SUR LES ANNEAUX PARTIELLEMENT ORDONNÉS

G. Thierrin

(received December 9, 1961)

Un anneau partiellement ordonné A est un anneau sur lequel est définie une relation d'ordre partiel telle que:

1. $a \geq b$ entraîne $a + c \geq b + c$ pour tout $c \in A$.

2. $a \geq o$ et $b \geq o$ entraînent $ab \geq o$.

Si la relation d'ordre est une relation d'ordre total, l'anneau A est dit un anneau totalement ordonné.

Il est bien connu (Théorème d'Artin-Schreier [1]) que, pour qu'un corps commutatif K puisse être totalement ordonné, il faut et il suffit que la relation $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = o$ entraîne $a_1 = \ldots = a_n = o$. Ce théorème a été généralisé par T. Szele [4] qui a montré que, pour qu'un corps quelconque K puisse être totalement ordonné, il faut et il suffit que le demi-groupe additif et multiplicatif S, engendré par les éléments de K qui sont des carrés non nuls, ne contienne pas l'élément zéro de K. Ce résultat a été étendu au cas d'un anneau d'intégrité par R. E. Johnson [2] de la manière suivante.

Rappelons d'abord qu'un anneau d'intégrité est un anneau $A \neq \{o\}$ ne contenant pas de diviseurs propres de zéro. Désignons par A* l'ensemble des éléments non nuls de A. Un élément $a \in A^*$ est dit pair s'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_n \in A^*$ tels que a soit le produit des 2n éléments $a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n$ pris dans un certain ordre. Désignons par S le demi-groupe additif engendré par les éléments pairs de A*. On a:

Canad. Math. Bull. vol. 5, no. 2, May 1962.

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-013-6 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 1 (R. E. Johnson). Pour que l'anneau d'intégrité A puisse être totalement ordonné, il faut et il suffit que $S \subseteq A^*$.

Ce théoreme va nous permettre de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur un anneau une relation d'ordre partiel qui en fasse un anneau partiellement ordonné, isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux d'intégrité totalement ordonnés.

1. Soit A un anneau quelconque. Un élément $a \in A$ sera dit <u>pair</u>, s'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_n \in A$, tels que a soit le produit des 2n éléments $a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n$ pris dans un certain ordre. Nous utiliserons la notation $a = a(a_1, \ldots, a_n)$ pour indiquer les composantes intervenant dans la formation de a.

Un idéal M de A sera dit un <u>F-idéal</u>, si la relation
$a(a_1, a_2, \ldots, a_m) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n) + \ldots + d(d_1, d_2, \ldots, d_r) \in M$
entraîne
$a_1 a_2 \ldots a_m \in M, \; b_1 b_2 \ldots b_n \in M, \ldots, d_1 d_2 \ldots d_r \in M$.

Il est immédiat que l'intersection de F-idéaux est encore un F-idéal.

Si l'idéal $\{o\}$ est un F-idéal, l'anneau A sera dit un F-anneau. Un idéal M d'un anneau quelconque A est un F-idéal si et seulement si l'anneau-quotient A/M est un F-anneau. Remarquons qu'un anneau commutatif est un F-anneau si et seulement si la relation $a^2 + b^2 + \ldots + d^2 = o$ entraîne $a = b = \ldots = d = o$.

Le théorème de R. E. Johnson peut maintenant s'exprimer: Pour qu'un anneau d'intégrité puisse être totalement ordonné, il faut et il suffit qu'il soit un F-anneau.

Rappelons qu'un idéal P d'un anneau A est dit <u>premier</u> si $aAb \subseteq P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$, <u>complètement premier</u> si $ab \in P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$. Un anneau A est dit compressif (cf. [5]) si $a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 = o$ entraîne $a_1 a_2 \ldots a_n = o$; on montre

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-013-6 Published online by Cambridge University Press

alors que $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} = o$, où $r_1, \ldots, r_n$ sont des entiers positifs, entraîne aussi $a_1 a_2 \ldots a_n = o$. Tout idéal premier minimal d'un anneau compressif A est complètement premier et l'idéal $\{o\}$ est l'intersection des idéaux complètement premiers minimaux de A. On voit facilement que tout F-anneau est compressif.

THÉORÈME 2. Tout idéal premier minimal P d'un F-anneau est un F-idéal complètement premier.

Preuve. Si $P = A$, c'est trivial. Soit $P \neq A$. On sait que l'ensemble $B = A - P$ est un m-système maximal ne contenant pas zéro (cf. [3]). Comme A est un F-anneau, A est donc compressif, ce qui entraîne que P est complètement premier et que B est un demi-groupe multiplicatif maximal ne contenant pas zéro. Soit

$x = a(a_1, a_2, \ldots, a_m) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n) + \ldots + d(d_1, d_2, \ldots, d_r) \in P$

où a, b, ..., d sont des éléments pairs. Nous devons montrer que $a_1 a_2 \ldots a_m \in P$, $b_1 b_2 \ldots b_n \in P$, ..., $d_1 d_2 \ldots d_r \in P$. Supposons que tel ne soit pas le cas et que, par exemple, $a_1 a_2 \ldots a_m \notin P$.

Soit X le demi-groupe multiplicatif engendré par x. L'anneau A, étant un F-anneau, ne contient pas d'éléments nilpotents $\neq o$. Par conséquent, $o \notin X$; car si $o \in X$, alors $x^n = o$, donc $x = o = a + b + \ldots + d$, ce qui entraîne en particulier $a_1 a_2 \ldots a_m = o$, contre notre hypothèse.

On a, d'autre part, $o \notin BX$. En effet, si $rx^n = o$ avec $r \in B$, alors $rx = o$, puisque A est compressif, et donc $r^2 x = o$. Par conséquent $r^2 a + r^2 b + \ldots + r^2 d = o$. Les éléments $r^2 a$, $r^2 b$, ... sont des éléments pairs avec comme composantes $(r, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $(r, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ... Comme A est un F-anneau, on a donc en particulier $ra_1 a_2 \ldots a_m = o \in P$. Mais P est complètement premier et $r \notin P$. Donc $a_1 a_2 \ldots a_m \in P$, contre notre hypothèse.

Soit T le demi-groupe multiplicatif engendré par les demi-groupes X et B. Si $o \in T$, il existe alors des éléments $r_1, r_2, \ldots, r_k \in B$ et $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tels que $r_1x_1r_2x_2 \ldots r_kx_k = o$, ce qui entraîne $r_1r_2 \ldots r_kx_1x_2 \ldots x_k = o$, car $\{o\}$ est l'intersection des idéaux complètement premiers de A, puisque A est compressif. Comme B et X sont des demi-groupes, on a donc $o \in BX$, ce qui est impossible. Par conséquent le demi-groupe T ne contient pas zéro. Comme B est maximal et que $B \subseteq T$, on a $B = T$. D'autre part $x \in P$ et $x \in T = B = A - P$, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, $a_1a_2 \ldots a_m \in P$ et P est un F-anneau.

THÉORÈME 3. Pour qu'un anneau $A \neq \{o\}$ soit isomorphe à une somme sous-directe de F-anneaux d'intégrité, il faut et il suffit qu'il soit un F-anneau.

Preuve. La condition est nécessaire, puisque l'intersection de F-idéaux est encore un F-idéal. Montrons qu'elle est suffisante. L'anneau A, étant un F-anneau, ne contient pas d'éléments nilpotents $\neq o$. Par conséquent (cf. [3]), l'idéal $\{o\}$ est l'intersection des idéaux premiers minimaux P_i de A. D'après le théorème 2, ces idéaux P_i sont des F-idéaux complètement premiers et donc l'anneau A est isomorphe à une somme sous-directe des anneaux A/P_i qui sont des F-anneaux d'intégrité.

Corollaire. Pour qu'il existe sur un anneau $A \neq \{o\}$ une relation d'ordre partiel, qui en fasse un anneau partiellement ordonné, isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux d'intégrité totalement ordonnés, il faut et il suffit que A soit un F-anneau.

Preuve. Cela découle immédiatement de ce théorème et du théorème de R.E. Johnson.

2. Soit A un anneau quelconque.

Désignons par F l'intersection de tous les F-idéaux de A. Cet ensemble F est un F-idéal dont nous allons donner une caractérisation.

Soit M un idéal de A. Désignons par L(M) l'ensemble de tous les éléments $x \in A$, pour lesquels il existe des éléments pairs de A, soient

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m), \ldots, d(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

$$r(r_1, r_2, \ldots, r_p), \ldots, v(v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

vérifiant les relations:

1) $x = a_1 a_2 \ldots a_m + \ldots + d_1 d_2 \ldots d_n$

2) $a + \ldots + d + r + \ldots + v \in M.$

Il est facile de voir que L(M) est un idéal et que $M \subseteq L(M)$. De plus, M est un F-idéal si et seulement si $M = L(M)$. Posons:

$$F_1 = L(\{o\}), \; F_2 = L(F_1), \; \ldots, \; F_n = L(F_{n-1}), \; \ldots$$

Nous obtenons alors une chaîne d'idéaux:

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$$

THÉORÈME 4. Si F est l'intersection de tous les F-idéaux de A, on a

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

Preuve. Montrons d'abord que l'idéal $F^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ est un F-idéal et donc que $F \subseteq F^*$. Soit

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n) + \ldots + d(d_1, d_2, \ldots, d_r) \in F^*,$$

où a, b, ..., d sont des éléments pairs. Il existe un indice k tel que

$$a + b + \ldots + d \in F_k$$

Comme o est un élément pair, on a

$$a + b + \ldots + d + o \in F_k$$

Par conséquent, d'après la définition de F_{k+1}, on a

$a_1 a_2 \ldots a_m \in F_{k+1}$, $b_1 b_2 \ldots b_n \in F_{k+1}$, ..., $d_1 d_2 \ldots d_r \in F_{k+1}$

Comme $F_{k+1} \subseteq F^*$, F^* est un F-idéal.

Montrons ensuite que $F^* \subseteq F$. Il est évident que si $F_k \subseteq F$, alors $F_{k+1} \subseteq F$. Or $F_1 \subseteq F$; donc $F_k \subseteq F$ pour tout indice k.

RÉFÉRENCES

1. E. Artin und O. Schreier, Algebraische Konstruction realler Kőrper, Abh. Math. Sem. Univ. Hambourg, 5(1926), 85-89.

2. R. E. Johnson, On ordered domains of integrity, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 414-416.

3. N. H. McCoy, Prime ideals in general rings, Amer. J. Math., 71 (1949), 823-833.

4. T. Szele, On ordered skew fields, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 410-413.

5. G. Thierrin, Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque, Bull. Acad. Royale de Belgique, 43 (1957), 124-132.

Université de Montréal.

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-013-6 Published online by Cambridge University Press