\neq 1$ von k_i/P.

ε_i: die Grundeinheit von k_i, wenn nur k_i reell ist.

$\mathfrak{e}_i$: die Einheitengruppe von k_i.

$\mathfrak{e}_i^*$: die Gruppe aller $\eta \in \mathfrak{e}_i$ mit $N_{k_i}\eta = 1$.

$\mathfrak{e}$: die Einheitengruppe von K.

Andererseits definieren wir die Zahl $\kappa(K)$ durch

$$\kappa(K) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } K \text{ reell und } N_{k_1}\varepsilon_1 = N_{k_2}\varepsilon_2 = N_{k_3}\varepsilon_3 = -1 \text{ ist.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls weiter K reell ist, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}^*$ die Gruppe, welche aus allen totalpositiven und totalnegativen Elementen von $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3$ besteht. Falls dagegen K imaginär ist, so setzen wir $\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}_1^*\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{e}_3^*$.

Aus diesen Definitionen folgt ohne weiteres der

HILFSSATZ 2. *Ist* $\kappa(K)=0$, *so ist* $\mathfrak{e}^*=\mathfrak{e}_1^*\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{e}_3^*$. *Ist dagegen* $\kappa(K)=1$, *so wird* $\mathfrak{e}^*$ *aus* $\mathfrak{e}_1^*\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{e}_3^*$ *und* $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ *erzeugt. Ferner gilt immer*

$$(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3:\mathfrak{e}^*)=2^{-\kappa(K)}\prod_i(\mathfrak{e}_i:\mathfrak{e}_i^*).$$

HILFSSATZ 3. *Es sei K reell und* $\kappa(K)=1$. *Setzt man dann* $\eta=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, *so ist* $P(\sqrt{\eta})/P$ *eine abelsche Erweiterung vom Typus* $(2, 2, \ldots)$. *Ist ferner* k' *ein beliebiger Zahlkörper mit den Eigenschaften* $K\cap k'=P$ *und* $\sqrt{\eta}\in K'=Kk'$, *so ist* $N_{K'/k'}\sqrt{\eta}=-1$.

Beweis. Da

$$\eta,\ \eta^{\sigma_1}=\frac{\varepsilon_1^2}{\eta},\quad \eta^{\sigma_2}=\frac{\varepsilon_2^2}{\eta},\quad \eta^{\sigma_3}=\frac{\varepsilon_3^2}{\eta}$$

alle Konjugierte von η sind, hat jedes Konjugierte von $\sqrt{\eta}$ entweder die Form $\pm\sqrt{\eta}$ oder die Form $\pm\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\eta}}$ ($i=1$, 2 oder 3). Andererseits ist K ersichtlich in $P(\sqrt{\eta})$ enthalten, und ein durch $\sqrt{\eta}\to\pm\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\eta}}$ bestimmter Automorphismus von $P(\sqrt{\eta})/P$ induziert in K den Automorphismus σ_i. Also ist $P(\sqrt{\eta})/P$ galoissch, und jeder Automorphismus ($\neq 1$) von $P(\sqrt{\eta})/P$ hat die Ordnung 2. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Betreffs der zweiten Behauptung, bedeute σ_i' ($i=1$, 2 und 3) der Automorphismus von K'/k', welcher $\alpha^{\sigma_i'}=\alpha^{\sigma_i}$ für jede $\alpha\in K$ erfüllt. Ist dann

$$\sqrt{\eta}^{\sigma_1'}=(-1)^{\nu_1}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\eta}},\qquad \sqrt{\eta}^{\sigma_2'}=(-1)^{\nu_2}\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\eta}}\qquad (\nu_1,\ \nu_2 \text{ ganz rational}),$$

so ist

$$\sqrt{\eta}^{\sigma_3'}=\sqrt{\eta}^{\sigma_1'\sigma_2'}=(-1)^{\nu_1}\cdot\frac{-1}{\varepsilon_1}\cdot(-1)^{\nu_2}\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon_2}=(-1)^{\nu_1+\nu_2+1}\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\eta}}.$$

Also ist

$$N_{K'/k'}\sqrt{\eta}=\sqrt{\eta}^{1+\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'}=\sqrt{\eta}\cdot(-1)^{\nu_1}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\eta}}\cdot(-1)^{\nu_2}\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\eta}}\,(-1)^{\nu_1+\nu_2+1}\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\eta}}=-1,$$

w.z.b.w.

HILFSSATZ 4. *Eine Einheit η von K hat dann und nur dann eine Darstellung* $\eta=\frac{\rho^2}{r}$ ($\rho\in K$, $r\in P$), *wenn η zu* $\mathfrak{e}^*$ *gehört. Insbesondere gilt* $\mathfrak{e}^*\supset\pm\mathfrak{e}^2$.

Beweis. Es sei $\eta=\frac{\rho^2}{r}$ ($\rho\in K$, $r\in P$). Da dann $(\rho)^{\sigma_i}=(\rho)$ ($i=1$, 2 und 3) ist, gehört $\eta_i = \frac{N_{K/k_i}\rho}{r}$ zu $\mathfrak{e}_i$, und, falls K imaginär und k_i reell ist, so ist $N_{k_i}\eta_i = 1$. Ferner gilt $\eta = \eta_1\eta_2\eta_3^{-s_3}$, und für reellen K ist η der Form nach entweder totalpositiv oder totalnegativ. Daher ist $\eta \in \mathfrak{e}^*$. Es sei umgekehrt $\eta \in \mathfrak{e}^*$. Dann folgt aus Hilfssatz 1, dass η sicher eine Darstellung $\eta = \frac{\rho^2}{r}$ $(\rho \in K,\ r \in P)$ hat, wenn nur $\eta \in \mathfrak{e}_1^*\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{e}_3^*$ ist. Für die Vollendung des Beweises ist mithin hinreichend nur noch zu bestätigen, dass, im Falle von $\kappa(K) = 1$, auch $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ sich in der Form $\frac{\rho^2}{r}$ $(\rho \in K,\ r \in P)$ darstellen lässt. Nun sei $\eta = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $N_{k_1}\varepsilon_1 = N_{k_2}\varepsilon_2 = N_{k_3}\varepsilon_3 = -1$, und η sei in K keine Quadratzahl. Dann folgt aus Hilfssatz 3, dass es eine $r \in P$ mit $K(\sqrt{\eta}) = K(\sqrt{r})$ gibt. Da dann $\rho = \sqrt{r\eta}$ zu K gehört, ist $\eta = \frac{\rho^2}{r}$, w.z.b.w.

HILFSSATZ 5. *Es sei ρ eine Zahl von K. Gilt dann $\frac{\rho^2}{r} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta^2$ mit $r \in P$, $\eta_i \in \mathfrak{e}_i^*$, $\eta \in \mathfrak{e}$, so gilt $\rho = \rho_1\rho_2\rho_3\eta$, wo $\rho_i \in k_i$ eine erzeugende Zahl eines ambigen Hauptideals von k_i/P ist. Gilt umgekehrt $\rho = \rho_1\rho_2\rho_3\eta$ $(\eta \in \mathfrak{e})$, und ist (ρ_i) ein ambiges Hauptideal von k_i/P, so gilt $\frac{\rho^2}{r} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta^2$ mit $r \in P$, $\eta_i \in \mathfrak{e}_i^*$.*

Beweis. Aus $\frac{\rho^2}{r} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta^2$ $(\eta_i \in \mathfrak{e}_i^*)$ folgt nach Hilfssatz 1, dass $\frac{\rho^2}{r} = \frac{\rho_1'^2\rho_2'^2\rho_3'^2}{r'}\eta^2$ $(r' \in P,\ \rho'_i \in k_i)$ gilt, wobei (ρ'_i) ein ambiges Hauptideal von k_i/P ist. Da dann $\frac{r}{r'}$ in K eine Quadratzahl ist, gehört $\sqrt{\frac{r}{r'}}$ zu irgendeinem k_i. Daraus folgt die erste Behauptung[1]. Ist umgekehrt $\rho = \rho_1\rho_2\rho_3\eta$ und (ρ_i) ein ambiges Hauptideal von k_i/P, so ist $\eta_i = \frac{\rho_i^2}{N_{k_i}\rho_i}$ eine Einheit von $\mathfrak{e}_i^*$. Daraus ergibt sich die zweite Behauptung.

HILFSSATZ 6. *Es bedeute ρ eine Zahl von K, für die $(\rho)^2 = (r)$ $(r \in P)$ gilt. Ferner bedeute ρ_0 eine Zahl mit $\rho_0^2 \in P$ von K und ρ_i eine Zahl von k_i, welche ein ambiges Hauptideal (ρ_i) von k_i/P erzeugt. Dann entsteht aus der Zuordnung $\rho \to \frac{\rho^2}{r}$ der Isomorphismus*

$$(\rho)/(\rho_0) \cong \mathfrak{e}^*/\pm\mathfrak{e}^2.$$

Hierbei wird die Untergruppe $(\rho_1)(\rho_2)(\rho_3)$ der Gruppe $\mathfrak{e}_1^*\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{e}_3^*\mathfrak{e}^2$ zugeordnet.

[1] Wie man leicht nach Normbildung in bezug auf K/k_i einsehen kann, folgt die Ambigkeit von (ρ_i) notwendig aus $(\rho)^2 = (r)$, $(\rho) = (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3)$.

Beweis. Ist $\frac{\rho^2}{r} = \pm\eta^2$ $(\eta \in \mathrm{e})$, so ist $\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2 = \pm r$. Also ist $(\rho) = (\rho_0)$ mit $\rho_0 = \sqrt{\pm r}$. Folglich ergeben sich alle Behauptungen aus Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5.

HILFSSATZ 7. *Ist η eine Einheit von K, so gehört η^2 dann und nur dann zu $\mathrm{e}_1^*\mathrm{e}_2^*\mathrm{e}_3^*$, wenn $N_K\eta = 1$ ist. Ist insbesondere $\kappa(K) = 0$, so ist $N_k\eta = 1$ für jede Einheit η von K.*

Beweis. Da $\eta^2 = N_{K/k_1}\eta \cdot N_{K/k_2}\eta \cdot (N_{K/k_3}\eta)^{-s_3}$ ist, folgt $\eta^2 \in \mathrm{e}_1^*\mathrm{e}_2^*\mathrm{e}_3^*$ aus $N_K\eta = 1$. Ist umgekehrt $\eta^2 = \eta_1\eta_2\eta_3$ $(\eta_i \in \mathrm{e}_i^*)$, so ist wie oben $\eta_1\eta_2\eta_3 = N_{K/k_1}\eta \cdot N_{K/k_2}\eta \cdot (N_{K/k_3}\eta)^{-s_3}$. Nach Normbildung in bezug auf K/k_1 ist also $\eta_1^2 = (N_{K/k_1}\eta)^2$, nämlich $N_{K/k_1}\eta = \pm\eta_1$, $N_K\eta = 1$.

§ 2. Bemerkungen über den quadratischen Zahlkörper

Es sei k ein quadratischen Zahlkörper und η eine Einheit von k mit $N_k\eta = 1$. Dann ist nach Hilbert $\eta = \rho^{1-s}$ $(\rho \in k)$, wo s der von 1 verschiedene Automorphismus von k/P ist.[2] Diese Zahl ρ können wir dadurch eindeutig normieren, dass ρ ganz ist und durch keine rationale Primzahl teilbar ist. Die Norm $N_k\rho$ der so normierten Zahl ρ wird im folgenden mit $\delta_k(\eta)$ bezeichnet.

Wir setzen hier noch die folgenden Bezeichnungen fest.

Es sei Ω ein Zahlkörper und es seien a, b Zahlen von Ω. Dann drücken wir mit

$$a \underset{m}{=} b(\Omega)$$

aus, dass $\frac{a}{b}$ in Ω eine m-te Potenz ist. Ist speziell $\Omega = P$, so schreiben wir einfach

$$a \underset{m}{=} b.$$

Dann gilt ersichtlich der

HILFSSATZ 8. *Es sei k ein quadratischer Zahlkörper und η eine Einheit von k mit $N_k\eta = 1$. Dann ist $\delta_k(\eta)$ eine für η eindeutig bestimmte quadratfreie ganze rationale Zahl, die die Norm in bezug auf k/P einer ganzen Zahl von*

[2] Vgl. den Beweis von Hilfssatz 1.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

k ist, und die in der Diskriminante von k anfgeht.[3] *Ferner ist* $\eta \underset{2}{=} \delta_k(\eta)$ (k), *und für zwei Einheiten* η, η' *von* k *gilt* $\delta_k(\eta\eta') \underset{2}{=} \delta_k(\eta)\delta_k(\eta')$.

HILFSSATZ 9. *Es sei Δ eine quadratfreie positive ganze rationale Zahl und $k = P(\sqrt{\Delta})$ ein reeller quadratischer Zahlkörper. Wenn dann $N_k\varepsilon = 1$ für die Grundeinheit ε von k gilt, so ist $\delta_k(\varepsilon)$ weder mit* 1 *noch mit Δ identisch.*

Beweis. Wäre $\delta_k(\varepsilon) = \Delta$, so gäbe es eine ganze Zahl ρ von k mit $N_k\rho = \Delta$, so dass $\eta = \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}$ eine Einheit von k mit $N_k\eta = -1$ sein würde, was unmöglich ist. Wäre andererseits $\delta_k(\varepsilon) = 1$, so gehörte zu k eine Einheit η mit $\varepsilon = \eta^{1-s} = \eta^2$ (s der Automorphismus $\neq 1$ von k/P), was wieder unmöglich ist.

HILFSSATZ 10. *k sei ein reeller quadratischer Zahlkörper mit der Grundeinheit ε, und ε^* bedeute ε oder ε^2, je nachdem $N_k\varepsilon = 1$ oder -1 ist. Ferner seien*

$$x,\ x_1,\ x_2\ \textit{Primzahlen} \equiv 1 \pmod{4},$$
$$y,\ y_1,\ y_2\ \textit{Primzahlen} \equiv -1 \pmod{4}.$$

Setzt mann dann $\delta = \delta_k(\varepsilon^*)$, so erhalten wir die folgenden Resultate:

i) $\delta \underset{2}{=} 1$ (k) *für* $k = P(\sqrt{2})$, *für* $P(\sqrt{x})$ *und für* $P(\sqrt{x_1x_2})$ *mit* $\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -1$.

ii) $\delta \underset{2}{=} 2$ (k) *für* $k = P(\sqrt{y})$ *und für* $P(\sqrt{2y})$.

iii) $\delta \underset{2}{=} y_1$ (k) *für* $k = P(\sqrt{y_1y_2})$.

iv) $\delta = x$ *für* $k = P(\sqrt{xy})$ *mit* $\left(\frac{y}{x}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{x}\right) = -1$.

v) $\delta \underset{2}{=} 2x$ (k) *für* $k = P(\sqrt{xy})$ *mit* $\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right) = -1$.

vi) $\delta = y_1y_2$ *für* $k = P(\sqrt{xy_1y_2})$ *mit* $\left(\frac{y_1}{x}\right) = \left(\frac{y_2}{x}\right) = -1$.

Beweis. Bekanntlich ist $N_k\varepsilon = -1$ im Falle i), und in allen anderen Fällen ist $N_k\varepsilon = 1$. Sogar gilt im Falle iv)

$$\left(\frac{2,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{y,\ xy}{2}\right) = \left(\frac{2x,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{2y,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{xy,\ xy}{2}\right) = \left(\frac{2xy,\ xy}{x}\right) = -1,$$

im Falle v)

$$\left(\frac{2,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{x,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{y,\ xy}{x}\right) = \left(\frac{xy,\ xy}{2}\right) = \left(\frac{2xy,\ xy}{x}\right) = -1,$$

3) Vgl. Hilfssatz 1.

und im Falle vi)

$$\left(\frac{x,\ xy_1y_2}{y_1}\right)=\left(\frac{y_1,\ xy_1y_2}{x}\right)=\left(\frac{y_2,\ xy_1y_2}{x}\right)$$
$$=\left(\frac{xy_1,\ xy_1y_2}{x}\right)=\left(\frac{xy_2,\ xy_1y_2}{x}\right)=\left(\frac{xy_1y_2,\ xy_1y_2}{y_1}\right)=-1.$$

Aus diesen und aus den in Hilfssatz 8 und Hilfssatz 9 ausgesprochenen Eigenschaften von δ folgen nun alle Behauptungen.

Es sei η eine Einheit mit $N_k\eta=1$ eines quadratischen Zahlkörpers k. Dann wird $\delta_k(\eta)$ als der quadratfreie Kern von $N_k(\eta+1)$ leicht aus η berechnet. Unterstehend ist die Tafel von $\delta=\delta_k(\varepsilon)$ (ε die Grundeinheit von k) für alle $k=P(\sqrt{\Delta})$ mit $N_k\varepsilon=1$, $0<\Delta<100$.

Δ	3,	6,	7,	11,	14,	15,	19,	21,	22,	23,	30
δ	6,	3,	2,	22,	2,	10,	38,	7,	11,	2,	6
Δ	31,	33,	34,	35,	38,	39,	42,	43,	46,	47,	51
δ	2,	3,	2,	14,	19,	13,	7,	86,	2,	2,	102
Δ	55,	57,	59,	62,	66,	67,	69,	70,	71,	77,	78
δ	5,	19,	118,	2,	33,	134,	3,	14,	2,	11,	3
Δ	79,	83,	86,	87,	91,	93,	94,	95			
δ	2,	166,	43,	58,	14,	31,	2,	5			

§ 3. Einheiten des bizyklischen biquadratischen Zahlkröpers.

HILFSSATZ 11. *Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper und η_i eine Einheit in* $\mathfrak{e}_i^*$ *($i=1$, 2 oder 3). Dann gehört $\eta=\eta_1\eta_2\eta_3$ dann und nur dann zu* $\mathfrak{e}^2$, *wenn*

$$\delta_{k_1}(\eta_1)\,\delta_{k_2}(\eta_2)\,\delta_{k_3}(\eta_3)\underset{2}{=}1\quad(K)$$

ist, und η gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{e}_1^2\mathfrak{e}_2^2\mathfrak{e}_3^2$, *wenn zudem*

$$\delta_{k_i}(\eta_i)\underset{2}{=}\pm1\quad(k_i)\quad \textit{für jedes } i$$

gilt.

Beweis. Nach Hilfssatz 8 ist $\delta_{k_1}(\eta_1)\,\delta_{k_2}(\eta_2)\,\delta_{k_3}(\eta_3)\underset{2}{=}1$ (K) gleichbedeutend mit $\eta\in\mathfrak{e}^2$. Ist nun $\eta=\eta_1\eta_2\eta_3\in\mathfrak{e}_1^2\mathfrak{e}_2^2\mathfrak{e}_3^2$, so ergibt sich nach Normbildung in bezug auf K/k_i, dass $\eta_i\in\pm\mathfrak{e}_i^2$ und folglich $\delta_{k_i}(\eta_i)\underset{2}{=}\pm1$ (k_i) ist. Nimmt man

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

umgekehrt $\delta_{k_1}(\eta_1)\delta_{k_2}(\eta_2)\delta_{k_3}(\eta_3) \underset{2}{=} 1$ (K) und $\delta_{k_i}(\eta_i) \underset{2}{=} \pm 1$ (k_i) an, so ist nach Hilfssatz 8 $\eta_i \in \pm \mathrm{e}_i^2$ und daher $\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \in \pm \mathrm{e}_1^2\mathrm{e}_2^2\mathrm{e}_3^2$. Da nach der Annahme $\sqrt{\eta} \in K$ ist, muss es notwendig $\eta \in \mathrm{e}_1^2\mathrm{e}_2^2\mathrm{e}_3^2$ sein, w.z.b.w.

Es sei wieder $\eta_i \in \mathrm{e}_i^*$ $(i = 1,\ 2$ und $3)$. Dann bildet die Gesamtheit aller Beziehungen $\delta_{k_1}(\eta_1)^{m_1}\delta_{k_2}(\eta_2)^{m_2}\delta_{k_3}(\eta_3)^{m_3} \underset{2}{=} 1$ (K) $(m$ ganz rational$)$ eine Gruppe, wenn man die Beziehung $\delta_{k_1}(\eta_1)^{m_1+m_1'}\delta_{k_2}(\eta_2)^{m_2+m_2'}\delta_{k_3}(\eta_3)^{m_3+m_3'} \underset{2}{=} 1$ (K) als das Produkt zweier Beziehungen $\delta_{k_1}(\eta_1)^{m_1}\delta_{k_2}(\eta_2)^{m_2}\delta_{k_3}(\eta_3)^{m_3} \underset{2}{=} 1$ (K) und $\delta_{k_1}(\eta_1)^{m_1'}\delta_{k_2}(\eta_2)^{m_2'}\delta_{k_3}(\eta_3)^{m_3'} \underset{2}{=} 1$ (K) ansieht. Diese Gruppe wird im folgenden mit $\mathrm{D}(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ bezeichnet. Die Zahl $\delta_{k_i}(\eta_i)^{m_i}$ $(i = 1,\ 2$ und $3)$ heisst "trivial," wenn $\delta_{k_i}(\eta_i)^{m_i} \underset{2}{=} \pm 1$ (k_i) ist, und die Beziehung $\delta_{k_1}(\eta_1)^{m_1}\delta_{k_2}(\eta_2)^{m_2}\delta_{k_3}(\eta_3)^{m_3} \underset{2}{=} 1$ (K) selbst heisst "trivial," wenn jede $\delta_{k_i}(\eta_i)^{m_i}$ "trivial" ist. Die Gesamtheit aller "trivialer" Beziehungen bildet dann eine Untergruppe von $\mathrm{D}(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$, die im folgenden mit $\mathrm{D}_0(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ bezeichnet wird.

SATZ 1.[4] *Es sei K ein reeller bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit den drei quadratischen Teilkörpern k_1, k_2 und k_3. Ist dann ε_i die Grundeinheit von k_i, so besitzt K als ein System der Grundeinheiten irgendeines aus den folgenden:*

i) $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$
ii) $\sqrt{\varepsilon_1},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$
iii) $\sqrt{\varepsilon_1},\ \sqrt{\varepsilon_2},\ \varepsilon_3$
iv) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$
v) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2},\ \sqrt{\varepsilon_3},\ \varepsilon_2$
vi) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2},\ \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3},\ \sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_1}$
vii$_1$) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$

Für jede in Wurzelzeichen auftretende ε_i ist $N_{k_i}\varepsilon_i = 1$.

viii$_2$) $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3},\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ *mit* $N_{k_1}\varepsilon_1 = N_{k_2}\varepsilon_2 = N_{k_3}\varepsilon_3 = -1$.

Es gibt überdies unendlich viele zu jedem Typus gehörende K.

Beweis. Es sei $k_i = P(\sqrt{\Delta_i})$ mit einer quadratfreien ganzen rationalen Zahl Δ_i $(i = 1,\ 2$ oder $3)$, ε_i^* bedeute ε_i oder ε_i^2, je nachdem $N_{k_i}\varepsilon_i = 1$ oder -1 ist, und es sei $\delta_i = \delta_{k_i}(\varepsilon_i^*)$. Ist dann erstens $\kappa(K) = 0$, so folgt aus Hilfssatz 2, Hilfssatz 4 und Hilfssatz 11, dass die Zuordnung

$$\pm\sqrt{\varepsilon_1^{*m_1}\varepsilon_2^{*m_2}\varepsilon_3^{*m_3}} \longrightarrow \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2}\delta_3^{m_3} \underset{2}{=} 1 \quad (K)$$

[4] Vgl. [7], Satz 11.

einen Isomorphismus

$$\mathfrak{e}/\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 \cong \mathrm{D}(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)/\mathrm{D}_0(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)$$

liefert. In diesem Falle ist aber das gleichzeitige Bestehen der nicht "trivialen" Beziehungen

$$\delta_1 \underset{2}{\mp} 1 \ (K), \quad \delta_2 \underset{2}{\mp} 1 \ (K), \quad \delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (K)$$

unmöglich. Wäre nämlich dies der Fall, so käme, nach Hilfssatz 8 und Hilfssatz 9, $[2, \Delta_i] \mid [2, \Delta_j]$ für jedes i, j $(i, j = 1, 2$ oder $3)$ vor, wo durch die eckige Klammer das kleinste gemeinsame Vielfache gemeint wird. Folglich ergäbe sich $\Delta_i \mid 2$ für jedes i, was für rellen K unmöglich ist.[5] Als das Vertretersystem von $\mathrm{D}(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)/\mathrm{D}_0(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*)$ wird also irgendeines aus den folgenden angenommen.[6]

i) keine nicht-"triviale" Beziehung.

$$\left.\begin{array}{rl}
\text{ii)} & \delta_1 \underset{2}{\mp} 1 \ (K) \\
\text{iii)} & \delta_1 \underset{2}{\mp} 1 \ (K), \ \delta_2 \underset{2}{\mp} 1 \ (K) \\
\text{iv)} & \delta_1\delta_2 \underset{2}{\mp} 1 \ (K) \\
\text{v)} & \delta_1\delta_2 \underset{2}{\mp} 1 \ (K), \ \delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (K) \\
\text{vi)} & \delta_1\delta_2 \underset{2}{\mp} 1 \ (K), \ \delta_2\delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (K) \\
\text{vii}_1\text{)} & \delta_1\delta_2\delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (K)
\end{array}\right\} \text{In jeder Beziehung ist jedes auftretende } \delta_i \text{ nicht "trivial."}$$

Der im Satz ausgesprochene Typus der Einheiten von K wird dann eindeutig durch die entsprechende Beziehung zwischen δ_i bestimmt. Dass es unendlich viele zu jedem Typus gehörende K gibt, erkennt man sogleich folgenderweise, indem man Hilfssatz 10 gebraucht.

$$\begin{array}{llll}
\text{i)} & \Delta_1 = x_1 y, & \Delta_2 = x_2 y, & \Delta_3 = x_1 x_2 \\
& \delta_1 = x_1, & \delta_2 \underset{2}{\mp} 2\, x_2 \ (k_2), & \delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (k_3),
\end{array}$$

$$\text{wo } \left(\frac{y}{x_1}\right) = 1, \ \left(\frac{2}{x_1}\right) = \left(\frac{y}{x_2}\right) = \left(\frac{2}{x_2}\right) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -1.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{ii)} & \Delta_1 = xy, & \Delta_2 = y, & \Delta_3 = x \\
& \delta_1 = x, & \delta_2 \underset{2}{\mp} 2 \ (k_2), & \delta_3 \underset{2}{\mp} 1 \ (k_3),
\end{array}$$

$$\text{wo } \left(\frac{y}{x}\right) = 1, \ \left(\frac{2}{x}\right) = -1.$$

---

5) Vgl. [7], S. 397.

6) Zwei Beziehungen, die voneinander nur durch eine Permutation der Indizes i verschieden sind, sind hierbei als gleich anzusehen.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

iii) $\Delta_1 = y,\qquad \Delta_2 = 2y,\qquad \Delta_3 = 2$

$\delta_1 \underset{2}{\mp} 2\ (k_1),\qquad \delta_2 \underset{2}{\mp} 2\ (k_2),\qquad \delta_3 \underset{2}{\mp} 1\ (k_3)$

iv) $\Delta_1 = xy,\qquad \Delta_2 = y,\qquad \Delta_3 = x$

$\delta_1 \underset{2}{\mp} 2x\ (k_1),\qquad \delta_2 \underset{2}{\mp} 2\ (k_2),\qquad \delta_3 \underset{2}{\mp} 1\ (k_3),$

$$\text{wo}\ \left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right) = -1.$$

v) $\Delta_1 = y_1,\qquad \Delta_2 = y_2,\qquad \Delta_3 = y_1 y_2$

$\delta_1 \underset{2}{\mp} 2\ (k_1),\qquad \delta_2 \underset{2}{\mp} 2\ (k_2),\qquad \delta_3 \underset{2}{\mp} y_1\ (k_3)$

vi) $\Delta_1 = y_1 y_2,\qquad \Delta_2 = y_2 y_3,\qquad \Delta_3 = y_3 y_1$

$\delta_1 \underset{2}{\mp} y_1\ (k_1),\qquad \delta_2 \underset{2}{\mp} y_2\ (k_2),\qquad \delta_3 \underset{2}{\mp} y_3\ (k_3)$

vii$_1$) $\Delta_1 = x y_1 y_2,\qquad \Delta_2 = y_1,\qquad \Delta_3 = x y_2$

$\delta_1 = y_1 y_2,\qquad \delta_2 \underset{2}{\mp} 2\ (k_2),\qquad \delta_3 \underset{2}{\mp} 2x\ (k_3),$

$$\text{wo}\ \left(\frac{y_1}{x}\right) = \left(\frac{y_2}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right) = -1.$$

$$\left(\begin{array}{ll} x,\ x_1,\ x_2\ \text{Primzahlen} \equiv 1 & (\text{mod. } 4) \\ y,\ y_1,\ y_2\ \text{Primzahlen} \equiv -1 & (\text{mod. } 4) \end{array}\right)$$

Ist zweitens $\kappa(K)=1$, so folgt aus Hilfssatz 2 und Hilfssatz 4, dass entweder ε_1, ε_2, ε_3 oder $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, ε_2, ε_3 ein System der Grundeinheiten von K ist. Nach Hilfssatz 6 gehört nun $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ dann und nur dann zu K, wenn es keine Zahl $\rho \in K$ gibt, die zwar $(\rho)^2 = (r)$ $(r \in P)$, aber nimmer $(\rho) = (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3)$ $(\rho_i \in k)$ erfüllt. Es sei $\Delta_1 = x_1$, $\Delta_2 = x_2$, $\Delta_3 = x_1 x_2$ mit $\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -1$ (x_1, x_2 Primzahlen $\equiv 1$ (mod. 4)). Dann ist bekanntlich $\kappa(K)=1$ und es gibt keine ρ mit den fraglichen Eigenschaften. Daraus ergibt sich die Existenz unendlich vieler zum Typus vii$_2$) gehörender Körper K. Der Satz ist somit vollständig bewiesen.

Satz 2.[7] *Es sei K ein imaginärer bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit dem reellen quadratischen Teilkörper k_1 und mit den imaginären quadratischen Teilkörpern k_2 und k_3. Bezeichnet man dann mit ε_1 die Grundeinheit von k_1, so ist entweder ε_1 oder $\sqrt{\zeta}\sqrt{\varepsilon_1}$ eine Grundeinheit von K, wo ζ eine Einheitswurzel mit der Eigenschaft $\sqrt{\zeta} \notin K$ von K ist. Es gibt überdies unendlich viele zu jedem Typus gehörende K.*

Beweis. Es sei $k_i = P(\sqrt{\Delta_i})$, $\delta_1 = \delta_{k_1}(\varepsilon_1^*)$, wie beim Beweis von Satz 1, und ζ_i $(i=2$ oder $3)$ bedeute eine erzeugende Einheitswurzel von $\mathbf{e}_i^*$. Setzt man

[7] Vgl. [7], Satz 12.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

dann $\delta_2 = \delta_{k_2}(\zeta_2)$, $\delta_3 = \delta_{k_3}(\zeta_3)$, so liefert, nach Hilfssatz 2, Hilfssatz 4 und Hilfssatz 11, die Zuordnung

$$\pm\sqrt{\varepsilon_1^{*m_1}\zeta_2^{m_2}\zeta_3^{m_3}} \longrightarrow \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2}\delta_3^{m_3} \underset{2}{=} 1 \quad (K)$$

einen Isomorphismus

$$\mathbf{e}/\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \cong \mathbf{D}(\varepsilon_1^*, \ \zeta_2, \ \zeta_3)/\mathbf{D}_0(\varepsilon_1^*, \ \zeta_2, \ \zeta_3),$$

und $\pm\sqrt{\varepsilon_1^{*m_1}\zeta_2^{m_2}\zeta_3^{m_3}}$ ist dann und nur dann von der Form $\zeta'\eta'$ (ζ' Einheitswurzel von K, $\eta_1' \in \mathbf{e}_1$), wenn $\delta_1^{m_1}$ "trivial" ist. Ferner ist in diesem Falle das Bestehen der nicht-"trivialen" Beziehung $\delta_1 \underset{2}{=} 1$ (K) unmöglich. Denn wäre dies der Fall, so hätte K notwendig reell zu sein. Als die nicht-"trivial" δ_1 enthaltenden Beziehungen zwischen δ_i sind daher nur folgende zwei möglich.[6]

i) keine nicht-"triviale" Beziehung.

ii) $\delta_1\delta_2 \underset{2}{=} 1$ (K) (δ_1 nicht-"trivial").

Vom Typus i) sind nach Hilfssatz 10 die Körper K mit

$$\Delta_1 = x, \ (x \text{ Primzahl} \equiv 1 \pmod{4}),$$

und vom Typus ii) sind die Körper mit

$$\Delta_1 = y_1 y_2, \ \ \Delta_2 = -y_1, \ \ \Delta_3 = -y_2 \quad (\sqrt{-1} \notin K)$$

oder mit

$$\Delta_1 = y, \ \Delta_2 = -1, \ \Delta_3 = -y \quad (\sqrt{-1} \in K)$$
$$(y, \ y_1, \ y_2 \text{ Primzahlen} \equiv -1 \pmod{4}).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Gelegendlich fügen wir hier noch den folgenden Satz zu.

Satz 3. *Es gibt unendlich viele reelle bizyklische biquadratische Zahlkörper K mit der Eigenschaft $N_K\eta = 1$ für jede Einheit η von K, und es gibt auch unendlich viele K mit der Eigenschaft $N_K\eta = -1$ für passende Einheit η von K.*

Beweis. Für K mit $\kappa(K) = 0$ ist nach Hilfssatz 7 $N_K\mathbf{e} = 1$. Für K mit den Eigenschaften $\kappa(K) = 1$ und $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \in K$ ist nach Hilfssatz 3 $N_K\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = -1$. Dadurch erhält man die Behauptungen, wenn man Satz 1 berücksichtigt.

§ 4. Idealklassengruppe des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers.

Wir setzen hier noch einmal die folgenden Bezeichnungen fest.[8)]

p: rationale Primzahl

$e(p)$: die Verzweigungsordnung in K von p.

Nun heben wir vorläufig eine in Klassenkörper- und Normenresttheorie wohlbekannte Tatsache als Hilfssatz hervor.

HILFSSATZ 12. *Es sei S der grösste über P abelsche Teilkörper des absoluten Klassenkörpers von K. Dann ist S/P vom Typus* $(2, 2, \ldots)$ *und*

$$(S:P)=\begin{cases}\frac{1}{2}\prod_p e(p), & \textit{wenn } K \textit{ reell und } -1 \textit{ kein Normenrest} \\ & \textit{von } K/P \textit{ mod. irgendeine } p \textit{ ist.} \\ \prod_p e(p), & \textit{sonst.}\end{cases}$$

HILFSSATZ 13. *Es sei $\mathfrak{H}_0$ die Gruppe derjenigen Idealklassen, die durch Ideale von der Form $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ vertreten werden, wo $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von k_i bedeutet* ($i=1$, 2 *oder* 3). *Dann ist der Klassenkörper über $\mathfrak{H}_0$ der grösste über P abelsche Teilkörper S des absoluten Klassenkörpers von K.*

Beweis. Der Klassenkörper über $\mathfrak{H}_0$ sei S'. Dann gilt $\mathfrak{a}^{1-\sigma_1}=N_{K/k_2}\mathfrak{a}\cdot(N_{K/k_3}\mathfrak{a})^{-S_3}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von K. Daher ist S' über k_1, also symmetrisch auch über k_2 und k_3, abelsch. Ist nun σ' ein Automorphismus von S'/P, so ist, für irgendeines i, $\sigma'=\left(\frac{S'/k_i}{\mathfrak{a}_i}\right)$, wo $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von k_i ist. Daraus folgt

$$\sigma'^2=\left(\frac{S'/k_i}{\mathfrak{a}_i}\right)^2=\left(\frac{S'/K}{\mathfrak{a}_i}\right)=1,$$

so dass S'/P eine abelsche Erweiterung vom Typus $(2, 2, \ldots)$ ist. Also ist $S\supset S'$. Da aber nach Hilfssatz 12 S/P vom Typus $(2, 2, \ldots)$ ist, ist notwendig

$$\left(\frac{S/K}{\mathfrak{a}_i}\right)=\left(\frac{S/k_i}{\mathfrak{a}_i}\right)^2=1$$

für jedes Ideal $\mathfrak{a}_i$ von jedem k_i, was $S\subset S'$ ergibt.

HILFSSATZ 14. *Damit es ein Hauptideal* (α) *mit* $N_K\alpha<0$ $(\alpha\in K)$ *von* K

8) Die bisherigen Festsetzungen bleiben wirklich.

gibt, welches sich in der Form $(\alpha)=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ *mit Idealen* $\mathfrak{a}_i$ *von* k_i *darstellen lässt, ist notwendig und hinreichend, dass* -1 *Normenrest von* K/P *mod. jede* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Beweis. Ist $(\alpha)=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$, $N_K\alpha<0$, so ist ersichtlich $N_K\alpha=-a^2$ mit $a\in P$. Daraus folgt, dass -1 Normenrest von k_i/P ($i=1$, 2 und 3) und daher von K/P mod. jede $\mathfrak{p}$ ist. Ist umgekehrt dies der Fall, so gibt es $\beta_1\in k_1$, $\beta_2\in k_2$ mit $N_{k_1}\beta_1=N_{k_2}\beta_2=-1$. Da dann $N_{K/k_3}\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=1$ ist, ist nach Hilbert $\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\alpha^{1-\sigma_3}$ mit $\alpha\in K$.[9] Also folgt aus $\alpha^{1-\sigma_3}=N_{K/k_1}\alpha\cdot(N_{K/k_2}\alpha)^{-s_2}$, dass $\dfrac{N_{K/k_1}\alpha}{\beta_1}=\dfrac{(N_{K/k_2}\alpha)^{s_2}}{\beta_2}\in P$ ist, und dass daher $N_K\alpha=-a^2$ mit $a\in P$ gilt. Mithin ist, für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades von K, die Summe der Exponenten von (α) für die Konjugierten von $\mathfrak{p}$ notwendig gerade, so dass, wegen $\mathfrak{p}^2=N_{K/k_1}\mathfrak{p}\cdot N_{K/k_2}\mathfrak{p}\cdot(N_{K/k_3}\mathfrak{p})^{-s_3}$, das Ideal (α) sich in der Form $(\alpha)=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ mit Idealen $\mathfrak{a}_i$ von k_i darstellen lässt, w.z.b.w.

HILFSSATZ 15. *Es sei* $\mathfrak{a}_i$ *ein Ideal von* k_i *und es sei* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3=(\alpha)$ $(\alpha\in K)$ *ein Hauptideal in* K. *Dann gehört jedes* $\mathfrak{a}_i$ *notwendig zu einer ambigen Idealklasse von* k_i/P. *Wenn* K *reell und* $\kappa(K)=0$ *ist, so hängt das Vorzeichen von* $N_K\alpha$ *nicht von der speziellen Auswahl des Erzeugenden* α *ab. Falls dabei* $N_K\alpha>0$ *ist, so gibt es für jedes* i *eine Zahl* $\rho_i\in k_i$ *mit*

$$\mathfrak{a}_i^{1-s_i}=(\rho_i),\quad N_{k_i}\rho_i=1.$$

Falls aber $N_k\alpha<0$ *ist, so gibt es solch eine* ρ_i *nur für* i *mit* $N_{k_i}\varepsilon_i=-1$. *Wenn dagegen entweder* K *imaginär ist, oder* $\kappa(K)=1$ *ist, so kann jedes* $\mathfrak{a}_i^{1-s_i}$ *von einer Zahl* $\rho_i\in k_i$ *mit* $N_{k_i}\rho_i=1$ *erzeugt werden.*

Beweis. Alle Behauptungen sind ohne weiteres klar nach Hilfssatz 7 und nach

$$\mathfrak{a}_i^{1-s_i}=\frac{(N_{K/k_i}\alpha)}{N_{k_1}\mathfrak{a}_1\cdot N_{k_2}\mathfrak{a}_2\cdot N_{k_3}\mathfrak{a}_3}.$$

HILFSSATZ 16. $\mathfrak{r}_i$ *bedeute ein ambiges Ideal von* k_i *und* ρ *eine Zahl von* K *mit* $(\rho)^2=(r)$, $r\in P$. *Dann ist*

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3:(\rho))\}=\begin{cases}2^{t-5}\,(\mathfrak{e}:\mathfrak{e}^*), & \\ & \text{für} \\ 2^{t-3}\,(\mathfrak{e}:\mathfrak{e}^*), & \end{cases}\quad \begin{matrix}K \text{ reell}, \\ \\ K \text{ imaginär},\end{matrix}$$

[9] Vgl. [2], S. 449.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

wobei t die Anzahl der in K/P sich verzweigenden Primzahlen ist.

Beweis. Es ist ersichtlich $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \supset (\rho)$ und

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 : (1)) = 2^t.$$

Nun bedeute ρ_0 eine Zahl mit $\rho_0^2 \in P$ von K. Dann ist

$$((\rho_0) : (1)) = \begin{cases} 2, & \text{ween } K \ni \sqrt{-1} \text{ ist.} \\ 2^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner ist nach Hilfssatz 6

$$((\rho) : (\rho_0)) = (\mathbf{e}^* : \pm \mathbf{e}^2).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}(\mathbf{e} : \mathbf{e}^*)(\mathbf{e}^* : \pm \mathbf{e}^2) &= (\mathbf{e} : \pm \mathbf{e}^2) \\ &= \begin{cases} 2^3, & \text{wenn } K \text{ reell ist.} \\ 2^2, & \text{wenn } K \ni \sqrt{-1} \text{ ist.} \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, denn es ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 : (\rho)) &= \frac{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 : (1))}{((\rho) : (\rho_0))\,((\rho_0) : (1))} \\ &= \frac{2^t(\mathbf{e} : \mathbf{e}^*)}{((\rho_0) : (1))\,(\mathbf{e} : \pm \mathbf{e}^2)}.\end{aligned}$$

SATZ 4. *Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit den drei quadratischen Teilkörpern k_1, k_2 und k_3. $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{h}_i$ sei die Idealklassengruppe von K bzw. k_i $(i = 1, 2$ oder $3)$, und $\mathbf{e}$ bzw. $\mathbf{e}_i$ sei die Einheitengruppe von K bzw. k_i. Es bedeute $\mathfrak{h}_{i,0}$ die Gruppe der ambigen Idealklassen von k_i/P, und es bedeute $\mathfrak{h}'_{i,0}$ die Gruppe derjenigen Idealklassen von k_i, welche ambige Ideale von k_i/P enthalten. Man bezeichne mit $e(p)$ die Verzweigungsordnung in K/P einer rationalen Primzahl p, und man bezeichne mit $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{h}_0$ das Bild bzw. der Kern des Homomorphismus von $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_3$ in $\mathfrak{H}$, der aus der natürlichen Zuordnung $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3 \to \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ entsteht, wo $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3$ ein Element des direkten Produktes der drei Idealgruppen von k_1, k_2 und k_3 bedeutet. Schliesslich setze man*

$$\mathfrak{h}'_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{h}'_{1,0} \times \mathfrak{h}'_{2,0} \times \mathfrak{h}'_{3,0}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

Dann sind $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{h}_0$ *Gruppen vom Typus* $(2, 2, \ldots)$, *und es ist:*

$$(1) \qquad (\mathfrak{H} : \mathfrak{H}_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^3} \prod\limits_p e(p), & \textit{wenn } K \textit{ reell und } -1 \textit{ kein Normenrest von } K/P \textit{ mod. irgendeine rationale Primzahl } p \textit{ ist.} \\ \dfrac{1}{2^2} \prod\limits_p e(p), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$(2) \qquad (\mathfrak{h}_0 : \mathfrak{h}_0') = \begin{cases} 2, & \textit{wenn } K \textit{ reell und } -1 \textit{ Normenrest von } K/P \textit{ mod. jede rationale Primzahl } p \textit{ ist, und wenn zudem mindestens ein } k_i \textit{ keine Einheit } \eta_i \textit{ mit } N_{k_i}\eta_i = -1 \textit{ enthält.} \\ 1. & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$(3) \qquad (\mathfrak{h}_0' : 1)^{10)} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_p e(p)}{(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3)}, & \textit{wenn } K \textit{ reell ist, und wenn zudem jeder } k_i \textit{ eine Einheit } \eta_i \textit{ mit } N_{k_i}\eta_i = -1 \textit{ enthält.} \\ \dfrac{\prod\limits_p e(p)}{2(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3)}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Dass $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{h}_0$ vom Typus $(2, 2, \ldots)$ sind, folgt, zusammen mit (1), unmittelbar aus Hilfssatz 12, Hilfssatz 13 und Hilfssatz 15, und (2) folgt aus Hilfssatz 14 und Hilfssatz 15. Nun sei t bzw. t_i die Anzahl der Primzahlen, die in der Diskriminante von K/P bzw. k_i/P aufgehen. Dann ist bekanntlich

$$(\mathfrak{h}_{i,0}' : 1) = \begin{cases} 2^{t_i - 2} (\mathfrak{e}_i : \mathfrak{e}_i^*) & \text{für} \quad k_i \text{ reell.} \\ 2^{t_i - 1} (\mathfrak{e}_i : \mathfrak{e}_i^*) = 2^{t_i - 1} & \qquad\ \ k_i \text{ imaginär.} \end{cases}$$

Also ist nach Hilfssatz 16

$$(\mathfrak{h}_0' : 1) = \frac{\prod\limits_i (\mathfrak{h}_{i,0}' : 1)}{(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 : (\rho))} = \frac{2^{\sum\limits_i t_i - t - 1} \prod\limits_i (\mathfrak{e}_i : \mathfrak{e}_i^*)}{(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^*)}$$
$$= \frac{\prod\limits_p e(p) \cdot \prod\limits_i (\mathfrak{e}_i : \mathfrak{e}_i^*)}{2(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^*)},$$

wo $\mathfrak{r}_i$, ρ die gleichen Bedeutungen wie bei Hilfssatz 16 haben. Nun folgt aus Hilfssatz 2

10) Hierbei bedeutet 1 das Einselement der Idealklassengruppe.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

$$(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^*) = 2^{-\kappa(K)} (\mathfrak{e} : \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3) \prod_i (\mathfrak{e}_i : \mathfrak{e}_i^*).$$

Daher ist

$$(\mathfrak{h}_0' : 1) = \frac{\prod_p e(p)}{2^{1-\kappa(K)}(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3)},$$

was nichts anderes als (3) ist.

Satz 5. *Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit den drei quadratischen Teilkörpern k_1, k_2 und k_3, $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2$ oder $3)$ die Einheitengruppe von K bzw. k_i und h bzw. h_i die Klassenzahl von K bzw. k_i. Setzt man dann $Q = (\mathfrak{e} : \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3)$, so gilt*

$$h = \begin{cases} \dfrac{1}{2^2} Q h_1 h_2 h_3 & \\ & \text{für} \\ \dfrac{1}{2} Q h_1 h_2 h_3 & \end{cases} \begin{matrix} K \text{ reell.} \\ \\ K \text{ imaginär.} \end{matrix}$$

Beweis. Mit Bezeichnungen von Satz 4 ist

$$h = \frac{(\mathfrak{H} : \mathfrak{H}_0)}{(\mathfrak{h}_0 : 1)} h_1 h_2 h_3.$$

Man setze jetzt

$$\iota = \begin{cases} 1, \text{ wenn } K \text{ reell ist.} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\kappa = \kappa(K),$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, \text{ wenn } K \text{ reell und } -1 \text{ Normenrest von } K/P \text{ mod. jede } p \text{ ist.} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist nach Satz 4

$$(\mathfrak{h}_0 : 1) = 2^{\iota\lambda(1-\kappa)} \cdot \frac{\prod_p e(p)}{2^{1-\kappa} Q},$$

$$(\mathfrak{H} : \mathfrak{H}_0) = 2^{-2-\iota(1-\lambda)} \cdot \prod_p e(p).$$

Also ist

$$\frac{(\mathfrak{H} : \mathfrak{H}_0)}{(\mathfrak{h}_0 : 1)} = 2^{-2-\iota(1-\lambda)-\iota\lambda(1-\kappa)+1-\kappa} Q$$
$$= 2^{-1-\iota+\kappa(\iota\lambda-1)} Q = 2^{-1-\iota} Q,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

denn $\kappa = 1$ liefert $\iota\lambda = 1$. Damit ist der Satz bewiesen.

Anschliessend beweisen wir noch den folgenden

SATZ 6. *Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper mit den drei quadratischen Teilkörpern k_1, k_2 und k_3, und es sei $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von k_i. Man setze ferner voraus, dass $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ein Hauptideal von K ist. Dann hat $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ dann und nur dann eine Darstellung $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)$ $(\alpha_i \in k_i)$, wenn $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ durch eine Zahl $\alpha \in K$ mit $N_K\alpha > 0$ erzeugt wird. Damit es ein Ideal $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ohne fragliche Darstellung gibt, ist notwendig und hinreichend, dass zwar -1 Normenrest von K/P mod. jede rationale Primzahl p ist, aber es keine Einheit η mit $N_K\eta = -1$ von K gibt.*

Beweis. Ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, so gilt $N_K\alpha > 0$ für $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = (\alpha)$, $N_K\alpha > 0$, so ist natürlich $N_K\alpha = a^2$ $(a \in P)$, also ist $N_{k_i}\left(\frac{N_{K/k_i}\alpha}{a}\right) = 1$ $(i = 1,\ 2$ und $3)$. Daher ist nach Hilbert $\frac{N_{K/k_i}\alpha}{a} = \alpha_i'^{1-s_i}$ $(\alpha_i' \in k)$ und

$$\alpha^2 = N_{K/k_1}\alpha \cdot N_{K/k_2}\alpha \cdot (N_{K/k_3}\alpha)^{-s_3} = \alpha_1'^{1-s_1}\alpha_2'^{1-s_2}\alpha_3'^{1-s_3}a$$
$$= \alpha_1'^2\alpha_2'^2\alpha_3'^2 \frac{a}{N_{k_1}\alpha_1' \cdot N_{k_2}\alpha_2' \cdot N_{k_3}\alpha_3'}.$$

Da dann $\frac{a}{N_{k_1}\alpha_1' \cdot N_{k_2}\alpha_2' \cdot N_{k_3}\alpha_3'}$ in K eine Quadratzahl ist, hat α sicher eine Darstellung $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ $(\alpha_i \in k_i)$.[11] Damit ist die erste Behauptung bewiesen.[12] Die zweite Behauptung folgt ohne weiteres aus der ersten Behauptung und Hilfssatz 14.

§ 5. Zusätze und Beispiele.

Zusatz 1. *Es sei K reell und es sei η eine Einheit mit $\eta = \eta_1\eta_2\eta_3$ von K, wo $\eta_i \in \mathbf{e}_i$, $\eta_i \gtreqqless 1$ und $N_{k_1}\eta_1 = N_{k_2}\eta_2 = N_{k_3}\eta_3 = g$ $(g = \pm 1)$ ist. Setzt man dann*

---

[11] Vgl. den Beweis von Hilfssatz 5.

[12] Diese Tatsache ergibt sich auch wie folgendes. Es bedeute $\mathfrak{r}_i$ ein ambiges Ideal von k_i. Ist dann erstens $\kappa(K) = 0$ und $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = (\rho)(\rho \in K)$, so ist nach Hilfssatz 2 und Hilfssatz 6 $(\rho) = (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3)$ $(\rho_i \in k_i)$. Nach Hilfssatz 15 ist daher notwendig $N_K\alpha < 0$, wenn $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 = (\alpha)$ ist und keinesweges $(\alpha) = (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)$ $(\alpha_i \in k_i)$ gilt. Ist zweitens $\kappa(K) = 1$, $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = (\rho)$ und nie $(\rho) = (\rho_1)(\rho_2)(\rho_3)$, so gilt nach Hilfssatz 2 und Hilfssatz 6 $\rho^2/r = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\eta^2$ $(r \in P$, η Einheit von $K)$, und r ist in K keine Quadratzahl. Also ist nach Hilfssatz 3 $N_{K/k}\rho < 0$.

$$\xi_0 = \eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_1 + \eta_2 + g\eta_3$$
$$\xi_1 = \eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_1 - \eta_2 - g\eta_3$$
$$\xi_2 = \eta_1\eta_2\eta_3 - \eta_1 + \eta_2 - g\eta_3$$
$$\xi_3 = \eta_1\eta_2\eta_3 - \eta_1 - \eta_2 + g\eta_3$$
$$S_K\xi_j = c_j \qquad (j = 0,\ 1,\ 2\ \textit{und}\ 3),$$

so ist

$$\sqrt{\eta} = \frac{1}{4}(\sqrt{c_0} + \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3}).$$

Überdies gehört $\sqrt{\eta}$ *dann und nur dann zu* K, *wenn irgendein* c_j ($j=0$, 1, 2 *oder* 3) *in* K *eine Quadratzahl ist.*

Beweis. Leicht zu sehen ist zunächst

$$\sqrt{\eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{\eta}} + \frac{\xi_1}{\sqrt{\eta}} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\eta}} + \frac{\xi_3}{\sqrt{\eta}}\right),$$

und

$$\frac{\xi_j^2}{\eta} = c_j \qquad \text{für jedes } j.$$

Im Falle von $g=1$ ist es klar, dass $\xi_j \geqq 0$ für jedes j ist. Dies ergibt sich auch im Falle von $g=-1$ in der Tat daraus, dass für jede Einheit $\eta_i > 1$ von $k_i \neq P(\sqrt{5})$ sogar $\eta_i > 2$ und für jede Einheit $\eta_i > 1$ von $k_i = P(\sqrt{5})$ sogar $\eta_i > \frac{3}{2}$ gilt. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Ist nun $\sqrt{\eta} \in K$, so gehört jede $\sqrt{c_j}$ ersichtlich zu K. Ist umgekehrt $\sqrt{\eta} \notin K$, ist nämlich $K' = K(\sqrt{\eta}) \neq K$, so ist $S_{K'/K}\sqrt{\eta} = 0$. Daher ist für jedes j notwendig $\sqrt{c_j} \notin K$, was die zweite Behauptung ergibt.

Aus Zusatz 1 folgt ohne weiteres der

Zusatz 2. *Es sei* η *eine Einheit mit* $N_k\eta = 1$ *eines quadratischen Zahlkörpers* k. *Dann ist*[13)]

$$\sqrt{\eta} = \frac{\sqrt{S_k(\eta+1)} + \sqrt{S_k(\eta-1)}}{2}.$$

Mittels der bisher erhaltenen Resultate und Zusätze können wir die Klassenzahl und ein System der Grundeinheiten eines bizyklischen biquadratischen

13) Vgl. [7], S. 395. Hierbei ist ja $S_k(\eta+1) = N_k(\eta+1)$, $S_k(\eta-1) = -N_k(\eta-1)$.

Zahlkörpers K sehr leicht numerisch aus denen der quadratischen Teilkörper von K berechnen.

Beispiel 1. $K=P(\sqrt{6}, \sqrt{7})$

$$\begin{array}{llll} \Delta_1=6, & \Delta_2=7, & \Delta_3=42 & \\ h_1=1, & h_2=1, & h_3=2 & \\ \varepsilon_1=5+2\sqrt{6}, & \varepsilon_2=8+3\sqrt{7}, & \varepsilon_3=13+2\sqrt{42}, & \kappa(K)=0 \\ \delta_1=3, & \delta_2=2, & \delta_3=7 & \end{array}$$

Beziehungen zwischen δ_i: $\delta_1\delta_2 \underset{2}{=} 1\ (K)$, $\delta_3 \underset{2}{=} 1\ (K)$

Grundeinheiten von K: $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, $\sqrt{\varepsilon_3}$, ε_2, $Q=4$

Kassenzahl von K: $h=\frac{1}{4}\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 2=2$

Nach Zusatz 2 ist

$$\sqrt{\varepsilon_1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \quad \sqrt{\varepsilon_2}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}, \quad \sqrt{\varepsilon_3}=\sqrt{7}+\sqrt{6},$$

also ist

$$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}=\frac{6+3\sqrt{6}+2\sqrt{7}+\sqrt{42}}{2}.$$

Beispiel 2. $K=P(\sqrt{5}, \sqrt{17})$

$$\begin{array}{llll} \Delta_1=5, & \Delta_2=17, & \Delta_3=85 & \\ h_1=1, & h_2=1, & h_3=2 & \\ \varepsilon_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & \varepsilon_2=4+\sqrt{17}, & \varepsilon_3=\dfrac{9+\sqrt{85}}{2}, & \kappa(K)=1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= S_K(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)=121 \\ c_1 &= S_K(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=125 \\ c_2 &= S_K(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=153 \\ c_3 &= S_K(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)=85 \end{aligned}$$

Da $\sqrt{c_0}\in K$ ist, gehört $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ nach Zusatz 1 zu K.[14)]

Grundeinheiten von K: $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, ε_2, ε_3, $Q=2$

Klassenzahl von K: $h=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2=1$

14) Vgl. den Beweis von Satz 1. Daraus folgt auch $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\in K$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000088 Published online by Cambridge University Press

Ferner ist

$$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = \frac{1}{4}(\sqrt{c_0}+\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}+\sqrt{c_3}) = \frac{11+5\sqrt{5}+3\sqrt{17}+\sqrt{85}}{4}.$$

Beispiel 3. $K = K(\sqrt{70}, \sqrt{-14})$

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = 70, & \Delta_2 = -14, & \Delta_3 = -5 \\ h_1 = 2, & h_2 = 4, & h_3 = 2 \\ \varepsilon_1 = 251 + 30\sqrt{70}, & \zeta_2 = -1, & \zeta_3 = -1 \\ \delta_1 = 14, & \delta_2 = 14, & \delta_3 = 5 \end{array}$$

Beziehung zwischen δ_i : $\delta_1\delta_2 \underset{2}{=} 1 \ (K)$

Grundeinheit von K : $\sqrt{-\varepsilon_1}$, $Q = 2$

Klassenzahl von K : $h = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 16$

Nach Zusatz 2 ist $\sqrt{\varepsilon_1} = 3\sqrt{14}+5\sqrt{5}$, also ist $\sqrt{-\varepsilon_1} = 3\sqrt{-14}+5\sqrt{-5}$.

Beispiel 4. $K = P(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = 2, & \Delta_2 = -1, & \Delta_3 = -2 \\ h_1 = 1, & h_2 = 1, & h_3 = 1 \\ \varepsilon_1 = 1+\sqrt{2}, & \zeta_2 = \sqrt{-1}, & \zeta_3 = -1 \\ \delta_1 = 2, & \delta_2 = 2, & \delta_3 = 2. \end{array}$$

Da δ_1 "trivial" ist, ist ε_1 eine Grundeinheit von K. $\mathbf{D}(\varepsilon_1^*, \zeta_2, \zeta_3)/\mathbf{D}_0(\varepsilon_1^*, \zeta_2, \zeta_3)$ wird durch einzige Beziehung $\delta_2 \underset{2}{=} 1 \ (K)$ vertreten, und daher $\sqrt[4]{-1} \in K$, $Q = 2$.

Klassenzahl von K : $h = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. Brauer, Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers. Math. Nachr., **4** (1951), S. 158-174.

[2] C. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, vol. II, Part **9** (1933), S. 365-476.

[3] H. Hasse, Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern. J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), S. 45-51.

[4] H. Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Akademie-Verlag, Berlin (1952).

[5] G. Herglotz, Über einen Dirichletschen Satz. Math. Zeitschr., **12** (1922), S. 225-261.

[6] T. Kubota, Über die Beziehung der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers. Nagoya Math. J., **6** (1953), S. 119-127.

[7] S. Kuroda, Über den Dirichletschen Körper. J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, Vol. IV, Part **5** (1943), S. 383-406.
[8] S. Kuroda, Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper. Nagoya Math. J., **1** (1950), S. 1-10.
[9] H. Nehrkorn, Über absolute Idealklassengruppe und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern. Abh. Math. Sem. Hamburg, **9** (1933), S 318-334.

Mathematisches Institut
Universität zu Nagoya