UNE NOTE SUR DES SYSTÈMES DE TARIFICATION BASÉS SUR DES MODÈLES DU TYPE POISSON COMPOSÉ

Ove Lundberg
Stockholm

Hans Bühlmann traite dans son ouvrage „Optimale Prämienstufensysteme" (1964) principalement le problème de trouver l'estimation optimale de la prime de la n-ième période à partir des observations de sinistres au cours des périodes précédentes.

Max Gürtler a traité dans le „Bonus ou Malus" du Astin Bulletin vol. III part I deux systèmes différents pour la détermination de la prime individuelle pour l'assurance automobile, c'est-à-dire

a) système „Absence de sinistre"

b) système „Nombre de sinistre".

A l'aide de simples modèles (examples page 56) pour le groupement de portefeuilles de risques bons et lourds Gürtler étudie l'effet des deux systèmes et en tire des conclusions générales sur l'applicabilité des systèmes. Gürtler souligne d'abord que le système b) utilise considérablement mieux l'information, parce que tous les sinistres y sont considérés et non pas, comme dans le système a), seulement le premier sinistre étant registré pour chaque assurance.

Marcel Derron traite dans „A theoretical study of the no-claim bonus problem" du même cahier de la publication la quote-part du ER (Error ratio) qu'il définit comme une quote-part égale au montant absolut de la différence entre la prime payée et la vraie prime divisée par la prime payée. Il calcule la quote-part du ER pour le modèle de Gürtler et pour des modèles alternatifs et cherche le système de bonification qui rend la quote-part du ER aussi petite que possible pour le modèle choisi.

Pierre Delaporte a illustré, dans son ouvrage „Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

sur le risque" à la conférence à Trieste, de quelle façon les moyennes successives modelées par rapport à l'expérience donnent non seulement les primes correctes selon l'espérance mathématique mais amènent encore la moindre moyenne d'écarts quadratiques. Cela implique que la méthode des moyennes successives est la plus efficace au sens de la variance minimum.

Il semble que les essais sur des modèles mentionnés ci-dessus faits par Gürtler et Derron ainsi que les résultats très intéressants de Delaporte puissent être montrés plus généralement par les méthodes appliquées dans les processus aléatoires du type Poisson composé. Il est pour ce sujet intéressant d'essayer de suivre l'idée principale de Bühlmann.

Soit $U(x)$ une fonction, indépendente du temps, de répartition des risques individuels ξ, la probabilité pour qu'une personne ou voiture ait n sinistres au cours de temps $(0, t)$ est

$$P(\nu_t = n) = P_n(t) = \int_0^\infty \frac{(t\,x)^n}{n!}\, e^{-tx}\, dU(x),\; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

La somme des probabilités des risques individuels est

$$\int_0^\infty d\,U(x) = 1. \qquad (2a)$$

Supposant que la moyenne de la variable ν_t est le paramètre du temps (temps opérationel), nous pouvons sans limitation de généralité supposer que l'espérance mathématique du risque individuel

$$\int_0^\infty x\,d\,U(x) = 1. \qquad (2b)$$

En effet, si l'espérance mathématique du risque ξ soit égale à m, nous pouvons définir la répartition du risque $\xi : m$. Nous désignons la variance du risque par b, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty (x - 1)^2\, d\,U(x) = b. \qquad (2c)$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

Le modèle dans lequel t est un paramètre variable est nommé un processus Poisson composé „au sens restreint" d'après la terminologie de Carl Philipson (voir [9]).

1. *Observations du nombre de sinistres* (variable aléatoire $= \nu_t$).

Tandis que la probabilité que le „vrai" risque à priori est égal à x est $d\,U(x)$, la probabilité conditionnée par l'hypothèse qu'il est survenu n sinistres au cours de temps t est [1])

$$d\,U_n(x) = \frac{\frac{(t\,x)^n}{n!}\,e^{-tx}\,d\,U(x)}{P_n(t)} = \frac{x^n\,e^{-tx}\,d\,U(x)}{\int\limits_0^\infty y^n\,e^{-ty}\,d\,U(y)}. \tag{3}$$

L'espérance mathématique du risque ξ lié par le nombre n de sinistres au cours de temps opérationel t est donné par

$$k_n(t) = E[\xi|\nu_t = n] = E_n[\xi] = \int\limits_0^\infty x\,d\,U_n(x) = \frac{\int\limits_0^\infty x^{n+1}\,e^{-tx}\,d\,U(x)}{\int\limits_0^\infty x^n\,e^{-tx}\,d\,U(x)}. \tag{4}$$

Il est facile de vérifier que la moyenne de la fonction k_ν de la variable aléatoire ν est égale à l'unité pour toutes les valeurs de t

$$E\,[k_\nu(t)] = \sum_{n=0}^\infty k_n(t)\,P_n(t) = 1.$$

C'est-à-dire l'estimation de k_n selon (4) est en moyenne „unbiassed". En passant à la limite $t = 0$ nous obtenons selon (4)

$$k_n(0) = \frac{m_{n+1}}{m_n} \text{ où } m_n = \int\limits_0^\infty x^n\,d\,U(x),$$

et ainsi $k_0(0) = 1$ et $k_1(0) = \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{b+1}{1} = 1 + b$.

---

[1]) OL [8] p. 90 et C Ph [10] et [11]. M. Philipson fait generaliser les formules des probabilités conditionées à C.P.P. „au sens....."

La fonction $k_n(t)$ est dans la théorie des processus aléatoire nommée la fonction d'intensité. Si le paramètre t est fixé nous désignons l'espérance mathématique conditionnée $k_n(t)$ par k_n seulement.

Bühlmann [2] a défini l'estimation optimale par la condition que l'espérance mathématique d'une non-négative fonction d'écart entre la valeur estimée par les observations et la „vraie" valeur est minimum. Si la non-negative fonction est l'écart quadratique et les observations sont représentées par les nombres individuels de sinistres dans un ou plusieurs périodes, l'estimation optimale est donnée par la fonction $k_n(t)$ où n est le nombre total de sinistres au cours du temps t.

Sachant que n sinistres sont survenus dans l'intervalle de temps $(0, t)$, selon la terminologie de Delaporte (voir [3-5]), nous désignons k_n la „prime modelée sur le risque". Soit $U_n(x)$ définit de (3), l'espérance mathématique conditionnée

$$E[(\xi - x_n)^2 \mid \nu_t = n] = E_n[(\xi - x_n)^2] = \int_0^\infty (x - x_n)^2 \, d\, U_n(x)$$

est minimum pour $x_n = k_n$. En effet, cette espérance quadratique est minimum pour l'espérance mathématique de la variable aléatoire conditionnée, c'est-à-dire pour

$$x_n = E_n[\xi] = k_n = \int_0^\infty x \, d\, U_n(x).$$

Cette valeur minimum définit la variance conditionnée du risque

$$D^2[\xi \mid \nu_t = n] = D_n^2[\xi] = E_n[(\xi - k_n)^2] = \int_0^\infty (x - k_n)^2 \, d\, U_n(x) \quad (5a).$$

Selon l'identité

$$(x - k_n)^2 = (x - 1)^2 - (k_n - 1)^2 - 2(k_n - 1)(x - k_n),$$

nous écrivons la variance conditionnée

$$D_n^2[\xi] = \int_0^\infty (x - 1)^2 \, d\, U_n(x) - (k_n - 1)^2 = \sigma_n^2(t). \qquad (5b)$$

Comme fonction de n et t nous la désignons $\sigma_n^2(t)$.

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

La moyenne a priori de ces variances conditionnées, c'est-à-dire la variance du risque par rapport aux ,,primes modelées" selon (4) est dérivée par cette formule et (3), ainsi

$$V_t[\xi] = E[\sigma_\nu^2(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t) P_n(t) = b - \sum_{n=0}^{\infty} (k_n(t) - 1)^2 P_n(t). \quad (6)$$

Par conséquence, la variance par rapport aux ,,primes modelées" fait la différence entre la variance b de la variable aléatoire ξ et la variance des ,,primes modelées" $k_\nu(t)$. La variance totale obtenue par intégration de la fonction $V_t[\xi]$ par rapport à t correspond à ,,das mittlere Portefeuille-risiko des Prämienstufensystems" d'après Bühlmann.

Delaporte [3] regarde l'espérance mathématique — au lieu du risque (c'est-à-dire la variable aléatoire ξ) — du nombre de sinistres ν d'une période N après $N-1$ périodes précédentes avec n sinistres en tout. Delaporte définit l'efficacité de la prime moyenne par rapport à la prime modelée par le quotient, exprimé ici en temps continu,

$$e_t = (V_t - V_\infty) / (V_0 - V_\infty) \text{ où } V = V[\nu].$$

Anticipant $V_\infty[\xi] = 0$ nous définissons ici l'efficacité

$$\bar{e}_t = \frac{V_t[\xi]}{V_0[\xi]} = 1 - \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (k_n(t) - 1)^2 P_n(t) \quad (7)$$

Nous voyons que $\bar{e}_0 = 1$.

Si t tends vers l'infinité nous savons d'un théorème bienconnu de probabilités, que le quotient individuel ν/t tends ,,en probabilité" vers le ,,vrai" risque $x = x_0$. D'autre part, si nous supposons que le quotient n/t est pour très grandes valeurs de t constant et égal à x_0, la répartition conditionnée $U_n(x)$ tends vers la répartition d'unité $\varepsilon(\xi - x_0)$, laquelle fonction est égale à zéro pour $\xi < x_0$ et à l'unité pour $\xi \geq x_0$ (cp. O.L. [8] p. 93). De cela nous avons ,,presque sûrement"

$$\lim_{t \to \infty} k_n(t) = x_0$$

(Ce résultat est une conséquence d'un théorème de Doob op. B. [2] p. 204.)

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

Selon la formule (5a) de la variance σ_n^2 nous pouvons écrire

$$\sigma_n^2 = k_{n+1} \,.\, k_n - k_n^2 = k_n \, (k_{n+1} - k_n). \tag{5c}$$

Par conséquence $\lim \sigma_n^2 = 0$ „presque sûrement" pour $t \to \infty$, et ainsi par (6) „presque sûrement" V_t et l'efficacité $\bar{e}_t$ tendent vers zéro.

Il est facile de prouver qu'à part de „presque sûrement" $\bar{e} = e_t$, où e_t est défini par Delaporte par rapport au nombre de sinistres d'une durée arbitraire après une période avec un nombre connu de sinistres.

Enfin, il est d'intérêt de constater ici que la somme des écarts quadratiques

$$\sum_{n=0}^{\infty} [k_n \, (t) - (a_0 + a_1 \, n)]^2 \, P_n \, (t) \tag{8}$$

est minimisée par

$$a_0 = 1/\,(1 + bt) \;\text{ et }\; a_1 = b/\,(1 + bt)$$

L'approximation linéaire coincide exactement avec l'intensité $k_n \, (t) = (1 + bn)/\,(1 + bt)$, définissant le processus de Polya.

Nous pouvons vérifier ce résultat par une relation fondamentale des processus Poisson composés [1])

$$(n + 1) \, P_{n+1} \, (t) = t \, P_n \, (t) \, k_n \, (t),$$

et par conséquence

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n \, (t) \, P_n \, (t) = 1 \;\text{ et }\; \sum_{n=0}^{\infty} n \;\, k_n \, (t) \, P_n \, (t) = t \, (1 + b).$$

Encore, la somme minimum soit par ces relations exprimée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(k_n - \frac{1 + bn}{1 + bt}\right)^2 P_n \, (t) = \sum_{n=0}^{\infty} (k_n - 1)^2 \, P_n \, (t) - \frac{b^2 \, t}{1 + bt}.$$

Par conséquence nous obtiendrons selon (6) la formule suivante de l'efficacité au sens de la variance minimum

---

[1]) O.L. [8] p. 78.

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

$$\overline{e_t} = \frac{1}{1 + bt} - \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_n - \frac{1 + bn}{1 + bt} \right)^2 P_n(t).$$

Ainsi

$$\overline{e_t} \leqq \frac{1}{1 + bt},$$

où égalité est valide pour $k_n = (1 + bn) / (1 + bt)$, c'est-à-dire pour le modèle de Polya. Entre tous les modèles de Poisson composés ayant la même variance b des risques individuels, le modèle de Polya fait évidemment la plus grande valeur de $\overline{e_t}$.

Le modèle de Polya est caractérisé par la fonction de répartition Pearson type III

$$U(x) = \frac{1}{\Gamma(1/b)} \int_0^{x/b} v^{1/b-1} e^{-v} dv$$

ou

$$k_n(t) = \frac{1 + bn.}{1 + bt}.$$

Nous avons vu que

$$V_t[\xi] = b / (1 + bt) \text{ et } \bar{e}_t = 1 / (1 + bt).$$

La mésure de la variance totale dans l'intervalle (o T) de Bühlmann est égale à

$$\int_0^T V_t \, dt = \int_0^T \frac{b}{1 + bt} dt = \log (1 + bT).$$

2. *Observation du temps d'absence de sinistres* (variable aléatoire $= \tau_0$).

Supposant que les observations individuelles se composent des temps opérationels exacts d'absence de sinistres à partir d'un certain moment, par example le début d'assurance, nous obtenons pour une période d'observation (o T) la fonction d'estimation optimale

$$k\ (t) = \begin{cases} k_1\ (t) \text{ pour } t < T \\ k_0\ (t) \text{ pour } t \geq T \end{cases} \tag{9}$$

où $k_0\ (t)$ et $k_1\ (t)$ sont donnés par (4).

En effet, si le sinistre premier a lieu en $t < T$, c'est-à-dire le temps t_0 d'absence de sinistres est égal à t, la fonction conditionnée de répartition des risques est égale à (cp. (3))

$$d\ U\ (x \mid \tau_0 = t) = d\ U_t\ (x) = \frac{e^{-tx}\ tx\ d\ U\ (x)}{\int\limits_0^\infty e^{-tx}\ tx\ d\ U\ (x)}, \tag{9a}$$

et ainsi pour $t < T$

$$k\ (t) = \int\limits_0^T x\ d\ U_t\ (x) = k_t\ (t).$$

Absence de sinistres au cours du temps (o T) implique

$$k\ (t) = k_0\ (t).$$

Nous avons $E\ [k\ (\xi)] = \int\limits_0^\infty k_1\ (t)\ .\ P_0\ (t)\ .\ k_0\ (t)\ dt + P_0\ (T)\ .\ k_0\ (T)$

$= 1$, ainsi l'estimation est en moyenne „un-biassed".

L'espérance mathématique des écarts quadratiques ou la variance conditionnée est

$$D^2(\xi \mid \tau_0 = t] = D^2_t[\xi] = E_t[(\xi - k(t)\,)^2] = \int\limits_0^\infty [x - k(t)]^2\, d\ U_t\ (x) \tag{10}$$

Selon l'identié

$$[x - k\ (t)]^2 = (x - 1)^2 - (k(t) - 1)^2 - 2\ (k(t) - 1)\ (x - k(t)\ ),$$

nous écrivons la variance conditionnée

$$D^2_t\ [\xi] = \int\limits_0^\infty (x - 1)^2\ d\ U_t\ (x) - (k\ (t) - 1)^2 = \bar{\sigma}^2_T\ (t)$$

La moyenne a priori de ces variations conditionnées, c'est-à-dire la variance du risque par rapport aux „primes modelées" selon (9) est dérivée par cette formule et (9 a), ainsi

$$\overline{V}_T[\xi] = E[\bar{\sigma}_T^2(\tau)] = \int_0^T \bar{\sigma}_T^2(t)\, P_0(t)\, dt + \bar{\sigma}_T^2\, P_0(T) =$$

$$= \int_0^\infty (x-1)^2\, d\,U(x) \left\{ \int_0^T x\, e^{-tx}\, dt + e^{-Tx} \right\} - \int_0^T (k(t)-1)^2\, P_0(t)\, k_0(t)\, dt -$$

$$-(k(T)-1)^2\, P_0(T).$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\overline{V}_T[\xi] = b - \int_0^\infty (k(t)-1)^2\, P_0(t)\, k_0(t)\, dt, \qquad (11)$$

où le second terme est selon (9) une fonction de T.

En effet, la variance totale du risque x par rapport à l'estimation optimale est obtenue par réduçant la variance b du risque de répartition $U(x)$ par la variance de $k(t)$, c'est-à-dire de l'estimation optimale.

La fonction $k_1(t)$ est une fonction positive et non-croissante de t (cp. O.L. [8] p. 76) et ainsi $k_1(0) = 1 + b$ est la valeur supérieure. Pour t finit $k_1(t) > 0$ et pour t infinit $k_1(t) \geq 0$.

Une répartition de $k(t)$ avec une probabilité positive dans $t = \infty$ n'est pas possible. Ainsi, la variance de $k(t)$ est majorée par la distribution ayant la moyenne $= 1$,

$k = 1 + b$ avec la probabilité $1/(1+b)$

$k = 0$ avec la probabilité $b/(1+b)$

Cette distribution a la variance $= b$.

Par conséquence il faut que la variance de $k(t)$ dans la formule (11) soit moindre que b.

Ainsi, contrairement à l'estimation basée sur des observations du nombre de sinistres, quand la variance du risque s'approche „presque sûrement" à zéro (cp. (8)), l'estimation basée sur des observations des temps exacts d'absence de sinistres amène que la variance du risque reste positive même pour T infinite.

Dans le cas du modèle Polya, où $k_0(t)$ et $k_1(t)$ sont définis par (9 a), il est possible d'obtenir une formule explicite de V_T. En la limite nous obtiendrons

$$\overline{V}_\infty = b(1+b)/(1+2b).$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100008904 Published online by Cambridge University Press

Bibliographie

(1) Ammeter, H., A Generalisation of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic-Probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1948.

(2) Bühlmann, H., Optimale Prämienstufensysteme. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1964.

(3) Delaporte, P., Tarification du risque individuel d'accidents d'automobiles par la prime modelée sur le risque, Colloque de l'A.S.T.I.N. Trieste 1963.

(4) Delaporte, P., L'estimation statistique progressive du risque individuel d'accident et la tarification de l'assurance automobile. Bulletin de l'I.I.S. Ottawa 1963.

(5) Delaporte, P., Principes de tarification de l'assurance automobile par la prime modelée sur le risque. Transactions of the 17th International Congres of Actuaries. London 1964.

(6) Derron, M., A theoretical study of the no-claim bonus problem. Astin Bulletin 1963.

(7) Gürtler, M., Bonus ou Malus. Astin Bulletin 1963.

(8) Lundberg, O., On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics. Uppsala 1964 (1940).

(9) Philipson, C., Quelques processus applicables dans l'assurance et dans la biologie. Association Royale des Actuaires Belges. Bruxelles 1963.

(10) Philipson, C., Eine Bemerkung zu Bichsels Herleitung der bedingten zukünftigen Schadenhäufigkeit einer Polya-Verteilung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1964.

(11) Philipson C., The transformed parameter of compound Poisson processes and the effect of an increase of that parameter. Transactions of the 17th International Congress of Actuaries. Edinburgh 1964.

(12) Thyrion, P., Le controle actuariel dans la comptabilité des branches élémentaires. Rapport introductif sur le deuxième thème, point a) au IV Colloque Astin. Trieste 1963.