



# COMPOSITIO MATHEMATICA

## Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques

Pierre-Henri Chaudouard et Gérard Laumon

Compositio Math. **146** (2010), 1416–1506.

[doi:10.1112/S0010437X10004756](https://doi.org/10.1112/S0010437X10004756)



FOUNDATION  
COMPOSITIO  
MATHEMATICA

*The London  
Mathematical  
Society*





# Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques

Pierre-Henri Chaudouard et Gérard Laumon

## ABSTRACT

This work is the geometric part of our proof of the weighted fundamental lemma, which is an extension of Ngô Bao Châu’s proof of the Langlands–Shelstad fundamental lemma. Ngô’s approach is based on a study of the elliptic part of the Hitchin fibration. The total space of this fibration is the algebraic stack of Hitchin bundles and its base space is the affine space of ‘characteristic polynomials’. Over the elliptic set, the Hitchin fibration is proper and the number of points of its fibers over a finite field can be expressed in terms of orbital integrals. In this paper, we study the Hitchin fibration over an open set larger than the elliptic set, namely the ‘generically regular semi-simple set’. The fibers are in general neither of finite type nor separated. By analogy with Arthur’s truncation, we introduce the substack of  $\xi$ -stable Hitchin bundles. We show that it is a Deligne–Mumford stack, smooth over the base field and proper over the base space of ‘characteristic polynomials’. Moreover, the number of points of the  $\xi$ -stable fibers over a finite field can be expressed as a sum of weighted orbital integrals, which appear in the Arthur–Selberg trace formula.

## RÉSUMÉ

Ce travail est la partie géométrique de notre démonstration du lemme fondamental pondéré qui prolonge celle du lemme fondamental de Langlands–Shelstad due à Ngô Bao Châu. L’approche de Ngô repose sur l’étude de partie elliptique de la fibration de Hitchin. Cette fibration a pour espace total le champ des fibrés de Hitchin et pour base l’espace affine des «polynômes caractéristiques». Au-dessus de l’ouvert elliptique, elle est propre et le nombre de points de ses fibres sur un corps fini s’exprime en termes d’intégrales orbitales. Dans cet article, on étudie la fibration de Hitchin au-dessus d’un ouvert plus gros que l’ouvert elliptique, le lieu «génériquement semi-simple régulier». Les fibres ne sont en général ni de type fini ni même séparées. Par analogie avec les troncatures d’Arthur, nous introduisons le champ des fibrés de Hitchin  $\xi$ -stables. Nous montrons que celui-ci est un champ de Deligne–Mumford, lisse sur le corps de base et propre au-dessus de la base des polynômes caractéristiques. Nous exprimons le nombre de points d’une fibre  $\xi$ -stable sur un corps fini en termes d’intégrales orbitales pondérées d’Arthur qui apparaissent dans la formule des traces d’Arthur–Selberg.

---

Received 10 April 2009, accepted in final form 12 December 2009, published online 19 May 2010.

*2000 Mathematics Subject Classification* 14D20 (primary), 11F70, 11F72, 11R39, 22E55 (secondary).

*Keywords:* Hitchin fibration, Higgs bundles, weighted orbital integral, Arthur–Selberg trace formula, Langlands–Shelstad fundamental lemma, weighted fundamental lemma.

This journal is © [Foundation Compositio Mathematica](#) 2010.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1419</b>
1.1	Objectifs	1419
1.2	Fibration de Hitchin pour $SL(n)$	1419
1.3	Troncature	1420
1.4	Comptage et intégrales orbitales pondérées	1421
1.5	Aperçu	1422
<b>2</b>	<b>Morphisme caractéristique</b>	<b>1423</b>
2.1	Notations	1423
2.2	Morphisme caractéristique	1423
2.3	Discriminant	1423
2.4	Quelques propriétés du morphisme caractéristique	1423
2.5	Section de Kostant	1424
2.6	Sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Levi	1424
2.7	Schémas $\text{car}_M$	1424
<b>3</b>	<b>Schémas caractéristiques</b>	<b>1425</b>
3.1	Conventions	1425
3.2	Notations	1425
3.3	Les fibrés $\mathfrak{t}_D$ et $\text{car}_{M,D}$	1426
3.4	Schéma caractéristique $\mathcal{A}_M$	1426
3.5	Morphismes entre schémas caractéristiques	1427
3.6	Caractéristiques elliptiques	1427
3.7	Preuve de la proposition 3.5.1	1427
3.8	Conjugaison et morphisme caractéristique	1429
3.9	Caractéristiques et éléments semi-simples réguliers	1430
3.10	Preuve de la proposition 3.6.2	1432
<b>4</b>	<b>La fibration de Hitchin</b>	<b>1432</b>
4.1	Notations	1432
4.2	Trivialisation générique des $G$ -torseurs	1433
4.3	Réductions des toseurs à un sous-groupe	1433
4.4	Morphisme caractéristique	1433
4.5	Le champ algébrique de Hitchin	1434
4.6	La fibration de Hitchin	1434
4.7	Morphisme $\chi_P$	1434
4.8	Réduction à un sous-groupe parabolique	1435
4.9	Existence de réductions sur un ouvert	1435
4.10	Existence et unicité des réductions	1436
<b>5</b>	<b>Convexe associé à un triplet de Hitchin</b>	<b>1437</b>
5.1	Les espaces $\mathfrak{a}_M$	1437
5.2	Racines et coracines	1438
5.3	Cônes dans $\mathfrak{a}_P$	1439
5.4	Degré d'une réduction	1439
5.5	Convexes associés à un triplet de Hitchin	1440
5.6	Semi-continuité des convexes	1441
5.7	Réductions à des sous-groupes paraboliques adjacents	1442
5.8	Enveloppes convexes associées à un triplet de Hitchin	1445

<b>6</b>	<b>La <math>\xi</math>-stabilité</b>	<b>1446</b>
6.1	Champs de Hitchin $\xi$ -stable	1446
6.2	Le théorème principal	1449
6.3	Les $\xi$ -points de Harder–Narasimhan	1449
<b>7</b>	<b>Description adélique des fibres de Hitchin</b>	<b>1452</b>
7.1	L'ensemble $V$	1452
7.2	Notations	1452
7.3	Descente formelle à la Beauville–Laszlo et uniformisation	1452
7.4	Réductions	1453
7.5	Fonctions $H_P$	1454
7.6	Description adélique des fibres de Hitchin	1454
<b>8</b>	<b>Critère valuatif : existence</b>	<b>1456</b>
8.1	Énoncé	1456
8.2	Quelques mots sur la démonstration	1456
8.3	Notations	1457
8.4	Le théorème 8.1.1 pour le champ $\mathcal{M}$	1457
8.5	Réduction au cas semi-simple	1457
8.6	Les points $m_K$ , $(a, t)$ et $(\bar{a}, \bar{t})$	1459
8.7	Le réel $d$ et le point $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$	1459
8.8	Le sous-groupe de Levi $L$ et les sous-groupes paraboliques $Q_0$ et $Q$	1460
8.9	Quelques notations : $V$ , $i_{R,v}$ , $j_{R,v}$ etc	1460
8.10	Le point $t_a$	1460
8.11	Trivialisation de $m$ sur un ouvert de la fibre spéciale	1460
8.12	Trivialisation de $m$ sur des disques formels de la fibre spéciale	1461
8.13	Trivialisation admissibles de $(\mathcal{E}, \theta, t)$	1462
8.14	Sous-groupes unipotents	1463
8.15	Condition auxiliaire sur $V$	1464
8.16	Constructions de certaines trivialisations admissibles	1464
8.17	Où l'on obtient la contradiction cherchée	1472
<b>9</b>	<b>Séparation du morphisme <math>f^\xi</math></b>	<b>1474</b>
9.1	Énoncé	1474
9.2	Où l'on se ramène à un problème sur un trait	1474
9.3	Étude sur le trait $\text{Spec}(B)$	1475
9.4	Preuve du lemme 9.3.4	1477
<b>10</b>	<b><math>\mathcal{M}^\xi</math> est un champ de Deligne–Mumford</b>	<b>1479</b>
10.1	Énoncé	1479
10.2	Démonstration	1479
<b>11</b>	<b>Comptage des points rationnels dans une fibre</b>	<b>1481</b>
11.1	Le théorème principal	1481
11.2	Points fixes sous un automorphisme	1483
11.3	Cardinal d'un groupoïde	1483
11.4	Première étape	1483
11.5	Mesures de Haar	1485
11.6	Réseaux dans $\mathfrak{a}_M$	1486
11.7	Le poids $w_M^\xi$	1487
11.8	Intégrales orbitales pondérées $J_M^\xi$	1488

11.9 Un premier comptage . . . . .	1488
11.10 Une formule pour le poids $w_M^\xi$ . . . . .	1489
11.11 Poids et intégrales orbitales pondérées d'Arthur . . . . .	1491
11.12 Les $(G, M)$ -familles . . . . .	1492
11.13 Produit de deux $(G, M)$ -familles . . . . .	1493
11.14 Comparaison d'intégrales orbitales pondérées . . . . .	1495
11.15 Démonstration du théorème 11.1.1 . . . . .	1496
<b>12 L'exemple d'un groupe semi-simple de rang 1</b>	<b>1496</b>
12.1 Introduction . . . . .	1496
12.2 La base de la fibration de Hitchin . . . . .	1497
12.3 La fibration de Hitchin . . . . .	1497
12.4 Composantes connexes . . . . .	1498
12.5 Une fibre hyperbolique . . . . .	1498
12.6 Fibres de Springer affines . . . . .	1499
12.7 Une fibre non séparée . . . . .	1501
12.8 Une fibre hyperbolique $\xi$ -stable . . . . .	1503
<b>Références</b>	<b>1504</b>

## 1. Introduction

### 1.1 Objectifs

Ce travail est la partie géométrique de notre démonstration du lemme fondamental pondéré dont la stratégie suit celle élaborée par Ngô Bao Châu dans sa démonstration du le lemme fondamental de Langlands–Shelstad.

Cette partie géométrique poursuit deux objectifs. D'une part, on tronque la fibration de Hitchin de sorte que les fibres de Hitchin tronquées soient propres. D'autre part, on exprime le nombre de points sur un corps fini d'une telle fibre en termes d'intégrales orbitales pondérées globales d'Arthur qui interviennent dans la formule des traces d'Arthur–Selberg ; plus exactement, il s'agit de variantes de ces intégrales pour les algèbres de Lie.

Nos constructions s'appliquent à tout groupe algébrique semi-simple et nos résultats valent dans cette généralité. Cependant, pour les besoins de cette introduction, nous allons nous limiter au cas du groupe  $\mathrm{SL}(n)$ .

### 1.2 Fibration de Hitchin pour $\mathrm{SL}(n)$

Soit  $C$  une courbe projective, lisse, connexe, de genre  $g$  sur un corps algébriquement clos  $k$ ,  $n$  un entier  $> 0$  et  $D$  un diviseur effectif sur  $C$  de degré  $d > 2g$ . On suppose que la caractéristique de  $k$  est soit nulle soit  $> n$ .

Un fibré de Hitchin pour le groupe  $\mathrm{SL}(n)$  est un couple  $(\mathcal{E}, \theta)$  où  $\mathcal{E}$  est fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $C$  muni d'une trivialisatation de son déterminant et  $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(D)$  est un endomorphisme tordu de  $\mathcal{E}$  de trace nulle.

Soit  $\mathbb{M}$  le champ algébrique sur  $k$  des fibrés de Hitchin. La fibration de Hitchin est le morphisme

$$f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

de base l'espace affine

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{i=2}^n H^0(C, \mathcal{O}_C(iD))$$

qui envoie  $(\mathcal{E}, \theta)$  sur le polynôme caractéristique de  $\theta$  noté

$$P_a(u) := u^n + a_2u^{n-2} + \dots + a_n,$$

avec  $a_i \in H^0(C, \mathcal{O}_C(iD))$  pour  $2 \leq i \leq n$ .

Pour tout  $a = (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{A}$ , on dispose de la courbe spectrale  $Y_a$  d'équation

$$P_a(u) = 0$$

tracée sur la surface réglée  $\Sigma_D = \mathbb{V}(\mathcal{O}_C(-D))$ . C'est une courbe projective qui n'est en générale ni lisse ni irréductible, ni même réduite. La projection canonique  $\pi_a : Y_a \rightarrow C$  est un revêtement fini de degré  $n$ .

Soit  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$  l'ouvert où  $Y_a$  est réduite, c'est-à-dire où l'équation  $P_a(u) = 0$  n'a que des racines simples au point générique de  $C$ . La fibre en  $a \in \mathbb{A}^{\text{reg}}$  de la fibration de Hitchin peut s'interpréter comme le champ des  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -modules sans torsion  $\mathcal{F}$  qui sont de rang 1 en tout point générique de  $Y_a$  et qui sont munis d'une trivialisations du déterminant de  $\pi_{a,*}\mathcal{F}$  (cf. [BNR89]). L'ouvert  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$  contient l'ouvert elliptique  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  des  $a$  tels que  $Y_a$  est irréductible et donc intègre. La fibre de Hitchin en tout point de l'ouvert elliptique est un champ de Deligne–Mumford propre. Par contre, la fibre de Hitchin en un point  $a$  non elliptique de  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$  est un champ d'Artin qui n'est ni séparé ni de type fini.

### 1.3 Troncature

Dans ce travail nous tronquons les fibres de Hitchin non elliptiques par une notion convenable de stabilité. Notre construction dépend de données auxiliaires que nous allons maintenant introduire.

Soit  $\infty$  un point fermé de  $C$  qui n'est pas dans le support de  $D$ . On se restreint à l'ouvert  $\mathbb{A}^{\infty\text{-reg}}$  de  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$  où  $P_a(u)$  n'a que des racines simples au point  $\infty$ . Cela n'est pas très restrictif puisque les ouverts  $\mathbb{A}^{\infty\text{-reg}}$  recouvrent  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$  quand le point  $\infty$  varie. Soit

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{reg}}$$

le revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  qui consiste, pour chaque point  $a$  de  $\mathbb{A}^{\text{reg}}$ , à se donner un ordre total sur les racines de  $P_a(u)$  au point  $\infty$ . Soit

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$$

la fibration déduite de la fibration de Hitchin par le changement de base  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{A}$ . Un point de  $\mathcal{M}$  est donc un triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  formé :

- d'un fibré de Hitchin  $(\mathcal{E}, \theta)$  ;
- d'un point  $t = (t_1, \dots, t_n)$  de  $k^n$  dont les coordonnées sont deux à deux distinctes et pour lequel la somme  $t_1 + \dots + t_n$  est nulle ;

qui vérifient la condition suivante : le  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  est la collection ordonnée des valeurs propres de  $\theta_\infty \in \text{End}(\mathcal{E}_\infty)$ .

Soit  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ . La fibre en  $\infty$  d'un sous-fibré vectoriel  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  qui est stable par  $\theta$ , est une somme d'espaces propres pour  $\theta_\infty$  c'est-à-dire on a

$$\mathcal{F}_\infty = \bigoplus_{i \in I} \text{Ker}(\theta_\infty - t_i)$$

pour un certain ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$ . On pose alors

$$\deg_{\xi}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + \sum_{i \in I} \xi_i.$$

DÉFINITION 1.3.1. On dit que  $(\mathcal{E}, \theta, t_{\infty}) \in \mathcal{M}$  est  $\xi$ -stable si pour tout sous-fibré vectoriel non nul  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  stable par  $\theta$  on a

$$\frac{\deg_{\xi}(\mathcal{F})}{\text{rang}(\mathcal{F})} < 0.$$

Pour  $\xi = 0$ , on retrouve la notion usuelle de stabilité. Nous démontrons que la condition de  $\xi$ -stabilité est ouverte et définit donc un sous-champ ouvert  $\mathcal{M}^{\xi}$  de  $\mathcal{M}$ .

THÉORÈME 1.3.2. *Supposons que  $\sum_{i \in I} \xi_i \notin \mathbb{Z}$  pour tout  $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$  non vide. Alors le champ  $\mathcal{M}^{\xi}$  est un champ de Deligne–Mumford propre sur  $\mathcal{A}$  qui est lisse sur  $k$ .*

Notre définition de  $\xi$ -stabilité est réminiscente d’une définition de stabilité avec poids due à Esteves [Est01] dans le cadre des jacobiniennes compactifiées. Pour un groupe réductif quelconque, notre définition s’inspire des troncatures d’Arthur mais aussi du travail de Behrend (cf. [Beh95]) sur la stabilité et la réduction canonique des schémas en groupes. Notre définition de stabilité est proche de celle des fibrés ordinaires ou de Hitchin avec structure parabolique étudiée dans [HS] et [BY96].

Le théorème ci-dessus se démontre à l’aide de la méthode de Langton [Lan75], reprise par Nitsure [Nit91] dans le cadre des fibrés de Hitchin. En caractéristique nulle et pour un groupe général, on peut utiliser la méthode de Faltings (cf. [Fal93]). Notre approche est en fait une adaptation d’un argument de nature adélique dû à Heinloth (cf. [Hei08]), qui a l’avantage de fonctionner encore en caractéristique non nulle.

### 1.4 Comptage et intégrales orbitales pondérées

Le corps de base  $k$  est désormais une clôture algébrique d’un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . On suppose que toutes nos données sont définies sur  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $F$  le corps de fonctions de  $C$ ,  $\mathbb{A}$  son anneau des adèles et  $\mathcal{O}$  le sous-anneau compact maximal de  $\mathbb{A}$ . Soit  $V$  l’ensemble des points fermés de  $C$  et  $(d_v)_{v \in V}$  la famille presque nulle d’entiers positifs telle que  $D = \sum_{v \in V} d_v v$ . Pour tout  $v \in V$ , soit  $\varpi_v$  une uniformisante du complété de l’anneau local de  $v$ . Soit  $\varpi^{-D} = (\varpi_v^{-d_v})_{v \in V}$ . On a

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(iD)) = F \cap \varpi^{-iD} \mathcal{O}.$$

Soit  $(a, t)$  un point de  $\mathcal{A}$  rationnel sur  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $P_1, \dots, P_s$  les facteurs irréductibles de  $P_a(u)$  vus comme éléments de  $F[u]$ . Ces facteurs s’écrivent au point  $\infty$

$$P_j(\infty)(u) = \prod_{i \in I_j} (u - t_i)$$

pour une unique partition  $\{1, \dots, n\} = I_1 \amalg \dots \amalg I_s$ . Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $k^n$  et, pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $V_I$  le sous-espace de  $k^n$  engendré par  $e_i$  pour  $i \in I$ . Soit  $M \subset \text{SL}(n)$  le stabilisateur des sous-espaces  $V_{I_j}$  pour  $1 \leq j \leq s$ . C’est un sous-groupe de Levi. Soit  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{sl}(n)$  les algèbres de Lie de  $M$  et  $\text{SL}(n)$ . Soit  $X \in \mathfrak{m}(F)$  un élément semi-simple. On suppose que  $X$  est régulier au sens où son centralisateur  $T_X$  dans  $\text{SL}(n)$  est un tore maximal. Notons qu’on a  $T_X \subset M$ . Soit  $\varphi$  une fonction localement constante à support compact sur  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{A})$ .

L'intégrale orbitale pondérée  $J_M(X, \varphi)$  est définie par la formule

$$J_M(X, \varphi) = \int_{T_X(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{A})} \varphi(g^{-1}Xg) v_M(g) \frac{dg}{dt}$$

où :

- $dg$  est la mesure de Haar sur  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A})$  qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal  $\mathrm{SL}(n, \mathcal{O})$  ;
- $dt$  est une mesure de Haar sur le tore  $T_X(\mathbb{A})$  ;
- $v_M(g)$  est la fonction poids d'Arthur définie en terme de volume qui est invariante à gauche par  $M(\mathbb{A})$ .

Le volume

$$\mathrm{vol}(T_X(F) \backslash T_X(\mathbb{A})^1, dt)$$

est fini, où  $T_X(\mathbb{A})^1 \subset T_X(\mathbb{A})$  est l'intersection des noyaux de tous les homomorphismes  $T_X(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$  qui sont obtenus en composant un caractère  $F$ -rationnel  $T_X \rightarrow \mathbb{G}_{m,F}$  avec l'application degré  $\mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**THÉORÈME 1.4.1.** *Supposons  $\sum_{i \in I} \xi_i \notin \mathbb{Z}$  pour tout  $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$  non vide. Alors le nombre de points rationnels sur  $\mathbb{F}_q$  de la fibre en  $(a, t)$  de la fibration de Hitchin tronquée  $\mathcal{M}^\xi \rightarrow \mathcal{A}$  ne dépend pas de  $\xi$ . À un coefficient près qui ne dépend que de la normalisation de la fonction poids d'Arthur, il est égal à la somme suivante d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur*

$$\sum_X \mathrm{vol}(T_X(F) \backslash T_X(\mathbb{A})^1, dt) J_M(X, \mathbf{1}_D)$$

où  $\mathbf{1}_D$  est la fonction caractéristique de  $\varpi^{-D} \mathfrak{sl}(n, \mathcal{O})$  et où la somme est prise sur les classes de  $M(F)$ -conjugaison des éléments  $X \in \mathfrak{m}(F)$  tels que le polynôme caractéristique de la restriction de  $X$  à  $V_{I_j}$  est égal à  $P_j$  pour  $1 \leq j \leq s$ .

### 1.5 Aperçu

Décrivons rapidement l'organisation de cet article. Quelques rappels et notations sont donnés dans la section 2. La section 3 introduit la base  $\mathcal{A}$  de notre fibration de Hitchin et donne les propriétés essentielles. On définit dans la section 4 le champ algébrique  $\mathcal{M}$  des triplets de Hitchin et le morphisme de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ . On y explique également la notion de réduction à un sous-groupe parabolique d'un triplet de Hitchin et on en donne un critère d'existence et d'unicité. Dans la section 5, on associe à chaque triplet de Hitchin un convexe qui est construit à l'aide des degrés des réductions de ce triplet aux sous-groupes paraboliques semi-standard. À l'aide de ce convexe, on définit dans la section 6 la  $\xi$ -stabilité d'un triplet de Hitchin. On y énonce également le théorème principal de cet article qui généralise le théorème 1.3.2 ci-dessus (cf. théorème 6.2.2). La section 7 fournit une description adélique des triplets de Hitchin. La section 8 est entièrement consacrée à la démonstration de la partie existence du critère valuatif de propriété pour le morphisme  $f$  restreint au champ des triplets de Hitchin  $\xi$ -semi-stables. À la section 9, on démontre que la restriction du morphisme  $f$  au champ des triplets de Hitchin  $\xi$ -stables est séparé. À la section 10, on prouve que le champ des triplets de Hitchin  $\xi$ -stables, pour des  $\xi$  en «position générale», est un champ de Deligne–Mumford. À la section 11, on exprime le comptage des fibres de Hitchin  $\xi$ -semi-stables en termes d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur (cf. le théorème 11.1.1 qui généralise le théorème 1.4.1). L'article s'achève à la section 12 par l'étude d'un exemple de fibre de Hitchin non elliptique pour un groupe semi-simple de rang 1.



## 2. Morphisme caractéristique

### 2.1 Notations

Soit  $k$  une clôture algébrique d'un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $k$  et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. De manière générale, si une lettre majuscule désigne un groupe, son algèbre de Lie est notée par la lettre gothique minuscule correspondante. Soit  $\text{Int}$  l'action de  $G$  sur lui-même par automorphisme intérieur et  $\text{Ad}$  la représentation adjointe. Soit  $T$  un sous-tore maximal de  $G$  et  $\mathfrak{t}$  son algèbre de Lie. Soit

$$W = W^G = W_T^G$$

le groupe de Weyl de  $T$  dans  $G$  et

$$\Phi = \Phi^G = \Phi_T^G$$

l'ensemble des racines de  $T$  dans  $G$ . On note  $|X|$  le cardinal d'un ensemble fini  $X$ . On suppose que l'ordre  $|W|$  du groupe de Weyl est inversible dans  $k$ .

### 2.2 Morphisme caractéristique

Soit  $k[\mathfrak{g}]$  la  $k$ -algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{g}$ . Le groupe  $G$  agit sur son algèbre de Lie par l'action adjointe et par dualité sur  $k[\mathfrak{g}]$ . Soit  $k[\mathfrak{g}]^G$  la sous-algèbre des fonctions  $G$ -invariantes et  $\text{car}$  le quotient catégorique de  $\mathfrak{g}$  par  $G$

$$\text{car} = \text{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G).$$

On a donc un morphisme canonique  $G$ -invariant

$$\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{car} \tag{2.2.1}$$

qu'on appelle morphisme caractéristique.

Soit  $k[\mathfrak{t}]$  la  $k$ -algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{t}$  et  $k[\mathfrak{t}]^W$  la sous-algèbre des fonctions invariantes sous le groupe de Weyl  $W$ . Le morphisme de restriction  $k[\mathfrak{g}] \rightarrow k[\mathfrak{t}]$  induit un morphisme

$$k[\mathfrak{g}]^G \rightarrow k[\mathfrak{t}]^W$$

qui est en fait un isomorphisme d'après le théorème de Chevalley. Il s'ensuit que d'une part la restriction du morphisme  $\chi$  à  $\mathfrak{t}$ , encore notée  $\chi$ , induit un isomorphisme

$$\mathfrak{t}/W = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W) \simeq \text{car}$$

et d'autre part il existe  $n$  éléments de  $k[\mathfrak{g}]^G$  (avec  $n = \text{rang}(G)$ ), homogènes et algébriquement indépendants, qui engendrent la  $k$ -algèbre  $k[\mathfrak{g}]^G$  (cf. [Bou68, §§ 5 et 6]). Les degrés de ces éléments ne dépendent que du groupe  $G$ . En particulier, le schéma  $\text{car}$  est isomorphe à l'espace affine standard de dimension  $n = \text{rang}(G)$ .

### 2.3 Discriminant

Pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , soit  $d\alpha \in k[\mathfrak{t}]$  sa dérivée. Le discriminant  $D^G$  défini par

$$D^G = \prod_{\alpha \in \Phi} d\alpha$$

appartient à  $k[\mathfrak{t}]^W$ . Soit  $\text{car}^{\text{reg}}$  l'ouvert régulier de  $\text{car}$  c'est-à-dire l'ouvert où  $D^G$  ne s'annule pas.

### 2.4 Quelques propriétés du morphisme caractéristique

Par définition, un élément de  $\mathfrak{g}$  est *régulier* si son orbite sous  $G$  est de dimension maximale c'est-à-dire égale à la différence entre la dimension et le rang de  $G$ . Soit  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  l'ouvert de  $\mathfrak{g}$  formé

des éléments réguliers et

$$\mathfrak{t}^{\text{reg}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}.$$

Le morphisme

$$\chi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{car}$$

est un revêtement fini et galoisien de groupe  $W$ . Il induit sur les ouverts réguliers un revêtement étale  $\mathfrak{t}^{\text{reg}} \rightarrow \mathfrak{car}^{\text{reg}}$ .

### 2.5 Section de Kostant

Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , le sous-espace radiciel

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T \text{ Ad}(t)X = \alpha(t)X\}$$

est de dimension 1 sur  $k$ .

Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  qui contient  $T$  et  $\Delta \subset \Phi$  l'ensemble des racines simples de  $T$  dans  $B$ . Pour tout  $\alpha \in \Delta$ , soit  $X_\alpha$  un élément non nul de  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Soit  $\alpha^\vee$  la coracine de  $\alpha$ . Soit  $X_{-\alpha}$  l'unique élément de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$  est égale à la coracine  $\alpha^\vee$  vue comme élément de  $\mathfrak{t}$ . Soit

$$X_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta} X_{\pm\alpha}$$

et

$$\mathfrak{g}_{X_+} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [Y, X_+] = 0\}.$$

D'après un théorème de Kostant (cf. [Kos63] ou [Kot99, § 2.4]), l'espace affine  $X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$  est inclus dans l'ouvert régulier  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  et le morphisme caractéristique  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{car}$  induit un isomorphisme

$$X_- + \mathfrak{g}_{X_+} \rightarrow \mathfrak{car}.$$

Le morphisme inverse

$$\varepsilon : \mathfrak{car} \rightarrow X_- + \mathfrak{g}_{X_+}$$

est noté simplement  $\varepsilon$  ou plus précisément  $\varepsilon_{(B, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})}$  si l'on veut rappeler la dépendance en l'épinglage  $(B, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$ .

### 2.6 Sous-groupes paraboliques et sous-groupes de Levi

Pour tous sous-groupes  $M$  et  $Q$  de  $G$ , on note  $\mathcal{F}^Q(M)$  l'ensemble des sous-groupes paraboliques  $P$  de  $G$  qui vérifient  $M \subset P \subset Q$ . Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^G(T)$  l'ensemble des sous-groupes paraboliques *semi-standard* de  $G$  (au sens où ils contiennent  $T$ ).

On appelle *sous-groupe de Levi* de  $G$  un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique de  $G$ . Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G(T)$  l'ensemble des sous-groupes de Levi *semi-standard* de  $G$  (au sens où ils contiennent  $T$ ).

Pour tout  $P \in \mathcal{F}$ , soit  $N_P$  le radical unipotent de  $P$  et  $M_P \in \mathcal{L}$  l'unique sous-groupe de Levi de  $P$  qui contient  $T$ . Pour tout sous-groupe de Levi  $M \in \mathcal{L}$ , soit  $\mathcal{P}(M)$ , respectivement  $\mathcal{L}(M)$  le sous-ensemble des  $P \in \mathcal{F}$  tels que  $M_P = M$ , respectivement des  $L \in \mathcal{L}$  tels que  $M \subset L$ .

### 2.7 Schémas $\mathfrak{car}_M$

Soit  $M \in \mathcal{L}$ . Les notations des paragraphes précédents affublées d'un indice ou d'un exposant  $M$  valent pour le groupe réductif  $M$ . On prendra garde à ne pas confondre les ouverts  $\mathfrak{car}_M^{G\text{-reg}}$

et  $\text{car}_M^{M\text{-reg}}$  de  $\text{car}_M$  : le premier est le lieu où  $D^G$  ne s'annule pas alors que le second est défini par  $D^M \neq 0$ . Comme ce dernier ouvert n'intervient pas dans la suite, on pose

$$\text{car}_M^{\text{reg}} = \text{car}_M^{G\text{-reg}}.$$

De même, on distinguera les ouverts  $G$ -régulier  $\mathfrak{m}^{G\text{-reg}}$  et  $M$ -régulier  $\mathfrak{m}^{M\text{-reg}}$  de  $\mathfrak{m}$ . On ne s'intéressera qu'au premier. Aussi on pose

$$\mathfrak{m}^{\text{reg}} = \mathfrak{m}^{G\text{-reg}}.$$

Soit  $P \in \mathcal{F}$  un sous-groupe parabolique semi-standard et  $M = M_P$ . Soit  $k[\mathfrak{p}]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{p}$  et  $k[\mathfrak{p}]^P$  la sous-algèbre des fonctions  $P$ -invariantes. Soit le  $k$ -schéma affine  $\text{car}_P = \text{Spec}(k[\mathfrak{p}]^P)$  et

$$\chi_P : \mathfrak{p} \rightarrow \text{car}_P \tag{2.7.1}$$

le morphisme  $P$ -invariant donné par l'inclusion  $k[\mathfrak{p}]^P \subset k[\mathfrak{p}]$ .

LEMME 2.7.1. *Le morphisme de restriction  $k[\mathfrak{p}] \rightarrow k[\mathfrak{m}]$  induit un isomorphisme d'algèbre  $k[\mathfrak{p}]^P \simeq k[\mathfrak{m}]^M$  et un isomorphisme de schéma  $\text{car}_P \simeq \text{car}_M$ .*

*Démonstration.* Soit  $N = N_P$  et  $\mathfrak{m}' \in \mathfrak{m}$  l'ouvert formé des éléments semi-simples  $G$ -réguliers. L'ouvert  $\mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{p}$  est la réunion des conjugués de  $\mathfrak{m}'$  sous  $N$ . Il s'ensuit que le morphisme  $k[\mathfrak{p}]^P \rightarrow k[\mathfrak{m}]^M$  est injectif. Il possède une section donnée par  $\phi \in k[\mathfrak{m}]^M \mapsto \phi \circ p \in k[\mathfrak{p}]^P$  où  $p$  est la projection  $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{m}$ . □

### 3. Schémas caractéristiques

#### 3.1 Conventions

Soit  $S$  un  $k$ -schéma. Pour tout  $k$ -schéma  $U$ , soit

$$U_S = U \times_k S$$

le produit fibré de  $U$  et  $S$  au-dessus de  $k$ . Pour tous  $k$ -schémas  $U$  et  $V$  et tout  $k$ -morphisme  $\phi : U \rightarrow V$ , soit  $\phi_S : U_S \rightarrow V_S$  le  $S$ -morphisme obtenu par changement de base. Lorsque  $S = \text{Spec}(K)$  est le spectre d'un corps  $K$  extension de  $k$ , on note simplement  $U_K$  le  $K$ -schéma et  $\phi_K$  le  $K$ -morphisme correspondant. Si  $s \in S$ , on note  $k(s)$  le corps résiduel de  $s$  et on pose  $U_s = U_{k(s)}$  etc.

Soit  $S$  un  $k$ -schéma et  $H$  un groupe algébrique affine sur  $k$ . Pour tout  $H$ -torseur  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $S$  et tout  $S$ -schéma affine  $U$  muni d'une action à gauche de  $H$ , le groupe  $H$  agit à droite sur le produit fibré  $\mathcal{E} \times_S U$  par  $(e, u).h = (eh, h^{-1}u)$  pour tous  $h \in H$  et  $(e, u) \in \mathcal{E} \times_S U$ . Soit  $\mathcal{E} \times_S^H U$  le produit contracté par  $H$  c'est-à-dire le quotient du produit  $\mathcal{E} \times_S U$  par  $H$ . Lorsque  $S = \text{Spec}(k)$ , on omet l'indice  $S$ .

#### 3.2 Notations

Soit  $C$  une courbe projective, lisse et connexe sur  $k$  de genre  $g$ . Soit  $D$  un diviseur effectif de degré  $>2g$  et  $\infty$  un point de  $C(k)$  qui ne rencontre pas le support de  $D$ . Soit  $\mathcal{L}_D$  le  $\mathbb{G}_{m,k}$ -torseur sur  $C$  associé à  $D$  muni de sa trivialisatation canonique sur l'ouvert complémentaire du support de  $D$ .

### 3.3 Les fibrés $\mathfrak{t}_D$ et $\mathfrak{car}_{M,D}$

Pour tout  $k$ -schéma  $V$  muni d'une action de  $\mathbb{G}_{m,k}$ , soit

$$V_D = \mathcal{L}_D \times_k^{\mathbb{G}_{m,k}} V$$

le produit contracté. Si  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel et si l'action de  $\mathbb{G}_{m,k}$  est linéaire,  $V_D$  est un fibré vectoriel sur  $C$ .

Soit  $M \in \mathcal{L}$ . L'action par homothétie du groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_{m,k}$  sur  $\mathfrak{t}$  induit une action de  $\mathbb{G}_{m,k}$  sur  $\mathfrak{car}_M$  pour laquelle le morphisme caractéristique  $\chi_M$  est  $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant. En outre, les actions respectives de  $\mathbb{G}_{m,k}$  sur  $\mathfrak{t}$  et  $\mathfrak{car}_M$  respectent les ouverts  $\mathfrak{t}^{\text{reg}}$  et  $\mathfrak{car}_M^{\text{reg}}$ . Par la construction précédente, on obtient un fibré vectoriel  $\mathfrak{t}_D$  et un fibré  $\mathfrak{car}_{M,D}$  ainsi que des ouverts

$$\mathfrak{t}_D^{\text{reg}} \subset \mathfrak{t}_D$$

et

$$\mathfrak{car}_{M,D}^{\text{reg}} \subset \mathfrak{car}_{M,D}.$$

On obtient également un morphisme, par abus encore noté  $\chi_M$ ,

$$\chi_M : \mathfrak{t}_D \rightarrow \mathfrak{car}_{M,D}$$

qui est un revêtement fini, galoisien de groupe  $W^M$  et étale au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{car}_D^{\text{reg}}$ .

Lorsqu'on prend  $M = G$ , on omet l'indice  $M$  dans les notations.

### 3.4 Schéma caractéristique $\mathcal{A}_M$

Soit  $M \in \mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}$  le  $k$ -schéma tel que pour tout  $k$ -schéma  $S$ , l'ensemble  $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}(S)$  des  $S$ -points est l'ensemble des couples

$$(a, t)$$

formés d'une section  $a$  du fibré  $\mathfrak{car}_{M,D,S}$  au-dessus de  $C_S$  et d'un point  $t \in \mathfrak{t}_D^{G\text{-reg}}(S)$  qui vérifient

$$a(\infty_S) = \chi_M(t).$$

Dans la suite, on appelle  $\mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}$  le schéma caractéristique de  $M$ .

*Remarque.* L'exposant  $G\text{-reg}$  rappelle que le point  $t \in \mathfrak{t}_D^{G\text{-reg}}(S)$  est  $G$ -régulier au sens où il appartient à  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}(S)$ . Dans la suite, on omet cet exposant et on pose, abusivement,

$$\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_M^{G\text{-reg}}.$$

Lorsque  $M = G$ , on omet l'indice  $M$  et on pose

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$$

PROPOSITION 3.4.1. *Le schéma  $\mathcal{A}_M$  est lisse et irréductible de dimension*

$$\dim(\mathcal{A}_M) = \deg(D)(|\Phi^M|/2 + \text{rang}(M)) + \text{rang}(M)(1 - g).$$

*Démonstration.* Le morphisme d'oubli de la donnée  $t$  fait de  $\mathcal{A}_M$  un revêtement fini, étale et galoisien de groupe de Galois  $W^M$  au-dessus du schéma des sections globales de  $\mathfrak{car}_{M,D}$  qui sont  $G$ -régulières au point  $\infty$ . Mais ce dernier schéma est un ouvert du schéma des sections globales de  $\mathfrak{car}_{M,D}$ , qui est non-canoniquement isomorphe à un espace vectoriel dont on voit qu'il est de la dimension annoncée par la formule de Riemann–Roch (dès que  $\deg(D) > 2g - 2$ , cf. [Ngo08, lemme 4.4.1]).

Le morphisme d'oubli de la donnée  $a$  est un morphisme surjectif et ouvert de  $\mathcal{A}_M$  sur  $t^{\text{reg}}$  dès que  $\text{deg}(D) > 2g - 1$  (cf. [Ngo08, preuve du lemme 5.5.2]). Ses fibres sont isomorphes à des espaces affines. Il s'ensuit que  $\mathcal{A}_M$  est irréductible.  $\square$

### 3.5 Morphismes entre schémas caractéristiques

Soit  $M \subset L$  deux sous-groupes de Levi semi-standard. Soit

$$\chi_L^M : \text{car}_M \rightarrow \text{car}_L$$

le morphisme défini par l'inclusion  $k[t]^{W^L} \subset k[t]^{W^M}$ . C'est un morphisme fini qui est étale au-dessus de  $\text{car}_L^{\text{reg}}$ . Comme ce morphisme est  $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant, il induit un morphisme fini, étale au-dessus de  $\text{car}_{L,D}^{\text{reg}}$

$$\chi_{L,D}^M : \text{car}_{M,D} \rightarrow \text{car}_{L,D}.$$

Par abus de notations, on note encore  $\chi_L^M$  le morphisme

$$\chi_L^M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_L$$

qui, pour tout  $k$ -schéma affine  $S$ , associe à  $(a, t) \in \mathcal{A}_M(S)$  le couple  $(\chi_{L,D}^M(a), t) \in \mathcal{A}_L$ .

PROPOSITION 3.5.1. *Le morphisme*

$$\chi_L^M : \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_L$$

*est une immersion fermée.*

On reporte à la section 3.7 la preuve de cette proposition.

### 3.6 Caractéristiques elliptiques

Soit  $M \in \mathcal{L}(T)$ . On pose

$$\mathcal{A}_{M,\text{ell}} = \mathcal{A}_M - \bigcup_{L \in \mathcal{L}, L \subsetneq M} \mathcal{A}_L.$$

On l'appelle le schéma caractéristique elliptique de  $M$ .

PROPOSITION 3.6.1. *Le schéma  $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$  est un sous-schéma ouvert non vide de  $\mathcal{A}_M$  et un sous-schéma localement fermé de  $\mathcal{A}$ . Son adhérence dans  $\mathcal{A}$  est le sous-schéma fermé  $\mathcal{A}_M$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord,  $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$  est non vide pour des raisons de dimension (cf. la formule de dimension de la proposition 3.4.1). Le reste de la première assertion résulte de la proposition 3.5.1. La seconde assertion résulte de l'irréductibilité de  $\mathcal{A}_M$  (cf. proposition 3.4.1).  $\square$

PROPOSITION 3.6.2. *Le schéma  $\mathcal{A}$  est la réunion disjointe des sous-schémas localement fermés  $\mathcal{A}_{M,\text{ell}}$  pour  $M \in \mathcal{L}(T)$*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{M \in \mathcal{L}(T)} \mathcal{A}_{M,\text{ell}}.$$

La démonstration de cette proposition est reportée au § 3.10.

### 3.7 Preuve de la proposition 3.5.1

C'est une variante des preuves du lemme 7.3 de [Ngo06] et de la proposition 6.3.5 de [Ngo08]. Pour la commodité du lecteur, on rappelle ici les principaux arguments fondés en partie sur le lemme suivant (cf. lemme 7.3 de [Ngo06]).

LEMME 3.7.1. Soit  $S$  un  $k$ -schéma normal et intègre et  $U \subset S$  un sous-schéma ouvert non vide. Soit  $V'$  et  $V$  deux  $S$ -schémas. Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h'} & V' \\ i \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

où  $i$  est l'inclusion canonique,  $h'$  et  $h$  sont des sections et  $\pi$  est un  $S$ -morphisme fini, la section  $h'$  se prolonge d'une manière unique en une section  $S \rightarrow V'$  qui relève  $h$ .

Montrons tout d'abord que le morphisme  $\chi_L^M$  est radiciel. Il s'agit de voir que, pour tout corps  $K$  extension de  $k$ , le morphisme  $\chi_L^M$  induit une injection sur les ensembles correspondants de  $K$ -points. Pour  $i = 1, 2$  soit  $(a_i, t_i) \in \mathcal{A}_M(K)$  deux éléments qui ont même image  $(a, t)$  dans  $\mathcal{A}_L$ . On a donc  $t = t_1 = t_2$  et un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} C_K & \begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xrightarrow{a_2} \end{array} & \mathbf{car}_{M,D,K} \\ & \searrow a & \downarrow \chi_L^M \\ & & \mathbf{car}_{L,D,K} \end{array}$$

Rappelons que le morphisme  $\chi_{L,D}^M$  est fini. D'après le lemme 3.7.1 ci-dessus pour que  $a_1 = a_2$  il suffit que  $a_1$  et  $a_2$  coïncident sur un ouvert de  $C_K$ . Or  $a_1$  et  $a_2$  prennent la même valeur au point  $\infty_K$  à savoir  $\chi_M(t)$ . Comme  $t$  est  $G$ -régulier et que le morphisme  $\chi_L^M$  est étale au-dessus de  $\mathbf{car}_{L,D,K}^{\text{reg}}$ , les sections  $a_1$  et  $a_2$  coïncident sur le spectre du complété de l'anneau local de  $C_K$  au point  $\infty_K$  donc elles coïncident sur un ouvert de  $C_K$ .

Montrons ensuite que le morphisme  $\chi_{L,D}^M$  est propre. Pour cela, on applique le critère valuatif de propreté. Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $K$ . Soit  $S = \text{Spec}(A)$ . Soit  $(a_M, t_M) \in \mathcal{A}_M(K)$  et  $(a, t) \in \mathcal{A}_L(S)$  tel que  $\chi_L^M((a_M, t_M)) = (a, t)$ . On a donc  $t_M = t$ . D'après le lemme 3.7.1 ci-dessus, le morphisme  $a_1$  se prolonge de manière unique en un morphisme de  $C_S$  dans  $\mathbf{car}_{M,D}$  qui s'inscrit (en pointillés) dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} C_K & \xrightarrow{a_1} & \mathbf{car}_{M,D,S} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \chi_L^M \\ C_S & \xrightarrow{a} & \mathbf{car}_{L,D,S} \end{array}$$

Une fois le prolongement de  $a_1$  acquis, il reste à vérifier que  $a_1 \circ \infty_S = \chi_L^M(t)$ . Cette égalité résulte de la propreté du morphisme  $\chi_L^M$  puisque les deux sections  $a_1 \circ \infty_S$  et  $\chi_{L,D}^M(t)$  s'inscrivent (en pointillés) dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{a_1 \circ \infty_K} & \mathbf{car}_{M,D,S} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \chi_L^M \\ S & \xrightarrow{a \circ \infty_S} & \mathbf{car}_{L,D,S} \end{array}$$

Montrons ensuite que le morphisme  $\chi_{L,D}^M$  est non ramifié. Puisque  $\mathcal{A}_M$  et  $\mathcal{A}_L$  sont lisses, il revient au même de montrer que le morphisme tangent est injectif. Il s'agit donc de montrer que  $\chi_L^M$  induit une application injective  $\mathcal{A}_M(k[\varepsilon]) \rightarrow \mathcal{A}_L(k[\varepsilon])$  (où  $\varepsilon$  est une indéterminée de carré  $\varepsilon^2 = 0$ ). Soit donc  $(a_1, t)$  et  $(a_2, t)$  deux éléments de  $\mathcal{A}_M(k[\varepsilon])$  qui ont même image  $(a, t)$

dans  $\mathcal{A}_L(k[\varepsilon])$ . Dans la suite, on note par un indice  $\varepsilon$  le changement de base de  $k$  à  $k[\varepsilon]$ . Soit  $a_0$  la section de  $\mathfrak{car}_{L,D}$  défini par restriction de  $a$  à  $C$  et  $U \subset C$  l'ouvert défini comme l'image inverse par  $a_0$  du lieu régulier  $\mathfrak{c}_{L,D}^{\text{reg}}$ . Notons que  $\infty \in U$ . La section  $a$  induit alors un morphisme  $U_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{c}_{L,D,\varepsilon}^{\text{reg}}$ . Or le morphisme  $\chi_{L,\varepsilon}^M$  est étale donc non ramifié au-dessus de  $\mathfrak{c}_{L,D,\varepsilon}^{\text{reg}}$ . Il s'ensuit que les sections  $a_1$  et  $a_2$  coïncident sur  $U_\varepsilon$  donc sur  $C_\varepsilon$  par platitude de  $k[\varepsilon]$  sur  $k$ .

En conclusion, le morphisme  $\chi_{L,D}^M$  qui est radiciel, propre et non ramifié est une immersion fermée.

### 3.8 Conjugaison et morphisme caractéristique

Dans ce paragraphe et le suivant, on rassemble quelques résultats utiles pour la suite et pour la preuve de la proposition 3.6.2.

LEMME 3.8.1. *Soit  $P$  un sous-groupe parabolique ou un sous-groupe de Levi de  $G$ . Soit  $F$  une extension de  $k$  et  $F_s$  une clôture séparable de  $F$ . Pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $\mathfrak{p}(F_s)$  et tout  $a \in \mathfrak{car}_P^{\text{reg}}(F_s)$  tels que*

$$\chi_P(X) = \chi_P(Y) = a$$

*il existe  $p \in P(F_s)$  tel que  $X = \text{Ad}(p)Y$ .*

*Si, on suppose, de plus, que  $F$  est une extension de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos et que les éléments  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $\mathfrak{p}(F)$ , alors on peut même prendre  $p \in P(F)$ .*

*Démonstration.* Soit  $S$  le  $F_s$ -schéma défini par

$$S = \{p \in P \mid \text{Ad}(p)X = Y\}.$$

La fibre de  $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}/P$  au-dessus d'un point  $G$ -régulier est formée d'une seule orbite sous  $P$ . En particulier, sous nos hypothèses, le schéma  $S$  possède des points dans une clôture algébrique de  $F_s$ . On cherche en fait des points de  $S$  à valeurs dans  $F_s$ . Ce qui assure l'existence de tels points est la lissité de  $S$  sur  $F_s$ . Cette lissité se voit de la façon suivante. On remarque d'abord que  $S$  est un toseur sous le centralisateur  $T_X$  de  $X$  dans  $G \times_k F_s$ . Puis, comme  $X$  est semi-simple et  $G$ -régulier,  $T_X$  est un tore sur  $F_s$ , donc lisse. Cela conclut puisqu'un toseur sous un schéma en groupes lisse est lisse.

Supposons de plus que  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $\mathfrak{p}(F)$ . Soit  $p \in P(F_s)$  tel que  $X = \text{Ad}(p)Y$ . Alors pour tout  $\tau \in \text{Gal}(F_s/F)$ , l'élément  $p\tau(p)^{-1}$  appartient à  $T_X(F_s)$ . On obtient ainsi un 1-cocycle de  $\text{Gal}(F_s/F)$  dans  $T_X$ . Si le groupe de cohomologie  $H^1(F_s/F, T_X)$  est trivial, on peut supposer qu'on a  $p \in P(F)$ , quitte à modifier  $p$  par un élément de  $T_X(F_s)$ . Comme  $T_X$  est connexe, dès que  $F$  est de dimension  $\leq 1$ , on sait que le groupe  $H^1(F_s/F, T_X)$  est trivial (cf. [Ser94], ch. III §2 théorème 1' et les remarques qui suivent). Cela permet de conclure puisqu'une extension de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos est de dimension  $\leq 1$ .  $\square$

On utilisera la définition suivante d'un élément elliptique.

DÉFINITION 3.8.2. Soit  $F$  une extension de  $k$  et  $X \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}(F)$  un élément  $G$ -régulier et semi-simple. Soit  $T_X$  son centralisateur dans  $G_F$  (c'est un sous- $F$ -tore maximal de  $G_F$ ) et  $A_X \subset T_X$  le sous- $F$ -tore déployé maximal de  $T_X$ . On dit que  $X$  est un élément *elliptique* de  $\mathfrak{g}(F)$  si l'on a l'égalité

$$A_X = A_G$$

où  $A_G$  est la composante neutre du centre de  $G_F$ .

### 3.9 Caractéristiques et éléments semi-simples réguliers

Soit  $K$  une extension de  $k$ . Soit  $F$  le corps des fonctions de la courbe  $C_K$  sur  $K$ . Soit  $\mathcal{O}_\infty$  le complété de l'anneau local de  $C_K$  en  $\infty_K$  et  $F_\infty$  le corps des fractions de  $\mathcal{O}_\infty$ . Avec ces notations, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.9.1. *Pour tout  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ , soit  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}(\mathcal{O}_\infty)$  l'unique relèvement de  $t$  tel que la restriction de  $a$  à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_\infty)$  soit égale à  $\chi(t_a)$ . Soit  $a_\eta \in \mathfrak{car}^{\text{reg}}(F)$  la restriction de  $a$  au point générique de  $C_K$ .*

*Pour tout  $M \in \mathcal{L}(T)$  et  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$  ;
- (2) il existe  $X$  un élément semi-simple  $G$ -régulier de  $\mathfrak{m}(F)$  et  $m \in M(F_\infty)$  tels que :
  - (a)  $\chi_G(X) = a_\eta$  ;
  - (b)  $\text{Ad}(m)X = t_a$ .

*Démonstration.* Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ . Un point  $t_a$  avec les propriétés ci-dessus existe et est unique puisque  $\chi$  est étale au-dessus de  $\mathfrak{car}^{\text{reg}}$ .

Prouvons que la première assertion implique la seconde. On suppose donc qu'on a  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(K)$  tel que

$$\chi_G^M(a_M) = a \tag{3.9.1}$$

et

$$a_M(\infty_K) = \chi_M(t). \tag{3.9.2}$$

Soit  $a_\infty$  et  $a_{M,\infty}$  les restrictions de  $a$  et  $a_M$  à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_\infty)$ . Les morphismes donnés par  $a_{M,\infty}$  et  $\chi_M(t_a)$  coïncident en fibre spéciale par (3.9.2) et s'inscrivent tous deux dans le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_\infty) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi_M(t_a)} \\ \xrightarrow{a_{M,\infty}} \end{array} & \mathfrak{car}_M^{\text{reg}} \\ & \searrow a_\infty & \downarrow \chi_G^M \\ & & \mathfrak{car}^{\text{reg}} \end{array}$$

Comme  $\chi_G^M$  est étale au-dessus de  $\mathfrak{car}^{\text{reg}}$ , on a

$$a_{M,\infty} = \chi_M(t_a).$$

Soit  $a_{M,\eta} \in \mathfrak{car}_M^{\text{reg}}(F)$  la restriction de  $a_M$  au point générique. Il existe  $X \in \mathfrak{m}(F)$  tel que

$$\chi_M(X) = a_{M,\eta} \tag{3.9.3}$$

(pour le voir, on peut utiliser une section de Kostant relative à  $M$ ). Comme  $a_{M,\eta}$  est  $G$ -régulier,  $X$  est nécessairement semi-simple et  $G$ -régulier. On a donc l'égalité suivante dans  $\mathfrak{car}_M^{\text{reg}}(F_\infty)$

$$\chi_M(t_a) = \chi_M(X).$$

D'après le lemme 3.8.1, il existe  $L$  une extension galoisienne finie de  $F_\infty$  et  $m \in M(L)$  tel que

$$\text{Ad}(m)X = t_a.$$

On déduit de cette dernière égalité que pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(L/F_\infty)$ , l'élément  $m\sigma(m)^{-1}$  normalise  $t_a$  : il appartient donc à  $T(L)$ . On obtient ainsi une 1-cochaîne du groupe de Galois  $\text{Gal}(L/F_\infty)$  à valeurs dans  $T(L)$  qui est un cobord puisque,  $T$  étant un tore déployé, le groupe  $H^1(L/F_\infty, T(L))$



est trivial. Il existe donc  $x \in T(L)$  tel que  $m\sigma(m)^{-1} = x\sigma(x)^{-1}$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(L/F_\infty)$ . Quitte à remplacer  $m$  par  $x^{-1}m$ , on peut supposer que  $m \in M(F_\infty)$ . D'où la condition (2)(b). La condition (2)(a) résulte de (3.9.1) et (3.9.3).

Prouvons l'implication réciproque. On suppose donc qu'il existe  $X \in \mathfrak{m}(F)$  semi-simple  $G$ -régulier et  $m \in M(F_\infty)$  qui vérifient les assertions (2)(a) et (2)(b). Soit

$$a_{M,\eta} = \chi_M(X) \in \mathfrak{c}_M^{\text{reg}}(F). \tag{3.9.4}$$

Ce  $F$ -point s'inscrit dans le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(F) & \xrightarrow{a_{M,\eta}} & \mathfrak{car}_{M,D} \\ \downarrow & & \downarrow \chi_{G,D}^M \\ C_K & \xrightarrow{a} & \mathfrak{car}_{G,D} \end{array}$$

La propriété du morphisme  $\chi_G^M$  implique que  $a_{M,\eta}$  se prolonge en un morphisme

$$a_M : C_K \rightarrow \mathfrak{car}_{M,D}$$

qui relève  $a$ . On a l'égalité suivante dans  $\mathfrak{c}_M^{\text{reg}}(K)$

$$\chi_M(t) = a_M(\infty_K). \tag{3.9.5}$$

En effet, vu (3.9.4), la restriction de  $a_M$  à  $\text{Spec}(F_\infty)$  est égale à  $\chi_M(X)$  donc égale à  $\chi_M(t_a)$  par assertion 2(b). Il s'ensuit que la restriction de  $a_M$  à  $\text{Spec}(O_\infty)$  est aussi égale à  $\chi_M(t_a)$ . L'égalité (3.9.5) en résulte par évaluation au point  $\infty_K$ .

Le couple  $(a_M, t)$  définit donc un élément de  $\mathcal{A}_M(K)$ . Par construction de  $a_M$ , on a

$$\chi_G^M(a_M, t) = (a, t)$$

d'où l'assertion 1. □

**COROLLAIRE 3.9.2.** *Avec les notations de la proposition 3.9.1, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K))$  ;
- (2) *il existe  $X$  un élément semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique de  $\mathfrak{m}(F)$  et  $m \in M(F_\infty)$  tels que :*
  - (a)  $\chi_G(X) = a_\eta$  ;
  - (b)  $\text{Ad}(m)X = t_a$ .

*Démonstration.* Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ .

Prouvons que la première assertion implique la seconde. On suppose donc  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K))$ . D'après la proposition 3.9.1, il existe  $X$  un élément semi-simple  $G$ -régulier de  $\mathfrak{m}(F)$  et  $m \in M(F_\infty)$  qui vérifient les assertions (2)(a) et (2)(b) de la proposition 3.9.1. On va montrer que  $X$  est nécessairement elliptique dans  $\mathfrak{m}(F)$ . Pour cela on raisonne par contradiction. Soit  $A_X$  le sous- $F$ -tore déployé maximal de  $T_X$  le centralisateur de  $X$  dans  $G_F$ . Quitte à conjuguer  $X$  par un élément de  $M(F)$  et translater  $m$  par ce même élément, on peut et on va supposer que  $A_X$  est inclus dans le tore «standard»  $T_F$ . Il existe alors  $L \in \mathcal{L}^G(T)$  tel que le centralisateur de  $A_X$  dans  $G_F$  soit  $L_F$ . Notons qu'on a  $L \subsetneq M$  et cette inclusion est stricte puisque  $X$  n'est pas elliptique dans  $M$ . Mais l'assertion (2)(b) de la proposition 3.9.1 implique

$$mT_{X,F_\infty}m^{-1} = T_{F_\infty}.$$

Or les tores  $T_{X, F_\infty}$  et  $T_{F_\infty}$  sont deux sous- $F_\infty$ -tores maximaux et  $F_\infty$ -déployés de  $L_{F_\infty}$ . Ils sont donc conjugués par un élément de  $L(F_\infty)$ . On a donc

$$m \in \text{Norm}_{M(F_\infty)}(T)L(F_\infty).$$

Comme  $T$  est un  $k$ -tore déployé, on a  $\text{Norm}_{M(F_\infty)}(T) = \text{Norm}_{M(k)}(T)T(F_\infty)$ . Il existe donc  $w \in \text{Norm}_{M(k)}(T)$  et  $l \in L(F_\infty)$  tels que

$$m = wl.$$

Soit  $L_1 = wLw^{-1}$ ,  $l_1 = wlw^{-1}$  et  $X_1 = \text{Ad}(w)X$ . Par construction,  $L_1 \in \mathcal{L}(T)$  est un sous-groupe de Levi propre de  $M$  ; en outre,  $l_1 \in L_1(F_\infty)$  et  $X_1 \in \mathfrak{l}_1(F)$  vérifient les relations  $\chi_G(X_1) = a_\eta$  et  $\text{Ad}(l_1)X_1 = t_a$ . Il résulte alors de la proposition 3.9.1 qu'on a  $(a, t) \in \chi_G^{L_1}(\mathbb{A}_{L_1}(K))$ . Cela contredit l'assertion 1 et montre que  $X$  est elliptique dans  $\mathfrak{m}(F)$ .

Montrons que l'assertion 2 implique la 1. Soit  $X$  un élément semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique de  $\mathfrak{m}(F)$  et  $m \in M(F_\infty)$  qui satisfont (2)(a) et (2)(b). D'après la proposition 3.9.1, on a  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_M(K))$ . Soit  $L \in \mathcal{L}(T)$  un sous-groupe de Levi semi-standard inclus dans  $M$  tel que  $(a, t) \in \chi_G^L(\mathcal{A}_{L, \text{ell}}(K))$ . On vient de voir qu'il existe alors  $Y$  un élément semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique de  $\mathfrak{l}(F)$  et  $l \in L(F_\infty)$  tels que  $\chi_G(Y) = a_\eta$  et  $\text{Ad}(l)Y = t_a$ . D'après le lemme 3.8.1, il existe  $g \in G(F_s)$  un point de  $G$  dans une clôture séparable  $F_s$  de  $F$  tel que  $\text{Ad}(g)X = Y$ . Le centralisateur de  $Y$  dans  $G_F$  est un sous- $F$ -tore maximal. Pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(F_s/F)$ , on a donc  $\sigma(g)g^{-1} \in T_Y$  et l'automorphisme intérieur  $\text{Int}(g)$  de  $G_{F_s}$  induit un  $F$ -isomorphisme de  $T_X$  sur  $T_Y$  et donc un  $F$ -isomorphisme entre les sous-tores  $F$ -déployés maximaux  $A_X$  et  $A_Y$ . Or ces derniers ne sont autres que les centres connexes  $A_{M, F}$  et  $A_{L, F}$  des sous-groupes de Levi  $M_F$  et  $L_F$ . On a donc  $\dim(A_M) = \dim(A_L)$ . Comme on a aussi  $A_M \subset A_L$ , il vient  $A_M = A_L$  et  $L = M$ . Donc  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K))$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### 3.10 Preuve de la proposition 3.6.2

Seul le fait que la réunion soit disjointe n'est pas évident. On reprend les notations du § 3.9. Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$  et  $M_1$  et  $M_2$  deux sous-groupes de Levi dans  $\mathcal{L}(T)$  tels que  $a$  appartienne à l'intersection des images de  $\mathcal{A}_{M_1, \text{ell}}(K)$  et  $\mathcal{A}_{M_2, \text{ell}}(K)$ . D'après le corollaire 3.9.2, pour  $i = 1, 2$ , il existe  $X_i \in \mathfrak{m}_i(F)$  un élément elliptique et  $G$ -régulier et  $m_i \in M_i(F_\infty)$  tels que  $\text{Ad}(m_i)X_i = t_a$  et  $\chi_G(X_i) = a_\eta$ . D'après le lemme 3.8.1, l'égalité  $\chi_G(X_1) = \chi_G(X_2)$  entraîne l'existence d'un point  $g \in G(F_s)$  à valeurs dans une clôture séparable  $F_s$  de  $F$  tel que  $\text{Ad}(g)X_1 = X_2$ . En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 3.9.2, on voit qu'on a

$$gA_{M_1}g^{-1} = A_{M_2}.$$

Mais  $g$  conjugue  $X_1$  et  $X_2$  donc  $m_2gm_1^{-1}$  centralise  $t_a$  qui est  $G$ -régulier. On a donc  $m_2gm_1^{-1} \in T(F_s \otimes_F F_\infty)$  puis  $A_{M_1} = A_{M_2}$  et  $M_1 = M_2$  ce qu'il fallait voir.

## 4. La fibration de Hitchin

On poursuit avec les notations des sections précédentes.

### 4.1 Notations

On complète les notations des §§ 3.1 à 3.3. Soit  $S$  un  $k$ -schéma et  $\mathcal{E}$  un  $G$ -torseur sur  $S$ . Soit

$$\text{Aut}_G(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_k^{G, \text{Int}} G$$

le schéma en groupes sur  $S$  des automorphismes  $G$ -équivariants de  $\mathcal{E}$ .

Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Pour toute représentation algébrique linéaire

$$\rho : G \rightarrow GL(V),$$

soit

$$\rho(\mathcal{E}) = G \times_k^{G,\rho} V$$

le fibré vectoriel sur  $S$  que l'on obtient en poussant  $\rho$  par la représentation  $\rho$ .

Lorsque  $\mathcal{E}$  est un  $G$ -torseur sur  $C_S = C \times_k S$  (où  $C$  est la courbe du § 3.2) on pose

$$\rho_D(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_{C_S}^{G,\rho} V_{D,S}$$

où  $V_{D,S} = V_D \times_k S$  est le fibré vectoriel sur  $C_S$  déduit du fibré vectoriel  $V_D$  sur  $C$  (cf. § 3.3) par changement de base.

### 4.2 Trivialisation générique des $G$ -torseurs

Soit  $K$  une extension de  $k$  et  $\mathcal{E}$  un  $G$ -torseur sur  $C_K$ . Dans la suite, on fera appel plusieurs fois au lemme suivant.

LEMME 4.2.1. *Il existe  $K'$  une extension finie de  $K$  telle que le  $G$ -torseur  $\mathcal{E} \times_{C_K} C_{K'}$  soit trivial au point générique de  $C_{K'}$ .*

*Démonstration.* Clairement, il suffit de prouver le lemme lorsque  $K$  est algébriquement clos. Dans ce cas,  $F$  le corps des fonctions de  $C_K$ , est de dimension  $\leq 1$ . Soit  $F_s$  une clôture séparable de  $F$ . Le toseur  $\mathcal{E}$ , qui est lisse sur  $C_K$ , admet des sections au-dessus de  $F_s$ . Comme  $G$  est connexe et que  $F$  est de dimension  $\leq 1$ , on sait que l'ensemble  $H^1(F_s/F, G)$  est réduit à la classe triviale (cf. [Ser94], ch. III § 2 théorème 1' et les remarques qui suivent).  $\square$

### 4.3 Réductions des toseurs à un sous-groupe

On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit  $P$  un sous-groupe algébrique de  $G$ . Une réduction du  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  sur  $S$  à  $P$  est la donnée d'un  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_P$  sur  $S$  et d'un isomorphisme du  $G$ -torseur

$$\mathcal{E}_P \times^P G,$$

où  $G$  est muni de l'action de  $P$  par translation à gauche, sur  $\mathcal{E}$ . Le morphisme  $P$ -équivariant évident  $\mathcal{E}_P \rightarrow \mathcal{E}_P \times^P G \simeq \mathcal{E}$  donne, par passage au quotient par  $P$ , une section

$$\sigma_P : S \rightarrow \mathcal{E}/P.$$

Réciproquement,  $\mathcal{E}$  est un  $P$ -torseur au-dessus de  $\mathcal{E}/P$  qui, lorsqu'on le tire en arrière par une section de  $\mathcal{E}/P$ , donne une réduction de  $\mathcal{E}$  à  $P$ . De cette manière, on obtient une bijection naturelle entre les sections de  $\mathcal{E}/P$  et les classes d'isomorphisme de réductions de  $\mathcal{E}$  à  $P$ .

### 4.4 Morphisme caractéristique

Rappelons qu'on a fixé en § 3.2 une courbe  $C$  sur  $k$  et un point  $\infty \in C(k)$ . Soit  $S$  un  $k$ -schéma et  $C_S$  et  $\infty_S$  les objets obtenus par changement de base. Soit  $\mathcal{E}$  un  $G$ -torseur sur  $C_S$ . La construction du paragraphe 4.1 donne un fibré vectoriel  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  sur  $C_S$ . Le morphisme caractéristique défini en § 2.2 (2.2.1)

$$\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{car}$$

est  $G$ -invariant et  $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant. Il induit donc un morphisme par abus encore noté  $\chi$

$$\chi : \text{Ad}_D(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{car}_{D,S}$$

et donc un morphisme toujours noté de la même façon

$$\chi : H^0(C_S, \text{Ad}_D(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(C_S, \text{car}_{D,S}).$$

Le schéma en groupes  $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$  agit sur le fibré  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  par l'action adjointe. Pour toute section  $\theta \in H^0(C_S, \text{Ad}_D(\mathcal{E}))$ , soit

$$\text{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta)$$

le sous-schéma en groupes de  $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$  qui centralise  $\theta$ .

#### 4.5 Le champ algébrique de Hitchin

Introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 4.5.1. Le champ de Hitchin  $\mathcal{M}_G$  est le  $k$ -champ algébrique dont la catégorie fibre en un  $k$ -schéma  $S$  est le groupoïde dont les objets sont les triplets  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  qui vérifient les conditions suivantes :

- (1)  $\mathcal{E}$  est un  $G$ -torseur sur  $C \times_k S$  ;
- (2)  $\theta$  est une section du fibré vectoriel  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  ;
- (3)  $t$  appartient à  $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(S)$  et satisfait

$$\chi(\theta)(\infty_S) = \chi(t)$$

et l'ensemble des morphismes d'un objet  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  sur un autre  $(\mathcal{E}', \theta', t')$  est :

- vide si  $t \neq t'$  ;
- l'ensemble des isomorphismes  $G$ -équivariants de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}'$  tels que l'isomorphisme induit de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  sur  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$  envoie  $\theta$  sur  $\theta'$ .

*Remarque.* Ce n'est pas la définition usuelle du champ de Hitchin qui ne considère que des couples  $(\mathcal{E}, \theta)$ . Ici la donnée supplémentaire d'un élément  $t$  qui est  $G$ -régulier force la section  $\theta$  à être semi-simple régulière en  $\infty_S$  et donc à l'être aussi génériquement. Le morphisme d'oubli de  $t$  fait de notre champ de Hitchin un revêtement étale et galoisien de groupe  $W$  d'un ouvert du champ de Hitchin usuel.

#### 4.6 La fibration de Hitchin

Il s'agit là du morphisme

$$f_G : \mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{A}_G$$

défini pour tout  $k$ -schéma  $S$  et tout triplet  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  dans  $\mathcal{M}(S)$  par

$$f(m) = (\chi(\theta), t).$$

Dans la suite, on omet le plus souvent l'indice  $G$  et on note le morphisme ci-dessus ainsi

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}.$$

#### 4.7 Morphisme $\chi_P$

Soit  $K$  une extension de  $k$  et  $P \in \mathcal{F}$  un sous-groupe parabolique semi-standard. Soit  $\mathcal{E}$  un  $P$ -torseur sur  $C_K$ . Soit  $\text{Ad}$  l'action adjointe de  $P$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ . La construction du paragraphe 4.1 appliquée au groupe  $P$  fournit un fibré vectoriel  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  sur  $C_K$ . Le morphisme caractéristique défini en § 2.6 (2.7.1)

$$\chi_P : \mathfrak{p} \rightarrow \text{car}_P$$

est  $P$ -invariant et  $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant. Il induit donc des morphismes par abus encore notés  $\chi_P$

$$\chi_P : \text{Ad}_D(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{car}_{P,D,S}$$

et

$$\chi_P : H^0(C_S, \text{Ad}_D(\mathcal{E})) \rightarrow H^0(C_S, \mathbf{car}_{P,D,S}).$$

#### 4.8 Réduction à un sous-groupe parabolique

Soit  $S$  un  $k$ -schéma affine et  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$ . Introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 4.8.1. On appelle réduction de  $m$  à  $P$  tout triplet  $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t_P)$  formé de :

- une réduction  $\mathcal{E}_P$  de  $\mathcal{E}$  à  $P$  autrement dit un  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_P$  sur  $C \times_k S$  muni d'un isomorphisme

$$\mathcal{E}_P \times_k^P G \simeq \mathcal{E} ; \tag{4.8.1}$$

- une section  $\theta_P$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P)$  sur  $C \times_k S$  ;
- un point  $t_P \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(S)$  qui vérifie

$$\chi_P(\theta_P)(\infty_S) = \chi_P(t_P)$$

qui vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) l'isomorphisme, qui se déduit de (4.8.1),

$$\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P \times_k^P G) \simeq \text{Ad}_D(\mathcal{E})$$

composé avec le morphisme

$$\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \hookrightarrow \mathcal{E}_P \times_k^{P,\text{Ad}} \mathfrak{g} \simeq \text{Ad}_D(\mathcal{E}_P \times_k^P G)$$

envoie la section  $\theta_P$  sur  $\theta$  ;

- (2) les points  $t_P$  et  $t$  sont égaux.

Dans la suite, on dit que deux réduction  $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$  et  $(\mathcal{E}'_P, \theta'_P, t)$  de  $m$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de  $P$ -torseurs de  $\mathcal{E}_P$  sur  $\mathcal{E}'_P$  tel que l'isomorphisme qui s'en déduit  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}'_P)$  envoie  $\theta$  sur  $\theta'$ .

#### 4.9 Existence de réductions sur un ouvert

Soit  $S$  un  $k$ -schéma test et  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$ . Soit  $M \in \mathcal{L}$  et  $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(S)$  tels que

$$f(m) = \chi_G^M((a_M, t)).$$

Soit  $U$  l'ouvert de  $C_S$ , image réciproque par  $a_M$  de l'ouvert  $\mathbf{car}_M^{\text{reg}}$ . Soit  $X$  une section de  $\mathfrak{m} \times_k U$  tel que  $\chi_M(X)$  coïncide avec  $a_M$  sur l'ouvert  $U$ . L'existence d'une section de Kostant assure qu'une telle section existe. Notons que  $X$  est partout semi-simple  $G$ -régulier. Soit  $T_X$  le sous-schéma en tores de  $M_U$  centralisateur de  $X$  dans  $G_U$ . Introduisons alors  $\mathcal{E}'$  le  $U$ -schéma défini ainsi : pour  $U$ -schéma  $\Omega$ , l'ensemble des sections de  $\mathcal{E}'$  au-dessus de  $\Omega$  est l'ensemble des sections de  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $\Omega$  telles que l'isomorphisme  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_\Omega) \rightarrow \mathfrak{g} \times_k \Omega$  qui s'en déduit envoie  $\theta_\Omega$  sur  $X_\Omega$ . Comme localement pour la topologie étale les sous-schémas en tores de  $G \times_k U$  sont conjugués au tore constant  $T \times_k U$  et qu'on a l'égalité

$$\chi_G(\theta) = \chi_G^M(a_M) = \chi_G(X)$$

sur  $U$ , on voit que  $\mathcal{E}'$  possède des sections localement pour la topologie étale. Il est clair alors que  $\mathcal{E}'$  est un  $T_X$ -torseur sur  $U$  qui devient, une fois poussé par le morphisme  $T_X \rightarrow G_U$ , isomorphe

à  $\mathcal{E}_U$ . En particulier, pour tout sous-groupe parabolique  $P \in \mathcal{F}(M)$  soit  $\mathcal{E}_P$  le  $P$ -torseur sur  $U$  qu'on déduit de  $\mathcal{E}'$  en poussant par le morphisme  $T_X \rightarrow P_U$ . On vérifie alors que  $(\mathcal{E}_P, \theta_U, t_U)$  est une réduction à  $P$  (en un sens évident) du triplet déduit de  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  par changement de base à  $U$ .

**4.10 Existence et unicité des réductions**

Voici le principal résultat sur l'existence et l'unicité de réductions à un sous-groupe parabolique d'un triplet de Hitchin sur le spectre d'un corps  $K$  extension de  $k$ .

PROPOSITION 4.10.1. Soit  $m \in \mathcal{M}(K)$  et  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K))$  (cf. proposition 3.6.2). Soit  $P \in \mathcal{F}$ . On a l'alternative suivante :

- soit  $P$  ne contient pas  $M$  : il n'y a alors aucune réduction de  $m$  à  $P$  ;
- soit  $P$  contient  $M$  : dans ce cas, il existe une et une seule réduction de  $m$  à  $P$  (à isomorphisme près).

Démonstration. Soit  $P \in \mathcal{F}$ . Montrons que la condition  $M \subset P$  est nécessaire à l'existence d'une réduction à  $P$ . Soit  $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$  une réduction de  $m$  à  $P$ . Le couple  $(\chi_P(\theta_P), t)$  définit un élément de  $\mathcal{A}_{M_P}(K)$  dont l'image dans  $\mathcal{A}_G(K)$  est égale à  $f(m)$ . L'hypothèse  $f(m) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K))$  et la proposition 3.6.2 impliquent qu'on a  $M \subset M_P$  d'où  $M \subset P$ .

On suppose désormais  $M \subset P$ . Montrons tout d'abord l'existence d'une réduction à  $P$ . La construction du paragraphe § 4.9 fournit une réduction de  $m$  à  $P$  mais seulement sur un ouvert  $U$  de  $C_K$ . Il s'agit alors de voir que cette réduction se prolonge autrement dit que le toseur  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_P$  se prolonge à  $C_K$ . Par la bijection décrite au § 4.3, il revient au même de montrer que la section  $U \rightarrow \mathcal{E}/P$  déduite de  $\mathcal{E}_P$  se prolonge à tout  $C_K$ . Or une telle section se prolonge par propriété du quotient  $\mathcal{E}/P$  sur  $C$  d'où l'existence.

Montrons enfin l'unicité d'une réduction de  $m$  à  $P$ . Soit  $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$   $m'_P = (\mathcal{E}'_P, \theta'_P, t)$  deux telles réductions. Soit  $\sigma_P$  et  $\sigma'_P$  les sections de  $\mathcal{E}/P$  déduites de  $\mathcal{E}_P$  et  $\mathcal{E}'_P$  par la construction décrite au § 4.3. Il s'agit de prouver que ces sections sont égales et il suffit, par propriété de  $\mathcal{E}/P$  sur  $C_K$ , de le prouver au point générique  $\text{Spec}(F)$  de  $C_K$  et même au point  $\text{Spec}(F_s)$  où  $F_s$  est une clôture séparable du corps des fonctions  $F$  de la courbe  $C_K$ .

Or section  $\sigma_P$  donne une section  $\text{Spec}(F_s) \rightarrow \mathcal{E}/P$  et celle-ci est la  $P(F_s)$ -orbite de l'image d'un point  $e \in \mathcal{E}_P(F_s)$  par le morphisme  $\mathcal{E}_P \rightarrow \mathcal{E}$ . Un tel point  $e \in \mathcal{E}_P(F_s)$  donne un isomorphisme  $P$ -équivariant

$$\Phi_P : \mathcal{E}_{P,F_s} \rightarrow P \times_k F_s$$

un isomorphisme de schémas en groupes

$$\iota_P : \text{Aut}_P(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow P \times_k F_s$$

et un isomorphisme dérivé

$$d\iota_P : \text{Ad}_P(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow \mathfrak{p} \times_k F_s.$$

Soit  $Y = d\iota_P(\theta_{F_s}) \in \mathfrak{p}(F_s)$ . Par définition de la réduction,  $\chi_P(Y)$  est égal à  $a_{M,F_s}$  la restriction de la section  $a_M : C \rightarrow \mathfrak{c}_M$  à  $\text{Spec}(F_s)$ . En utilisant la proposition 3.9.1 pour le groupe non pas  $G$  mais  $M$ , on obtient l'existence de  $X \in \mathfrak{m}(F)$  semi-simple tel que :

- (1)  $\chi_M(X)$  est égal à la restriction  $a_{M,F}$  de  $a_M$  au point générique ;
- (2) il existe  $m \in M(F_\infty)$  tel que  $\text{Ad}(m)X = t_a$  où  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}(\mathcal{O}_\infty)$  relève  $t$  et vérifie  $\chi_M(t_a) = t$ .

Notons que comme  $a_{M,F}$  appartient à  $\mathbf{car}_M^{G\text{-reg}}$ , les éléments  $X$  et  $t_a$  sont automatiquement  $G$ -réguliers. Comme on a l'égalité  $\chi_P(Y) = \chi_P(X)$  dans  $\mathbf{car}_M^{G\text{-reg}}(F_s)$ , par le lemme 3.8.1 les éléments  $X$  et  $Y$  sont conjugués sous  $P(F_s)$ . Quitte à traduire  $e$  par un élément de  $P(F_s)$  on peut et on va supposer que  $Y = X$ . L'image de  $e$  dans  $\mathcal{E}(F_s)$  donne un isomorphisme  $G$ -équivariant

$$\Phi : \mathcal{E}_{F_s} \rightarrow G \times_k F_s \tag{4.10.1}$$

un isomorphisme de schémas en groupes

$$\iota : \text{Aut}_G(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow G \times_k F_s \tag{4.10.2}$$

et un isomorphisme dérivé

$$d\iota : \text{Ad}_G(\mathcal{E}_{F_s}) \rightarrow \mathfrak{g} \times_k F_s. \tag{4.10.3}$$

Ce dernier est tel que  $X = d\iota(\theta)$  est un élément de  $\mathfrak{m}(F)$  semi-simple  $G$ -régulier qui vérifie les assertions (1) et (2) ci-dessus. Notons par un  $'$  les mêmes objets attachés à la réduction  $m'_P$ . Soit  $x \in G(F_s)$  tel que  $e' = e \cdot x$ . L'automorphisme de  $\mathfrak{g} \times_k F_s$  donné par  $d\iota' \circ d\iota^{-1}$  est alors égal à  $\text{Ad}(x)$ . Par conséquent,  $\text{Ad}(x)X = X'$ . On a donc les égalités

$$t_a = \text{Ad}(m')X' = \text{Ad}(m'x)X = \text{Ad}(m'xm^{-1})t_a$$

ce qui implique  $m'xm^{-1} \in T(F_\infty \otimes_F F_s)$  puisque  $t_a$  est  $G$ -régulier. Il s'ensuit qu'on a  $x \in M(F_s)$ . Donc les sections  $\sigma_P$  et  $\sigma'_P$  coïncident au point générique. Ainsi il existe un isomorphisme de  $\mathcal{E}_P$  sur  $\mathcal{E}'_P$ . Avec les notations précédentes, on a vu que  $X$  et  $X'$  sont conjugués sous  $M(F_s)$ . Donc on peut choisir cet isomorphisme de sorte que  $\theta_P$  s'envoie sur  $\theta'_P$  (au moins au point  $\text{Spec}(F_s)$  donc partout). Cela termine la démonstration de l'unicité et de la proposition.  $\square$

### 5. Convexe associé à un triplet de Hitchin

#### 5.1 Les espaces $\mathfrak{a}_M$

Pour tout groupe  $M$  défini sur  $k$  soit  $X^*(M)$  le groupe des caractères rationnels de  $M$  et

$$X_*(M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{Z}).$$

Lorsque  $M$  est un tore, on note  $X_*(M)$  s'identifie au groupe des cocaractères de  $M$  par la dualité naturelle entre les groupes de caractères et de cocaractères.

Soit  $M \in \mathcal{L}$  un sous-groupe de Levi semi-standard et soit  $A_M$  la composante neutre du centre de  $M$ . Le morphisme de restriction

$$X^*(M) \rightarrow X^*(A_M)$$

est injectif et son conoyau est fini. Soit  $\mathfrak{a}_M^*$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel défini par

$$\mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X^*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Son dual noté  $\mathfrak{a}_M$  s'identifie à

$$\mathfrak{a}_M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{R}).$$

On ne confondra pas  $\mathfrak{a}_M$  avec l'algèbre de Lie de  $A_M$ . Pour tout  $L \in \mathcal{L}(M)$ , les morphismes de restriction

$$X^*(L) \rightarrow X^*(M) \rightarrow X^*(A_L)$$

induisent des morphismes

$$\mathfrak{a}_L^* \rightarrow \mathfrak{a}_M^* \rightarrow \mathfrak{a}_L^*$$

dont le composé est l'identité. De la sorte,  $\mathfrak{a}_L^*$  s'identifie à un sous-espace de  $\mathfrak{a}_M^*$ . Soit

$$(\mathfrak{a}_M^L)^* = \text{Ker}(\mathfrak{a}_M^* \rightarrow \mathfrak{a}_L^*).$$

On a donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_M^* = \mathfrak{a}_L^* \oplus (\mathfrak{a}_M^L)^*$$

d'où dualement une décomposition

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_L \oplus \mathfrak{a}_M^L$$

où  $\mathfrak{a}_M^L$  est l'orthogonal de  $\mathfrak{a}_L^*$  dans  $\mathfrak{a}_M$ . Tout  $\xi \in \mathfrak{a}_M$  s'écrit

$$\xi = \xi_L + \xi^L \tag{5.1.1}$$

suivant cette décomposition.

On généralise les définitions précédentes à un sous-groupe parabolique  $P \in \mathcal{F}$  de la façon suivante. Soit  $A_P = A_{M_P}$  et  $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$ . Soit  $Q \in \mathcal{F}(P)$  et  $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_{M_P}^{M_Q}$ ; On note par un exposant \* le dual de  $\mathfrak{a}_P^Q$ . On a donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q$$

et tout  $\xi \in \mathfrak{a}_P$  s'écrit

$$\xi = \xi^Q + \xi_Q \tag{5.1.2}$$

suivant cette décomposition.

### 5.2 Racines et coracines

Soit  $B \in \mathcal{F}(T)$  un sous-groupe de Borel de  $G$ . Soit  $\Delta_B$  l'ensemble des racines simples de  $T$  dans  $B$ . Soit  $\Delta_B^\vee$  l'ensemble des coracines simples. Les parties  $\Delta_B$  et  $\Delta_B^\vee$  forment des bases respectives des espaces  $(\mathfrak{a}_T^G)^*$  et  $\mathfrak{a}_T^G$ .

Soit  $P \in \mathcal{F}(B)$  et  $\Delta_{P,B} \subset \Delta_B$  le sous-ensemble formé de racines dans  $N_P$ . Soit  $\Delta_{P,B}^\vee \subset \Delta_B^\vee$  le sous-ensemble correspondant de coracines. L'application de restriction  $X^*(T) \rightarrow X^*(A_P)$  induit une bijection de  $\Delta_{P,B}$  sur un ensemble noté  $\Delta_P$ . De même, la projection  $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_P$  induit une bijection de  $\Delta_{P,B}^\vee$  sur une partie notée  $\Delta_P^\vee$ . Comme tout sous-groupe de Borel inclus dans  $P$  qui contient  $T$  appartient à l'orbite de  $B$  sous le groupe de Weyl  $W^{M_P}(T)$ , les ensembles  $\Delta_P$  et  $\Delta_P^\vee$  ne dépendent pas du choix de  $B$ . En outre,  $\Delta_P$  et  $\Delta_P^\vee$  forment des bases respectives de  $\mathfrak{a}_P^*$  et  $\mathfrak{a}_P$ . Soit  $\hat{\Delta}_P$  la base de  $\mathfrak{a}_P^*$  duale de  $\Delta_P^\vee$ .

LEMME 5.2.1. *Soit  $Q \in \mathcal{F}(P)$ . On a alors l'inclusion naturelle  $\hat{\Delta}_Q \subset \hat{\Delta}_P$ .*

*Démonstration.* Soit  $B \subset P$  un sous-groupe de Borel qui contient  $T$ . On a l'inclusion  $\Delta_{Q,B}^\vee \subset \Delta_{P,B}^\vee$  et le complémentaire  $\Delta_{P,B}^\vee - \Delta_{Q,B}^\vee$  est inclus dans  $\mathfrak{a}_T^Q$ . Soit  $\Delta_{Q,P}^\vee$  l'image de  $\Delta_{Q,B}^\vee$  par la projection  $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_P$ . Le complémentaire  $\Delta_{P,B}^\vee - \Delta_{Q,P}^\vee$  est alors inclus dans  $\mathfrak{a}_P^Q$ . La projection  $\mathfrak{a}_P \rightarrow \mathfrak{a}_Q$  induit une bijection de  $\Delta_{Q,P}^\vee$  sur  $\Delta_Q^\vee$ .

Soit  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q \subset \mathfrak{a}_Q^*$ . Soit  $\alpha^\vee \in \Delta_Q^\vee$  tel que  $\varpi(\alpha^\vee) = 1$  et  $\varpi$  est nul sur  $\Delta_Q^\vee - \{\alpha^\vee\}$ . Soit  $\beta^\vee \in \Delta_P^\vee$ . On a alors l'alternative suivante. Soit  $\beta^\vee \notin \Delta_{Q,P}^\vee$  et alors  $\varpi(\beta^\vee) = 0$ . Soit  $\beta^\vee \in \Delta_{Q,P}^\vee$  et alors  $\varpi(\beta^\vee)$  vaut 1 si  $\beta^\vee$  est l'unique élément de  $\Delta_{Q,P}^\vee$  et 0 sinon. Cela prouve que  $\varpi \in \hat{\Delta}_P$ .  $\square$



**5.3 Cônes dans  $\mathfrak{a}_P$**

Soit  $P \in \mathcal{F}$ . Soit  ${}^+\mathfrak{a}_P$  le cône *obtus*, ouvert dans  $\mathfrak{a}_P$ , défini par

$${}^+\mathfrak{a}_P = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0 \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}.$$

Soit  $\overline{{}^+\mathfrak{a}_P}$  l'adhérence de  ${}^+\mathfrak{a}_P$  dans  $\mathfrak{a}_P$  c'est-à-dire

$$\overline{{}^+\mathfrak{a}_P} = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) \geq 0 \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}.$$

LEMME 5.3.1. *Soit  $P \subsetneq G$  un sous-groupe parabolique semi-standard. On a les assertions suivantes :*

- (1) *pour tout  $Q \in \mathcal{F}(P)$  on a  ${}^+\mathfrak{a}_P \subset {}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$  ;*
- (2) *le cône  ${}^+\mathfrak{a}_P$  est l'intersection des cônes  ${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$  lorsque  $Q$  parcourt les sous-groupes paraboliques propres maximaux de  $G$  qui contiennent  $P$ .*

Ces assertions valent aussi pour les cônes fermés.

*Démonstration.* Soit  $Q \in \mathcal{F}(P)$ . Il est clair qu'on a

$${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q = \{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0 \forall \varpi \in \hat{\Delta}_Q\}.$$

La première assertion résulte alors de l'inclusion  $\hat{\Delta}_Q \subset \hat{\Delta}_P$  du lemme 5.2.1. Pour montrer la seconde assertion, il suffit d'après la première assertion de prouver que l'intersection des cônes  ${}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_P^Q$  lorsque  $Q$  parcourt les éléments maximaux de  $\mathcal{F}(P)$  est inclus dans  ${}^+\mathfrak{a}_P$ . Soit  $H$  dans cet intersection. Il s'agit de voir que  $\varpi(H) > 0$  pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_P$ . Mais c'est évident car pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_P$  il existe un unique sous-groupe parabolique  $Q$  propre et maximal qui contient  $P$  tel que  $\hat{\Delta}_Q = \{\varpi\}$ . □

**5.4 Degré d'une réduction**

Soit  $K$  une extension de  $k$ ,  $m \in \mathcal{M}(K)$  un triplet de Hitchin,  $P \in \mathcal{F}$  un sous-groupe parabolique semi-standard et  $m_P = (\mathcal{E}, \theta, t)$  une réduction de  $m$  à  $P$  (cf. définition 4.8.1. Le *degré* de la réduction  $m_P$  est l'unique élément  $\text{deg}(m_P) \in \mathfrak{a}_P$  qui satisfait pour tout caractère  $\mu \in X^*(P)$  l'égalité suivante

$$\mu(\text{deg}(m_P)) = \text{deg}(\mu(\mathcal{E}))$$

où  $\mu(\mathcal{E})$  est le fibré en droites sur  $C_K$  obtenu lorsqu'on pousse le torseur  $\mathcal{E}$  par la représentation

$$\mu : P \rightarrow \text{GL}(1)$$

et  $\text{deg}(\mu(\mathcal{E}))$  est son degré.

LEMME 5.4.1. *Soit  $P \in \mathcal{F}$  et  $m_P$  une réduction de  $m$  à  $P$ . Soit  $Q \in \mathcal{F}(P)$  et  $m_Q$  une réduction de  $m$  à  $Q$ . Alors le degré  $\text{deg}(m_Q)$  est égal à la projection de  $\text{deg}(m_P)$  sur  $\mathfrak{a}_Q$  suivant la décomposition  $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_P^Q$ .*

*Démonstration.* Rappelons que la réduction  $m_P$  est un certain triplet  $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$  (cf. définition 4.8.1). Soit  $\mathcal{E}_Q$  défini par  $\mathcal{E}_P \times_k^P Q$  et  $\theta_Q$  la section de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$  obtenue lorsqu'on compose  $\theta_P$  avec le morphisme  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P) \hookrightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$ . On vérifie que le triplet  $(\mathcal{E}_Q, \theta_Q, t)$  est une réduction de  $m$  à  $Q$  donc il est isomorphe à  $m_Q$  (cf. proposition 4.10.1). Soit  $\mu \in X^*(Q)$ . Il est clair que  $\mu(\mathcal{E}_Q)$  est isomorphe à  $\mu(\mathcal{E}_P)$ . On a donc

$$\mu(\text{deg}(m_P)) = \text{deg}(\mu(\mathcal{E}_P)) = \text{deg}(\mu(\mathcal{E}_Q)) = \mu(\text{deg}(m_Q)).$$

Il s'ensuit que  $\text{deg}(m_P) - \text{deg}(m_Q)$  appartient à  $\mathfrak{a}_P^Q$  d'où le lemme. □

**5.5 Convexes associés à un triplet de Hitchin**

On poursuit avec les notations du paragraphe précédent. Soit  $M$  l'unique sous-groupe de Levi semi-standard tel que  $f(m)$  appartienne à  $\mathcal{A}_{M,\text{el}}(K)$  (cf. proposition 3.6.2). Pour tout  $P$  dans l'ensemble  $\mathcal{F}(M)$  des sous-groupes paraboliques de  $G$  contenant  $M$  soit  $m_P$  l'unique réduction de  $m$  à  $P$  (cf. proposition 4.10.1) et soit

$${}^+C_{P,m} = -\text{deg}(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P$$

le cylindre ouvert de  $\mathfrak{a}_T$  de base la chambre obtuse  $-\text{deg}(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_P$  et

$$\overline{{}^+C_{P,m}} = -\text{deg}(m_P) - \overline{{}^+\mathfrak{a}_P} + \mathfrak{a}_T^P$$

son adhérence dans  $\mathfrak{a}_T$ . Notons que, pour  $P = G$ , on a  ${}^+C_{G,m} = \mathfrak{a}_T$ .

Soit  $\mathcal{C}_m$  le polyèdre ouvert inclus dans  $\mathfrak{a}_T$  défini par

$$\mathcal{C}_m = \bigcap_{P \in \mathcal{F}(M)} {}^+C_{P,m}$$

et soit

$$\overline{\mathcal{C}_m} = \bigcap_{P \in \mathcal{F}(M)} \overline{{}^+C_{P,m}}$$

son adhérence.

Si  $M = G$  alors  $\mathcal{F}(G) = \{G\}$  et  $\mathcal{C}_m = \overline{\mathcal{C}_m} = \mathfrak{a}_T$ .

*Remarques.* Nous verrons une définition équivalente des polyèdres précédents à la proposition 5.8.1. Ces définitions sont directement suggérées par la définition d'Arthur des poids qui interviennent dans la définition des intégrales orbitales pondérées (cf. [Art76, §§ 2, 3]). Le lien avec les constructions d'Arthur sera plus évident lorsque nous disposerons d'une description adélique des triplets de Hitchin (cf. § 7.6). Lorsque  $M = T$ , on retrouve le «polyèdre complémentaire» que Behrend associe au schéma en groupes  $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$  et au tore  $T$  (cf. [Beh95, § 6]).

**PROPOSITION 5.5.1.** *Avec les notations ci-dessus, dans la définition de  $\mathcal{C}_m$  ou  $\overline{\mathcal{C}_m}$ , on peut remplacer  $\mathcal{F}(M)$  par  $\mathcal{P}(M)$ . Si  $M \subsetneq G$  on peut remplacer  $\mathcal{F}(M)$  par les éléments maximaux de  $\mathcal{F}(M) - \{G\}$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence évidente du lemme suivant. □

**LEMME 5.5.2.** *Soit  $P \in \mathcal{F}(M)$  un sous-groupe parabolique semi-standard. On a les assertions suivantes :*

- (1) *pour tout  $Q \in \mathcal{F}(P)$  on a  ${}^+C_{P,m} \subset {}^+C_{Q,m}$  ;*
- (2) *le cône  ${}^+C_{P,m}$  est l'intersection des cônes  ${}^+C_{Q,m}$  lorsque  $Q$  parcourt les sous-groupes paraboliques propres maximaux de  $G$  qui contiennent  $P$ .*

*Ces assertions valent aussi pour les cônes fermés.*

*Démonstration.* Soit  $Q \in \mathcal{F}(P)$ . Le lemme 5.4.1 implique qu'on a l'égalité

$${}^+C_{Q,m} = -\text{deg}(m_P) - {}^+\mathfrak{a}_Q + \mathfrak{a}_T^Q.$$

Le lemme est alors une conséquence immédiate du lemme 5.3.1. □

**5.6 Semi-continuité des convexes**

Soit  $S$  un  $k$ -schéma affine et  $m \in \mathcal{M}(S)$ . Pour tout  $s \in S$ , soit  $m_s \in \mathcal{M}(k(s))$  le triplet de Hitchin sur  $k(s)$ , le corps résiduel de  $s$ , qui se déduit de  $m$  par changement de base. Soit  $\mathcal{C}_m$ , respectivement  $\overline{\mathcal{C}}_m$ , l'application sur  $S$  qui à tout  $s \in S$  associe le convexe ouvert  $\mathcal{C}_{m_s}$ , respectivement le convexe fermé  $\overline{\mathcal{C}}_{m_s}$ . Comme nous l'a fait remarquer l'un des rapporteurs, la proposition suivante et sa preuve sont similaires à la proposition 7.1.3 de la thèse de Behrend (cf. [Beh]).

PROPOSITION 5.6.1. *Supposons  $S$  noethérien. L'application  $\mathcal{C}_m$  de  $\mathcal{M}(k(s))$  dans l'ensemble des parties de  $\mathfrak{a}_T$  ordonné par l'inclusion est semi-continue inférieurement c'est-à-dire pour toute partie  $\Xi$  de  $\mathfrak{a}_T$  l'ensemble*

$$\{s \in S \mid \Xi \subset \mathcal{C}_{m_s}\}$$

est ouvert. Il en est de même pour l'application  $\overline{\mathcal{C}}_m$ .

Démonstration. Soit  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(S)$ . On ne traite que l'application  $\mathcal{C}_m$  car la même démonstration s'applique à  $\overline{\mathcal{C}}_m$ .

Montrons tout d'abord que  $\mathcal{C}_m$  est constructible et ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur  $S$ . Pour cela, quitte à remplacer  $S$  par une composante irréductible, on suppose que  $S$  est irréductible. Soit  $\eta$  le point générique de  $S$  et  $C_\eta = C \times_k k(\eta)$ . Soit  $m_\eta = (\mathcal{E}_\eta, \theta_\eta, t_\eta)$  le triplet de Hitchin sur  $C_\eta$  déduit de  $m$  par le changement de base  $\text{Spec}(k(\eta)) \rightarrow S$ . Soit  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m_\eta) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(\eta)))$  (cf. proposition 3.6.2). Soit  $P \in \mathcal{F}(M)$  et  $m_{P,\eta} = (\mathcal{E}_{P,\eta}, \theta_\eta, t_\eta)$  «la» réduction de  $m_\eta$  à  $P$  (cf. proposition 4.10.1). On a associé au § 4.3 à la  $P$ -réduction  $\mathcal{E}_{P,\eta}$  une section  $C_\eta \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$ . Celle-ci se prolonge se prolonge à tout  $C_S$  privé d'un certain fermé. L'image de ce fermé par le morphisme propre  $C_S \rightarrow S$  est un fermé qui ne contient pas le point générique  $\eta$ . Soit  $U$  le complémentaire de ce fermé de  $S$ . Par construction, la section  $C_\eta \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$  se prolonge en une section  $C_U \rightarrow \mathcal{E}_\eta/P$ . En utilisant la bijection du § 4.3, on déduit de cette section un  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_{P,U}$  qui est un prolongement de  $\mathcal{E}_{P,\eta}$  et qui est une réduction de  $\mathcal{E}_U$  à  $P$ . On en déduit que le triplet  $(\mathcal{E}_{P,U}, \theta_U, t_U)$  est une réduction de  $m$  à  $P$  sur  $U$ . Il s'ensuit que l'application qui à  $u \in U$  associe le degré de  $m_{P,u}$  est constante. Quitte à réduire  $U$ , l'application précédente est constante pour tout  $P \in \mathcal{F}(M)$ . Quitte à réduire encore  $U$ , on peut supposer que  $f(m_u) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(u)))$  pour tout  $u \in U$ . Mais alors l'application  $\mathcal{C}_m$  est constante sur  $U$ . Par récurrence noethérienne, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et il existe une partition de  $S$  en des ensembles constructibles sur lesquels  $\mathcal{C}$  est constante.

Montrons ensuite que pour tout  $\Xi \subset \mathfrak{a}_T$  l'ensemble

$$\{s \in S \mid \Xi \subset \mathcal{C}_{m_s}\}$$

est ouvert. D'après ce qui précède, il est constructible. Il suffit donc de montrer qu'il est stable par généralisation. Pour cette question, on peut supposer que  $S$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soit  $s$  le point spécial et  $\eta$  le point générique de  $S$ . Il suffit de montrer l'inclusion

$$\mathcal{C}_{m_s} \subset \mathcal{C}_{m_\eta}. \tag{5.6.1}$$

Soit  $(a, t) = f(m) \in \mathcal{A}_G(S)$ . Soit  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $(a_\eta, t_\eta)$  appartienne à  $\chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k(\eta)))$  (cf. proposition 3.6.2). Comme le morphisme  $\chi_G^M$  est une immersion fermée (cf. proposition 3.5.1), il existe un couple  $(a_M, t) \in \mathcal{A}_M(S)$  d'image  $(a, t)$  dans  $\mathcal{A}_G(S)$ . Si  $M = G$  l'inclusion (5.6.1) est triviale puisqu'alors  $\mathcal{C}_{m_\eta} = \mathfrak{a}_T$ . Supposons donc  $M \subsetneq G$ . En utilisant la proposition 5.5.1, on voit qu'il suffit montrer que pour tout  $P \in \mathcal{F}(M)$  maximal, on a

$${}^+\mathcal{C}_{P,m_s} \subset {}^+\mathcal{C}_{P,m_\eta}$$

ce qui revient à montrer que

$$\varpi(\deg(m_{P,s}) - \deg(m_{P,\eta})) \geq 0$$

où  $\varpi$  est l'unique élément de  $\hat{\Delta}_P$ . Soit

$$\rho : G \rightarrow V$$

la représentation irréductible de dimension finie de plus haut poids  $\varpi$ . Soit  $V_\varpi \subset V$  la droite engendrée par un vecteur de plus haut poids  $\varpi$ . En particulier, cette droite est stable sous l'action de  $P$ .

Soit  $U$  l'ouvert de  $C_S$  défini comme l'image réciproque par  $a_M$  de l'ouvert  $G$ -régulier  $\text{cat}_M^{\text{reg}}$ . On a construit au § 4.9 un triplet  $(\mathcal{E}_{P,U}, \theta_U, t_U)$  formé d'une réduction à  $P$  du triplet déduit de  $m$  par changement de base à  $U$ . On déduit de  $\mathcal{E}_{P,U}$  une section  $U \rightarrow \mathcal{E}/P$  qui, par projectivité de  $\mathcal{E}/P$ , se prolonge à un ouvert  $U_1 \supset U$  qui contient tous les points de codimension  $\leq 1$  de  $C_S$ . Notons que  $U_1$  contient  $C_\eta$  ainsi que le point générique de  $C_s$ . On obtient alors un  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_{P,U_1}$  qui prolonge  $\mathcal{E}_{P,U}$  (cf. § 4.3). On vérifie que le triplet  $(\mathcal{E}_{P,U_1}, \theta_{U_1}, t_{U_1})$  est une réduction de  $m$  à  $P$  sur  $U_1$ .

Le fibré en droite  $\mathcal{E}_{P,U_1} \times_k^{P,\rho} V_\varpi$  est un sous-faisceau localement facteur direct de la restriction à  $U_1$  du fibré vectoriel  $\rho(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times_k^{P,\rho} V$ . Il se prolonge de manière unique en un fibré en droites  $\mathcal{V}_\varpi$  qui est un sous-faisceau de  $\rho(\mathcal{E})$ . Toutefois, il se peut que hors de  $U_1$  ce fibré ne soit pas localement facteur direct. Comme  $U_1$  contient  $C_\eta$  on a l'égalité

$$\deg(\mathcal{V}_{\varpi,\eta}) = \varpi(\deg(m_{P,\eta})). \tag{5.6.2}$$

Sur l'ouvert  $U_1 \cap C_s$  de  $C_s$ , on obtient par restriction du triplet  $(\mathcal{E}_{P,U_1}, \theta_{U_1}, t_{U_1})$  une réduction de  $m_s$  à  $P$ . Toujours par les mêmes arguments, cette réduction se prolonge à  $C_s$ . On obtient donc un triplet  $(\mathcal{E}_{P,s}, \theta_s, t_s)$ . Le fibré en droites

$$\mathcal{V}'_{\varpi,s} = \mathcal{E}_{P,s} \times_k^{P,\rho} V_\varpi$$

est un sous-fibré localement facteur direct de  $\rho(\mathcal{E}_s)$  et comme ci-dessus on a

$$\deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) = \varpi(\deg(m_{P,s})). \tag{5.6.3}$$

Mais ce fibré  $\mathcal{V}'_{\varpi,s}$  coïncide avec  $\mathcal{V}_{\varpi,s}$  sur l'ouvert  $U_1 \cap C_s$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{V}'_{\varpi,s}$  est le saturé de  $\mathcal{V}_{\varpi,s}$  dans  $\rho(\mathcal{E}_s)$ . On a donc

$$\deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) \geq \deg(\mathcal{V}_{\varpi,s})$$

avec égalité si et seulement si  $\mathcal{V}'_{\varpi,s} = \mathcal{V}_{\varpi,s}$ . Avec (5.6.2) et (5.6.3) cela donne

$$\varpi(\deg(m_{P,s})) = \deg(\mathcal{V}'_{\varpi,s}) \geq \deg(\mathcal{V}_{\varpi,s}) = \varpi(\deg(m_{P,\eta})) = \varpi(\deg(m_{P,\eta}))$$

comme voulu. □

### 5.7 Réductions à des sous-groupes paraboliques adjacents

Soit  $K$  une extension de  $k$ . Avant d'énoncer le principal résultat de ce paragraphe, nous allons l'illustrer dans le cas de  $\text{GL}(2)$  muni de son sous-tore maximal standard  $T$ . Soit  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  un triplet de Hitchin dans  $\mathcal{M}_{\text{GL}(2)}(K)$ . La donnée de  $(\mathcal{E}, \theta)$  est équivalente à celle d'un fibré vectoriel  $\mathcal{V}$  de rang 2 sur  $C_K$ , d'un endomorphisme tordu

$$\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}(D)$$

encore noté  $\theta$ . On suppose que  $f(m)$  n'est pas elliptique. Il s'ensuit qu'au point générique  $\eta$  de  $C_K$ , l'endomorphisme  $\theta$  est diagonal dans une base notée  $(e_1, e_2)$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}_\eta$ . Soit

$\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}$  le sous-fibré en droites déterminé par  $e_i$ . Le point  $t \in \mathfrak{t}(K) \simeq K^2$  s'écrit comme un couple  $t = (t_1, t_2)$ . Il y a une indétermination sur la numérotation des fibrés  $\mathcal{V}_i$  qui est levée lorsqu'on exige qu'au point  $\infty$  l'endomorphisme  $\theta$  ait comme valeur propre  $t_i$  sur l'espace  $\mathcal{V}_{i,\infty}$ .

Soit  $B \subset GL(2)$  le sous-groupe de Borel standard et  $\bar{B}$  son opposé. Il résulte de la proposition 4.10.1 qu'il existe des réductions  $m_B$  et  $m_{\bar{B}}$  de  $m$  à  $B$  et  $\bar{B}$ . On identifie  $\mathfrak{a}_T$  à  $\mathbb{R}^2$  de manière évidente. On vérifie les formules suivantes

$$\deg(m_B) = (\deg(\mathcal{V}_1), \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1))$$

et

$$\deg(m_{\bar{B}}) = (\deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2), \deg(\mathcal{V}_2)).$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\deg(m_{\bar{B}}) - \deg(m_B) = \text{long}(\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2))(1, -1) \tag{5.7.1}$$

où la longueur notée  $\text{long}$  du module de torsion  $\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$  est donnée par

$$\deg(\mathcal{V}) - \deg(\mathcal{V}_1) - \deg(\mathcal{V}_2)$$

vu que le morphisme entre fibrés de rang 1

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_2$$

est injectif.

Au point générique de  $C_K$ , on a une somme directe

$$\mathcal{V}_\eta = \mathcal{V}_{1,\eta} \oplus \mathcal{V}_{2,\eta}.$$

Soit  $p_i$  la projection sur  $\mathcal{V}_{i,\eta}$ . Celle-ci commute à  $\theta$  qui agit sur le facteur  $\mathcal{V}_{i,\eta}$  par la section globale  $\lambda_i$  de  $\mathcal{O}(D)$ . Soit  $p_1(\mathcal{V})$  le fibré inversible image de  $\mathcal{V}$  par  $p_1$ . La projection  $p_1$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_2$  sur  $p_1(\mathcal{V})$ . La restriction de  $p_1$  à  $\mathcal{V}_1$  est injective et induit un isomorphisme de  $\mathcal{V}_1$  sur un sous-faisceau de  $p_1(\mathcal{V})$ . De même, on introduit le fibré  $p_2(\mathcal{V})$  et on obtient des isomorphismes

$$p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \simeq p_2(\mathcal{V})/\mathcal{V}_2$$

compatibles aux endomorphismes tordus induit par  $\theta$ . Or  $\theta$  agit par les scalaires  $\lambda_1$  sur  $p_1(\mathcal{V})$  et  $\lambda_2$  sur  $p_2(\mathcal{V})$ . Il s'ensuit que le scalaire  $\lambda_1 - \lambda_2$ , qui est nul puisque  $\theta$  est régulier, agit par 0 sur  $p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1$  d'où

$$(\lambda_1 - \lambda_2)p_1(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}_1(D)$$

dont on déduit l'inégalité

$$\text{long}(p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1) \leq 2 \deg(D)$$

soit encore

$$\text{long}(\mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)) \leq 2 \deg(D). \tag{5.7.2}$$

Ce sont les lignes (5.7.1) et (5.7.2) que nous allons généraliser à un groupe quelconque. Pour tout sous-groupe de Levi  $M \in \mathcal{L}$ , deux sous-groupes paraboliques  $P$  et  $Q$  dans  $\mathcal{P}(M)$  sont dits *adjacents* si l'intersection

$$\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_Q^\vee)$$

est réduite à un élément.

LEMME 5.7.1. Soit  $m \in \mathcal{M}(K)$  et  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m) \in \mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K)$ .

Soit  $P$  et  $Q$  deux sous-groupes paraboliques adjacents dans  $\mathcal{P}(M)$ . Soit  $\alpha^\vee$  l'unique coracine qui vérifie

$$\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_Q^\vee) = \{\alpha^\vee\}.$$

Soit  $m_P$  et  $m_Q$  les réductions respectives de  $m$  à  $P$  et  $Q$  (cf. proposition 4.10.1).

Il existe un unique rationnel  $x_\alpha$  tel que

$$-\deg(m_P) + \deg(m_Q) = x_\alpha \alpha^\vee. \tag{5.7.3}$$

En outre,  $x_\alpha$  satisfait l'inégalité

$$0 \leq x_\alpha \leq 2\mu(\alpha^\vee)^{-1}(\dim(\mathfrak{n}_P/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)))^2 \dim(\mathfrak{q}/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)) \deg(D) \tag{5.7.4}$$

où le caractère  $\mu \in X^*(M)$  est donné par  $\det(\text{Ad}(\cdot)|_{\mathfrak{n}_P/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)})$ .

En particulier,  $x_\alpha$  est borné sur  $\mathcal{M}(K)$ .

*Remarques.* L'inégalité de gauche dans (5.7.4) est réminiscente du lemme 3.6 de [Art76]. Dans le contexte de la réduction de schémas en groupes réductifs à un sous-groupe de Borel, elle apparaît dans [Beh95, proposition 6.6].

*Démonstration.* Soit  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  le point considéré de  $\mathcal{M}(K)$ . Soit  $m_P = (\mathcal{E}_P, \theta, t)$  et  $m_Q = (\mathcal{E}_Q, \theta, t)$  ses réductions à  $P$  et  $Q$ . L'énoncé est trivial si  $M = G$ . On suppose donc  $M \subsetneq G$  dans la suite.

Soit  $R \in \mathcal{F}(M)$  défini par  $\Delta_R^\vee = \Delta_P^\vee - \{\alpha^\vee\}$ . On a donc  $\Delta_R^\vee \cup \{-\alpha^\vee\} = \Delta_Q^\vee$ . Ainsi  $R$  contient  $P$  et  $Q$ . Pour tout caractère  $\mu \in X^*(R)$ , on a donc

$$\deg(\mu(m_R)) = \deg(\mu(m_P)) = \deg(\mu(m_Q)).$$

Par conséquent,  $-\deg(m_P) + \deg(m_Q)$  appartient à l'espace  $\mathfrak{a}_M^R$  qui n'est autre que la droite engendrée par  $\alpha^\vee$ . On obtient ainsi l'existence de  $x_\alpha$  qui vérifie (5.7.3).

Il reste à vérifier l'inégalité (5.7.4). On commence par le cas où l'on a  $R = G$  c'est-à-dire  $M$  est maximal dans  $G$ . Dans ce cas,  $P \cap Q = M$ . Pour alléger les notations, posons

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \text{Ad}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{V}_1 &= \mathcal{E}_P \times_k^{P, \text{Ad}} \mathfrak{n}, \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{n}$  est l'algèbre de Lie du radical unipotent de  $P$ , et

$$\mathcal{V}_2 = \text{Ad}(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_Q \times_k^{Q, \text{Ad}} \mathfrak{q}.$$

Alors  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont deux sous-fibrés vectoriels du fibré vectoriel  $\mathcal{V}$  tels que  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = 0$ . Au point générique de  $C_K$ , on a une somme directe

$$\mathcal{V}_\eta = \mathcal{V}_{1,\eta} \oplus \mathcal{V}_{2,\eta}.$$

Soit  $p_i$  la projection sur  $\mathcal{V}_{i,\eta}$  et  $p_i(\mathcal{V})$  le fibré vectoriel image de  $\mathcal{V}$  par  $p_i$ . La section  $\theta$  de  $\mathcal{V}(D)$  se factorise par  $\mathcal{V}_2(D)$ . L'action adjointe  $\text{ad}(\theta)$  de  $\theta$  induit des endomorphismes tordus  $\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1(D)$  et  $\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2(D)$ . Les fibrés vectoriels  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}/\mathcal{V}_2$  sont de même rang égal à la dimension de  $\mathfrak{n}$ . Le morphisme évident

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_2$$

est injectif. Il s'ensuit qu'on a

$$\deg(\mathcal{V}_1) \leq \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2)$$

avec égalité si et seulement si le morphisme est bijectif. Soit  $\mu$  le caractère de  $X^*(P) = X^*(M)$  donné par  $\det(\text{Ad}|_{\mathfrak{n}})$ . On a donc  $\mu(\alpha^\vee) > 0$ . Notons que  $\mu$  est encore égal au caractère de  $M$  donné par  $\det(\text{Ad}|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{q}})$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\mu(\deg(m_P)) = \deg(\mathcal{V}_1) \leq \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2) = \mu(\deg(m_Q))$$

et

$$\mu(\alpha^\vee)x_\alpha = \deg(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2) - \deg(\mathcal{V}_1) = \text{long}(\mathcal{T})$$

où  $\mathcal{T}$  est le faisceau de torsion défini par

$$\mathcal{T} = \mathcal{V}/(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2).$$

On a donc la positivité dans l'inégalité (5.7.4). Il nous reste à majorer la longueur de  $\mathcal{T}$ . Pour cela, on utilise les isomorphismes

$$p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1 \simeq \mathcal{T} \simeq p_2(\mathcal{V})/\mathcal{V}_2 \tag{5.7.5}$$

qui sont compatibles aux endomorphismes tordus induit par  $\text{ad}(\theta)$ . Soit  $\chi_i$  le polynôme caractéristique de la restriction de  $\text{ad}(\theta)$  à  $\mathcal{V}_{i,\eta}$  et soit  $\lambda$  le résultant de ces deux polynômes. En fait,  $\lambda$  est même une section non nulle de  $\mathcal{O}(ND)$  où

$$N = \dim(\mathfrak{n})\dim(\mathfrak{q}).$$

Par le théorème de Cayler–Hamilton,  $\chi_1(\text{ad}(\theta))$  induit un endomorphisme tordu trivial sur  $p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1$  donc aussi sur  $p_2(\mathcal{V})/\mathcal{V}_2$  (par l'isomorphisme (5.7.5)) et de même pour  $\chi_2(\text{ad}(\theta))$ . Donc l'endomorphisme tordu  $p_1(\mathcal{V}) \rightarrow p_1(\mathcal{V})(ND)$  donné par la multiplication par  $\lambda$  induit un endomorphisme tordu trivial de  $p_1(\mathcal{V})/\mathcal{V}_1$ . On a donc

$$\lambda p_1(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}_1(ND)$$

et la majoration

$$\text{long}(\mathcal{T}) \leq 2 \dim(\mathfrak{n})N \deg(D)$$

ce qui montre la majoration de droite de l'inégalité (5.7.4) dans le cas où  $M$  est maximal.

Si  $M$  n'est pas maximal, on utilise les résultats précédents au groupe réductif  $M_R$  qui est l'unique élément de  $\mathcal{L}$  qui est un facteur de Levi de  $R$ . L'algèbre de Lie de  $R$  est  $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$  et celle de  $M_R$  est isomorphe à  $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}/(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{n}_Q)$ . □

### 5.8 Enveloppes convexes associées à un triplet de Hitchin

On continue avec les notations du paragraphe précédent. Soit  $m \in \mathcal{M}(K)$  et  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m) \in \mathcal{A}_{M,\text{ell}}(K)$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ , soit  $m_P$  une réduction de  $m$  à  $P$ .

$$\mathcal{CV}_m$$

l'enveloppe convexe fermée des points

$$-\deg(m_P)$$

pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ .

La positivité dans le lemme 5.7.1 va nous permettre de donner une autre description du convexe  $\bar{\mathcal{C}}_m$  (pour des résultats analogues dans des contextes similaires, cf. [Art76, §§ 2, 3] et [Beh95, § 2]).

PROPOSITION 5.8.1. *Pour tout  $m \in \mathcal{M}(K)$ , on a l'égalité suivante*

$$\bar{\mathcal{C}}_m = \mathcal{CV}_m + \mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G.$$

*Démonstration.* Il s'agit de prouver l'égalité entre deux ensembles qui sont clairement des parties convexes et fermées de  $\mathfrak{a}_T$ , invariantes par translation par  $\mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G$ . Soit  $X_P$  la projection de  $-\text{deg}(m_P)$  sur  $\mathfrak{a}_M^G$ . Il suffit donc de prouver l'égalité suivantes entre parties de  $\mathfrak{a}_M^G$

$$\bigcap_{P \in \mathcal{P}(M)} (X_P - \overline{+\mathfrak{a}_P} \cap \mathfrak{a}_M^G) = \text{cvx}(X_P)$$

où  $\text{cvx}(X_P)$  est l'enveloppe convexe des  $X_P$  pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ .

Prouvons l'inclusion  $\subset$ . Soit  $H$  un point de  $\mathfrak{a}_M^G$  qui n'appartienne pas à  $\text{cvx}(X_P)$ . Alors, il existe  $\lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*$  tel que

$$\lambda(H) > \sup_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda(X_P).$$

Soit  $P \in \mathcal{P}(M)$  tel que  $\lambda$  appartienne au cône positivement engendré par  $\hat{\Delta}_P$ . L'inégalité  $\lambda(H) > \lambda(X_P)$  entraîne qu'il existe  $\varpi \in \hat{\Delta}_P$  tel que

$$\varpi(H) > \varpi(X_P).$$

Par conséquent,  $H$  n'appartient pas à  $X_P - \overline{+\mathfrak{a}_P}^G$ .

Réciproquement, prouvons l'inclusion  $\supset$ . Il s'agit de voir que pour tous sous-groupes paraboliques  $P$  et  $Q$  dans  $\mathcal{P}(M)$  le vecteur  $X_P - X_Q$  appartient au cône  $\overline{+\mathfrak{a}_P} \cap \mathfrak{a}_M^G$ . Si  $P$  et  $Q$  sont adjacents, cela résulte du lemme 5.7.1. Plus généralement, en prenant une suite de longueur minimale  $P_i \in \mathcal{P}(M)$  pour  $i = 0, \dots, n$  telle que  $P_{i+1}$  et  $P_i$  sont adjacents,  $P_0 = P$  et  $P_n = Q$ , on voit que l'on peut écrire  $X_P - X_Q$  comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines de  $A_M$  dans  $N_P$  ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

## 6. La $\xi$ -stabilité

### 6.1 Champs de Hitchin $\xi$ -stable

Soit  $\xi \in \mathfrak{a}_T$ .

DÉFINITION 6.1.1. Soit  $S$  un  $k$ -schéma affine et  $m \in \mathcal{M}(S)$ . On dit que  $m$  est  $\xi$ -stable, respectivement  $\xi$ -semi-stable, si pour tout  $s \in S$  on a

$$\xi \in \mathcal{C}_{m_s},$$

respectivement

$$\xi \in \overline{\mathcal{C}}_{m_s}.$$

*Remarques.* Comme  $\mathcal{C}_{m_s}$  est invariant par translation par  $\mathfrak{a}_G$ , la  $\xi$ -(semi-)stabilité ne dépend que de la projection sur  $\mathfrak{a}_T^G$  de  $\xi$ .

Dans le cas  $G = \text{GL}(n)$ , cette définition de  $\xi$ -stabilité est réminiscente d'une définition de stabilité avec poids due à Esteves [Est01] dans le cadre des jacobiniennes compactifiées. Lorsque  $\xi = 0$ , on retrouve la notion usuelle de stabilité pour les fibrés de Hitchin. On notera également que cette définition est très proche de celle utilisée pour les fibrés (ordinaire ou de Hitchin) avec structure parabolique étudiée par Boden et Yokogawa dans [BY96] et Heinloth et Schmitt dans [HS]. Elle s'inspire également des troncatures et du poids qu'Arthur introduit dans le contexte de la formule des traces. Notre présentation (en particulier l'utilisation du convexe  $\mathcal{C}_m$ ) s'inspire aussi du travail de Behrend sur la stabilité des schémas en groupes réductifs dans [Beh95].



DÉFINITION 6.1.2. Soit  $\mathcal{M}^\xi$ , respectivement  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ , le sous-champ de  $\mathcal{M}$  tel que pour tout  $k$ -schéma affine  $S$  la catégorie  $\mathcal{M}^\xi(S)$ , respectivement  $\overline{\mathcal{M}^\xi}(S)$ , soit la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}(S)$  dont les objets sont les points  $\xi$ -stables, respectivement  $\xi$ -semi-stables.

DÉFINITION 6.1.3. On dit que  $\xi \in \mathfrak{a}_T$  est en position générale si pour tout  $P \in \mathcal{F}$  tel que  $P \subsetneq G$  la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_P$  suivant  $\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_T^P \oplus \mathfrak{a}_P$  n'appartient pas au réseau  $X_*(P)$ .

Remarque. Il résulte de la définition 6.1.2 qu'on a  $\mathcal{M}^\xi \subset \overline{\mathcal{M}^\xi}$ . Si  $\xi$  est en position générale, quels que soient l'extension  $K$  de  $k$  et le triplet de Hitchin  $m \in \mathcal{M}(K)$ , le point  $\xi$  ne peut pas appartenir au bord de  $\overline{\mathcal{C}}_{m_s}$ . Il s'ensuit que pour tout  $\xi$  en position générale, on a

$$\mathcal{M}^\xi = \overline{\mathcal{M}^\xi}.$$

PROPOSITION 6.1.4. Les champs  $\mathcal{M}^\xi$  et  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$  sont des sous-champs ouverts de  $\mathcal{M}$ .

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout  $k$ -schéma affine  $S$  et tout  $m \in \mathcal{M}(S)$  l'ensemble des  $s \in S$  tel que  $m_s$  appartienne à  $\mathcal{M}^\xi$ , respectivement  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ , est ouvert. Comme  $\mathcal{M}$  est localement de type fini, on peut se limiter à des  $S$  noethériens auquel cas le résultat est donné par la semi-continuité de la fonction  $\mathcal{C}_m$ , respectivement  $\overline{\mathcal{C}}_m$  (cf. proposition 5.6.1).  $\square$

PROPOSITION 6.1.5. Si  $G$  est semi-simple, les champs  $\mathcal{M}^\xi$  et  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$  sont des champs de type fini sur  $k$ .

Démonstration. Soit  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel contenant  $T$ . Soit  $\mathcal{T}_G$  le champ des  $G$ -torseurs sur  $C$  et pour tout cocaractère  $\delta \in X_*(T)$  soit  $\mathcal{T}_B^\delta$  le champ des  $B$ -torseurs de degré  $\delta$  sur  $C$ . On sait bien que ce dernier est un champ de type fini sur  $k$ . On a un morphisme  $\mathcal{T}_B^\delta \rightarrow \mathcal{T}_G$  qui à un  $B$ -torseur  $\mathcal{E}$  associe le  $G$ -torseur  $\mathcal{E} \times^G B$ . Par ailleurs, le morphisme  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_G$  qui, à un triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  associe le  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  est de type fini. Il suffit donc de prouver que l'image de  $\mathcal{M}^\xi$  ou  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$  par ce morphisme est de type fini. Or cette image est recouverte, d'après le lemme suivant, par les images de  $\mathcal{T}_B^\delta$  pour  $\delta$  parcourant un ensemble fini. Elle est donc bien de type fini.  $\square$

LEMME 6.1.6. Soit  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel contenant  $T$ . Il existe un ensemble fini  $\mathcal{X} \subset X_*(T)$  tel que pour tout triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$  il existe une réduction  $\mathcal{E}_B$  de  $\mathcal{E}$  à  $B$  telle que

$$\deg(\mathcal{E}_B) \in \mathcal{X}.$$

Démonstration. D'après Harder ([Har69, Satz 2.1.1] et [Har74, p. 253]), il existe une constante  $c > 0$  telle que tout  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  sur  $C$  admette une réduction  $\mathcal{E}_B$  à  $B$  dont le degré  $\deg(\mathcal{E}_B)$  appartient au cône aigu

$$\mathfrak{c} = \{H \in \mathfrak{a}_T \mid \alpha(H) \geq -c \forall \alpha \in \Delta_B\}$$

où  $\Delta_B$  est l'ensemble des racines simples de  $T$  dans  $B$ . Soit  $N$  un entier qui majore, pour toute racine de  $T$  dans  $B$ , la somme de ses coefficients dans la base  $\Delta_B$ . Soit  $d$  un entier qui vérifie

$$d > \deg(D) + 2Nc. \tag{6.1.1}$$

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  qui contient  $B$  et  $\Delta_P \subset \Delta_B$  le sous-ensemble des racines simples dans  $N_P$ . Soit  $\mathfrak{c}_P$  le cône dans  $\mathfrak{a}_T$  défini par

$$\mathfrak{c}_P = \{H \in \mathfrak{a}_T \mid \alpha(H) \geq d \forall \alpha \in \Delta_P \text{ et } \alpha(H) \leq d \forall \alpha \in \Delta_B - \Delta_P\}.$$

Lorsque  $P$  parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard, les cônes  $\mathfrak{c}_P$  recouvrent  $\mathfrak{a}_T$ . Il suffit donc de prouver le résultat suivant : il existe un ensemble fini  $\mathcal{X}_P \subset X_*(T)$  tel que

pour tout triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(k)$  et toute réduction  $\mathcal{E}_B$  de  $\mathcal{E}$  à  $B$  dont le degré vérifie

$$\text{deg}(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P$$

on a  $\text{deg}(\mathcal{E}_B) \in \mathcal{X}_P$ .

LEMME 6.1.7. Soit  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(k)$  et  $\mathcal{E}_B$  une réduction de  $\mathcal{E}$  à  $B$  dont le degré vérifie

$$\text{deg}(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P.$$

Alors  $\theta$  se factorise par  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_D \hookrightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E})$ .

Démonstration. L'action adjointe de  $\theta$  induit un morphisme de schémas en algèbres de Lie

$$\mathcal{E} \times^{G, \text{Ad}} \mathfrak{g} \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times^{G, \text{Ad}} \mathfrak{g}_D.$$

Il suffit de prouver que ce morphisme envoie  $\mathcal{E}_B \times^B \mathfrak{b}$  dans  $\mathcal{E}_B \times^B \mathfrak{p}_D$ . Considérons alors une filtration de  $\mathfrak{g}$

$$(0) = \mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_s \subset \mathfrak{p}_{s-1} \subset \dots \subset \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}$$

par des sous-espaces  $B$ -stables de sorte que les quotients  $\mathfrak{b}_{i+1}/\mathfrak{b}_i$  et  $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1}$  soient de dimension 1.

Montrons que pour tout  $0 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq s$  l'action adjointe de  $\theta$  envoie  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i$  dans  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}$ . Le cas  $i=r$  et  $j=s$  donne le résultat cherché. On raisonne pour cela par récurrence. Le cas  $i=0$ , trivial, amorce la récurrence. Pour un couple  $(i, j)$ , l'hypothèse de récurrence est que le résultat vaut pour tout couple  $(i', j')$  avec soit  $i' < i$  et  $j' \leq s$  soit  $i' = i$  et  $j' < j$ . Supposons tout d'abord  $j < s$ . Prouvons l'assertion pour le couple  $(i, j+1)$ . Par hypothèse de récurrence, on sait que  $\theta$  envoie  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_{i-1}$  dans  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}$  et  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i$  dans  $\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}$ . En particulier,  $\theta$  induit un morphisme de fibrés en droites

$$\mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{b}_i/\mathfrak{b}_{i-1} \rightarrow \mathcal{E}_B \times^{B, \text{Ad}} \mathfrak{p}_{j,D}/\mathfrak{p}_{j+1,D}. \tag{6.1.2}$$

Si ce morphisme n'est pas nul, le degré du but doit être supérieur au degré de la source. Il existe des caractères disons  $\alpha \in \phi_T^B \cup \{0\}$  et  $\beta \in \Phi_T^{NP}$  de sorte que  $T$  agisse sur les quotients  $\mathfrak{b}_i/\mathfrak{b}_{i-1}$  et  $\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}_{j+1}$  respectivement par  $\alpha$  et  $-\beta$ . Il s'ensuit que le degré du but est  $-\beta(\text{deg}(\mathcal{E}_B)) + \text{deg}(D)$  et celui de la source est  $\alpha(\text{deg}(\mathcal{E}_B))$ . On doit donc avoir l'inégalité

$$(\alpha + \beta)(\text{deg}(\mathcal{E}_B)) \leq \text{deg}(D).$$

Or  $\beta$  est une racine de  $T$  dans  $N_P$  donc elle a une composante non nulle au moins sur un élément de  $\Delta_P$ . Comme  $\text{deg}(\mathcal{E}_B) \in \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P$ , on a la minoration

$$\beta(\text{deg}(\mathcal{E}_B)) \geq d - Nc.$$

En minorant trivialement  $\alpha(\text{deg}(\mathcal{E}_B))$  par  $-Nc$ , on voit qu'on contredit l'inégalité (6.1.1) ci-dessus. En conclusion, le morphisme (6.1.2) est nul d'où l'assertion pour le couple  $(i, j+1)$ . Lorsque  $j = s$ , on doit prouver que l'assertion vaut pour le couple  $(i+1, s)$  ce qui se démontre de manière analogue.  $\square$

Soit le  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_B \times^B P$ . D'après le lemme précédent,  $\theta$  se factorise par  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_P)$ . *A priori*, on sait que  $\chi_G(t)$  est égal à la valeur de  $\chi_G(\theta)$  au point  $\infty$  mais il n'y a pas de raison pour que  $\chi_P(t)$  soit égal à la valeur de  $\chi_P(\theta)$  au point  $\infty$ . Cependant, il existe un élément  $w$  du groupe de Weyl  $W$  tel que  $\chi_P(w \cdot t)$  soit égal à la valeur de  $\chi_P(\theta)$  au point  $\infty$ . Il s'ensuit que le triplet  $(\mathcal{E}_P, \theta, w \cdot t)$  est une réduction de  $(\mathcal{E}, \theta, w \cdot t)$  à  $P$ . Il est clair sur les définitions que  $(\mathcal{E}, \theta, w \cdot t)$  appartient à  $\overline{\mathcal{M}}^{w \cdot \xi}$ . Quitte à changer  $\xi$  en  $w \cdot \xi$ , on suppose dans la suite qu'on a  $w = 1$ .

Si  $P = G$ , le convexe  $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_G$  est compact et  $\deg(\mathcal{E}_B)$  appartient à l'ensemble fini  $X_*(T) \cap \mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_G$ . Si  $P \neq G$ , on a par  $\xi$ -semi-stabilité de  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  la condition

$$\xi \in -\deg(\mathcal{E}_P) - {}^+\mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P.$$

Ainsi  $\deg(\mathcal{E}_B)$  appartient au convexe compact

$$\mathfrak{c} \cap \mathfrak{c}_P \cap (-\xi - {}^+\mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^P)$$

donc de nouveau à un ensemble fini. □

### 6.2 Le théorème principal

Introduisons la définition suivante.

**DÉFINITION 6.2.1.** Soit  $f^\xi$ , respectivement  $\overline{f^\xi}$ , la restriction du morphisme  $f$  de Hitchin à  $\mathcal{M}^\xi$ , respectivement  $\overline{\mathcal{M}^\xi}$ .

Nous pouvons énoncer alors notre principal résultat.

**THÉORÈME 6.2.2.** Soit  $\xi \in \mathfrak{a}_T$  en position générale au sens de la définition 6.1.3. On suppose que  $G$  est semi-simple. Le champ  $\mathcal{M}^\xi$  est un champ de Deligne–Mumford, lisse et de type fini sur  $k$ . De plus, le morphisme de Hitchin  $f^\xi$  est propre.

*Démonstration.* D'après la proposition 6.1.4,  $\mathcal{M}^\xi$  est un sous-champ ouvert de  $\mathcal{M}$ . Or ce dernier est lisse sur  $k$  (Biswas et Ramanan l'ont démontré par un calcul de déformation dans [BR94] qui a été repris par Ngô cf. [Ngo06], proposition 5.3, et [Ngo08]) d'où la lissité de  $\mathcal{M}^\xi$ . On a vu dans la proposition 6.1.5 que le champ  $\mathcal{M}^\xi$  est de type fini. On montrera ultérieurement que  $\mathcal{M}^\xi$  est un champ de Deligne–Mumford (cf. la démonstration du théorème 10.1.1). La propriété de  $f^\xi$  est satisfaite par le critère valuatif qui combine les résultats des théorèmes 8.1.1 et 9.1.1 qui seront énoncés dans la suite. □

### 6.3 Les $\xi$ -points de Harder–Narasimhan

On munit l'espace  $\mathfrak{a}_T$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  invariant par le groupe de Weyl  $W^G(T)$  qui fait de  $\mathfrak{a}_T$  un espace euclidien. Alors  $\mathfrak{a}_T$  est canoniquement isomorphe à son dual  $\mathfrak{a}_T^*$ . Dans cet isomorphisme, une racine et sa coracine sont égales à un coefficient strictement positif près. Soit  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne sur  $\mathfrak{a}_T$  associée à ce produit scalaire. Notons que les espaces  $\mathfrak{a}_M$  et  $\mathfrak{a}_T^M$  sont alors orthogonaux (pour  $M \in \mathcal{L}$ ).

Soit  $K$  une extension de  $k$  et  $\xi \in \mathfrak{a}_T$ .

**DÉFINITION 6.3.1.** Soit  $m \in \mathcal{M}(K)$ . Le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m$  est l'unique point  $\varrho_m \in \overline{\mathcal{C}}_m$  qui vérifie

$$\| \varrho_m - \xi \| = \min_{X \in \overline{\mathcal{C}}_m} \| X - \xi \|.$$

*Remarque.* Comme  $\overline{\mathcal{C}}_m$  est un convexe fermé non vide (ce qui résulte de la proposition 5.8.1), il existe un et un seul  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan. Pour tout sous-groupe parabolique  $P \in \mathcal{F}$ , soit  $\mathfrak{a}_P^+$  le cône aigu, ouvert dans  $\mathfrak{a}_P$ , défini par

$$\mathfrak{a}_P^+ = \{ H \in \mathfrak{a}_P \mid \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_P \}. \tag{6.3.1}$$

On obtient ainsi une partition de  $\mathfrak{a}_T$

$$\mathfrak{a}_T = \bigcup_{P \in \mathcal{F}} \mathfrak{a}_P^+. \tag{6.3.2}$$

La proposition suivante et sa démonstration sont essentiellement une reformulation de [Beh95], proposition 3.13.

PROPOSITION 6.3.2. Soit  $m \in \mathcal{M}(K)$  et  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m) \in \mathcal{A}_{M,\text{ell}}$ . Pour tout  $P \in \mathcal{F}(M)$  soit  $m_P$  une réduction de  $m$  à  $P$ . Soit  $\varrho \in \overline{\mathcal{C}}_m$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) le point  $\varrho$  est le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m$  ;
- (2) il existe un sous-groupe parabolique  $Q \in \mathcal{F}(M)$  tel qu'on ait :
  - (a)  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$  ;
  - (b) la projection de  $\varrho$  sur  $\mathfrak{a}_M^G$  appartient à la projection sur  $\mathfrak{a}_M^G$  de l'enveloppe convexe des points

$$-\text{deg}(m_P)$$

pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$  inclus dans  $Q$  ;

- (3) il existe un sous-groupe parabolique  $Q \in \mathcal{F}(M)$  tel qu'on ait :

- (a)  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$  ;
- (b)  $\varrho$  appartient au sous-espace affine

$$-\text{deg}(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

*Démonstration.* Montrons que la première assertion implique la deuxième. Supposons que  $\varrho$  soit le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m$ . Soit  $Q$  l'unique élément de  $\mathcal{F}$  tel que  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+$ , cf. la partition (6.3.2). Comme  $\overline{\mathcal{C}}_m$  est stable par translation par  $\mathfrak{a}_T^M + \mathfrak{a}_G$ , on a

$$\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_M^G. \tag{6.3.3}$$

Par conséquent  $Q$  doit contenir  $M$ . On a donc vérifié (2)(a). Vérifions (2)(b). Soit  $P_0 \in \mathcal{P}(M)$  tel que  $P_0 \subset Q$ . D'après la proposition 5.8.1, le point  $-\text{deg}(m_{P_0})$  appartient à  $\overline{\mathcal{C}}_m$ . Par convexité de  $\overline{\mathcal{C}}_m$ , pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , le point  $(1 - \lambda)\varrho - \lambda \text{deg}(m_{P_0})$  appartient aussi à  $\overline{\mathcal{C}}_m$  et le réel

$$\|(1 - \lambda)\varrho - \lambda \text{deg}(m_{P_0}) - \xi\|^2$$

atteint son minimum en  $\lambda = 0$ . En dérivant en  $\lambda = 0$ , on tombe sur la condition

$$\langle \varrho + \text{deg}(m_{P_0}), \xi - \varrho \rangle \geq 0. \tag{6.3.4}$$

Comme  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_Q^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$ , on peut écrire

$$\xi - \varrho = \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} y_\varpi \varpi \tag{6.3.5}$$

avec  $y_\varpi > 0$ . La condition (6.3.4) ci-dessus implique

$$\sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} y_\varpi \varpi(\varrho + \text{deg}(m_{P_0})) \geq 0. \tag{6.3.6}$$

Pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$ , on a

$$\varpi(\varrho + \text{deg}(m_{P_0})) = \varpi(\varrho + \text{deg}(m_Q))$$

et cette quantité est négative puisque  $\varrho \in \overline{\mathcal{C}}_m$ . L'inégalité (6.3.6) n'est donc possible que si pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$  on a

$$\varpi(\varrho + \text{deg}(m_{P_0})) = 0. \tag{6.3.7}$$

Pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ , soit  $\lambda_P \in \mathbb{R}$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $0 \leq \lambda_P \leq 1$  ;
- $\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda_P = 1$  ;
- le projeté de  $\varrho$  sur  $\mathfrak{a}_M^G$  est égal au projeté sur  $\mathfrak{a}_M^G$  du point

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} -\lambda_P \deg(m_P).$$

De tels réels  $\lambda_P$  existent par la proposition 5.8.1. Il s'agit de voir qu'on peut choisir  $\lambda_P$  de sorte que  $\lambda_P = 0$  si  $P \not\subset Q$ . Par (6.3.7), on obtient

$$\varpi(\deg(m_{P_0})) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \lambda_P \varpi(\deg(m_P)) \tag{6.3.8}$$

pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$ . Le lemme 5.7.1 implique que pour  $P \in \mathcal{P}(M)$  la différence  $\deg(m_P) - \deg(m_Q)$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de  $\Delta_P^\vee$ . Par ailleurs,  $\varpi$  ne prend que des valeurs positives sur  $\Delta_P^\vee$  et elle est nulle sur  $\Delta_P^\vee - \Delta_Q^\vee$ . Soit  $P \in \mathcal{P}(M)$  adjacent à  $P_0$ . De choses l'une soit  $\deg(m_P) = \deg(m_{P_0})$  et dans ce cas on peut bien supposer que  $\lambda_P = 0$ , soit

$$\deg(m_P) - \deg(m_{P_0}) = x_\alpha \alpha^\vee$$

avec  $x_\alpha > 0$  et  $\{\alpha^\vee\} = \Delta_{P_0}^\vee \cap (-\Delta_P^\vee)$  (par le lemme 5.7.1). L'égalité (6.3.8) n'est donc possible que si pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$  on a  $\alpha^\vee \notin \Delta_Q^\vee$ . Mais dans ce cas on a  $P \subset Q$ . En raisonnant par récurrence sur le cardinal de  $\Delta_{P_0}^\vee \cap (-\Delta_P^\vee)$ , on voit que pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ , on a soit  $P \subset Q$  soit on peut supposer que  $\lambda_P = 0$ . Cela prouve ainsi la deuxième assertion.

La deuxième assertion implique la troisième puisque pour  $P \subset Q$  la projection de  $\deg(m_P)$  sur  $\mathfrak{a}_Q$  est égal à  $\deg(m_Q)$ .

Finalement montrons que la troisième assertion implique la première. Soit  $Q \in \mathcal{F}(M)$  tel que les conditions (3)(a) et (3)(b) soient satisfaites. Montrons que l'assertion (1) est alors vérifiée. Soit  $X \in \bar{\mathcal{C}}_m$ . Il s'agit de voir que  $\|X - \xi\| \geq \|\varrho - \xi\|$ . On a

$$\begin{aligned} \|X - \xi\|^2 &= \|\varrho - \xi\|^2 + 2\langle \xi - \varrho, \varrho - X \rangle + \|X - \varrho\|^2 \\ &\geq \|\varrho - \xi\|^2 + 2\langle \xi - \varrho, \varrho - X \rangle \\ &\geq \|\varrho - \xi\|^2 + \sum_{\varpi \in \hat{\Delta}_Q} 2y_\varpi \varpi(\varrho - X) \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

où les  $y_\varpi$ , définis en (6.3.5), sont positifs. Par hypothèse, on a  $\varrho \in -\deg(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$ . Comme  $X$  appartient à  $\bar{\mathcal{C}}_m$ , on a, en particulier,

$$X \in -\deg(m_Q) - \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

Combiné à 3(b), cela donne

$$\varrho - X \in \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G.$$

Donc pour tout  $\varpi \in \hat{\Delta}_Q$ , on a  $\varpi(\varrho - X) \geq 0$  et (6.3.9) donne  $\|X - \xi\| \geq \|\varrho - \xi\|$  comme voulu.  $\square$

La proposition précédente implique immédiatement le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 6.3.3.** *Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 6.3.2. Soit  $\varrho \in \bar{\mathcal{C}}_m$  le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m$ . Il existe un unique  $Q \in \mathcal{F}(M)$  tel que  $\varrho$  réalise la distance de  $\xi$  au sous-espace affine  $-\deg(m_Q) + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$ .*

### 7. Description adélique des fibres de Hitchin

#### 7.1 L'ensemble $V$

Soit  $V$  un ensemble fini de points fermés de  $C$  qui contient le point  $\infty$  et le support du diviseur  $D$ . Le diviseur effectif  $D$  s'écrit alors comme la somme formelle

$$D = \sum_{v \in V} d_v v$$

où, pour tout  $v \in V$ , l'entier  $d_v$  est positif, nul hors du support de  $D$  donc nul en  $\infty$ . Soit  $C^V$  l'ouvert de  $C$  complémentaire de  $V$ . Soit  $k[C^V]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $C^V$ .

#### 7.2 Notations

Pour toute  $k$ -algèbre  $A$ , soit  $C_A = C \times_k \text{Spec}(A)$  et  $C_A^V = C^V \times_k \text{Spec}(A)$ . Soit  $A[C^V] = k[C^V] \otimes_k A$ . Pour tout  $v \in V$ , le complété de l'algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{O}_{C_A}$  le long du diviseur  $v \times_k A$  s'identifie à l'anneau  $A[[z_v]]$  via le choix d'une uniformisante  $z_v$ . Soit  $A((z_v))$  l'anneau des séries formelles de Laurent en la variable  $z_v$  à coefficients dans  $A$  : c'est le localisé de  $A[[z_v]]$  que l'on obtient en inversant  $z_v$ . On a le diagramme commutatif suivant où les morphismes sont les morphismes évidents.

$$\begin{CD} \text{Spec}(A((z_v))) @>j_{A,v}>> \text{Spec}(A[[z_v]]) \\ @V{i'_{A,v}}VV @VV{i_{A,v}}V \\ C_A^V @>j_A>> C_A \end{CD} \tag{7.2.1}$$

Pour tout  $k$ -schéma  $S$ , on note  $S((z_v))$ , respectivement  $S[[z_v]]$  le foncteur qui, à toute  $k$ -algèbre  $A$ , associe l'ensemble des points  $S(A((z_v)))$ , respectivement  $S(A[[z_v]])$ .

#### 7.3 Descente formelle à la Beauville–Laszlo et uniformisation

Avec les notations des paragraphes précédents, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 7.3.1. *Soit un triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- (1)  $X$  est un élément de  $\mathfrak{g}(A[C^V])$  ;
- (2) pour tout  $v \in V$ , l'élément  $g_v$  appartient à  $G((z_v))(A)$  et vérifie

$$\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](A);$$

en particulier  $\chi(X) \in \text{car}[[z_\infty]](A)$  ;

- (3)  $t$  est un élément de  $\mathfrak{t}^{\text{eg}}(A)$  dont la caractéristique  $\chi(t)$  est égale à la réduction modulo  $z_\infty$  de  $\chi(X)$ .

Il existe un triplet  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(\text{Spec}(A))$  ainsi que des isomorphismes  $G$ -équivariants

$$\alpha_{A,v} : i_{A,v}^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k A[[z_v]]$$

et

$$\beta_A : j_A^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k A[C^V]$$

tels que :

- l'automorphisme  $G$ -équivariant de  $G \times_k A((z_v))$  défini par  $(i'_{A,v})^*(\beta_A) \circ (j_{A,v}^*)(\alpha_{A,v}^{-1})$  est donné par la translation à gauche par  $g_v \in G((z_v))(A)$  ;
- $\beta_A$  induit un isomorphisme entre  $\text{Ad}(j_A^* \mathcal{E})$  et  $\mathfrak{g} \times_k A[C^V]$  qui envoie  $j_A^* \theta$  sur  $X$ .

En outre, le triplet  $(m, (\alpha_{A,v})_{v \in V}, \beta_A)$  est uniquement déterminé à un unique isomorphisme près. Tout tel triplet s'obtient à partir d'un unique triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  comme ci-dessus.

*Démonstration.* Cela se démontre à l'aide du résultat de descente formelle de Beauville–Laszlo (cf. [BL95]) où le cas des fibrés vectoriels est traité.

Introduisons alors la catégorie  $\text{Cat}_V(A)$  dont les objets sont les triplets  $(X, (g_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t)$  qui vérifient les conditions (1) à (3) de la proposition 7.3.1 (la condition (2) sur  $g_v$  est clairement stable par translation par  $G[[z_v]](A)$ ) et l'ensemble des morphismes entre deux objets  $(X, (g_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t)$  et  $(X', (g'_v G[[z_v]](A))_{v \in V}, t')$  est :

- vide si  $t \neq t'$  ;
- l'ensemble des  $\delta \in G(A[C^V])$  tels que  $\text{Ad}(g)X = X'$  et pour tout  $v \in V$

$$\delta g_v G[[z_v]](A) = g'_v G[[z_v]](A).$$

**COROLLAIRE 7.3.2.** *La construction de la proposition 7.3.1 induit une équivalence de catégories entre :*

- la catégorie  $\text{Cat}_V(A)$  ;
- la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}(\text{Spec}(A))$  formée des triplets  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(\text{Spec}(A))$  pour lesquels le  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  est trivial sur  $C_A^V$  et sur  $\text{Spec}(A[[z_v]])$  pour tout  $v \in V$ .

### 7.4 Réductions

Soit  $K$  une extension de  $k$ . Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(K)$ . Soit  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](K)$  le relèvement de  $t$  tel que  $a$  et  $\chi(t_a)$  coïncident sur  $\text{Spec}(K[[z_\infty]])$  (cf. proposition 3.9.1). Soit  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(K))$  (cf. proposition 3.6.2). Soit  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(K)$  tel que  $f(m) = (a, t)$ . Soit  $\alpha_{K_v}$  et  $\beta_K$  des trivialisations de  $\mathcal{E}$  respectivement sur  $\text{Spec}(K[[z_v]])$  et  $C_K^V$ . On suppose que ces trivialisations vérifient les conditions de la proposition 7.3.1. Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.3.1. On suppose de plus  $X$  est un élément de  $\mathfrak{m}(K[C^V])$  tel que  $X$  et  $t_a$  sont conjugués sous  $M((z_\infty))(K)$ .

**PROPOSITION 7.4.1.** *Soit  $P \in \mathcal{F}(M)$ . Pour tout  $v \in V$ , soit  $p_v \in P((z_v))(K)$  tel que*

$$g_v \in p_v G[[z_v]](K).$$

*Alors il existe un triplet  $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$  qui est une réduction de  $m$  à  $P$  et des trivialisations  $\alpha_{K,v}^P$  et  $\beta_K^P$  de  $\mathcal{E}_P$  respectivement sur  $\text{Spec}(K[[z_v]])$  et  $C_K^V$  telles que :*

- l'automorphisme  $P$ -équivariant de  $G \times_k K((z_v))$  défini par  $(i_{K,v}^*) (\beta_K^P) \circ (j_{K,v}^*) (\alpha_{K,v}^P)^{-1}$  est donné par la translation à gauche par  $p_v \in P((z_v))(K)$  ;
- $\beta_K^P$  induit un isomorphisme entre  $\text{Ad}(j_K^* \mathcal{E}_P)$  et  $\mathfrak{p} \times_k K[C^V]$  qui envoie  $j_K^* \theta_P$  sur  $X$ .

*Démonstration.* De la relation  $\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](K)$  et du fait que  $X \in \mathfrak{m}(K[C^V])$ , il vient

$$\text{Ad}(p_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{p}[[z_v]](K).$$

En particulier,  $\chi_P(X) \in \mathfrak{car}_M[[z_\infty]](K)$ . Comme on a supposé que  $X$  et  $t_a$  sont conjugués sous  $M(F_\infty)$ , on a  $\chi_P(X) = \chi_P(t_a)$ . Ainsi  $(X, (p_v)_{v \in V}, t)$  est un triplet qui satisfait les conditions (1) à (3) de la proposition 7.3.1 relatives à  $P$ . La proposition 7.3.1 appliquée au groupe  $P$  donne un triplet  $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$ . On vérifie que c'est bien une réduction à  $P$  de  $m$ .  $\square$

**7.5 Fonctions  $H_P$**

On continue avec les notations du paragraphe précédent.

DÉFINITION 7.5.1. Soit  $P \in \mathcal{F}(T)$  et  $v \in V$  et

$$H_P : G((z_v))(K) \rightarrow \mathfrak{a}_P$$

l'application qui vérifie pour tout  $\mu \in X^*(P)$  et  $g \in G((z_v))(K)$ ,

$$\mu(H_P(g)) = -\text{val}_v(\mu(p))$$

où  $\text{val}_v$  est la valuation usuelle sur  $K((z_v))$  et  $p$  est un élément de  $P((z_v))(K)$ , uniquement défini à translation à gauche près par un élément de  $P[[z_v]](K)$ , qui vérifie

$$g \in pG(K[[z_v]]).$$

L'existence d'un tel élément  $p$  est donnée par la décomposition d'Iwasawa.

Plus généralement, pour une famille  $(g_v)_{v \in V}$  d'éléments de  $G((z_v))(K)$  on pose

$$H_P((g_v)_{v \in V}) = \sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

Cette définition garde un sens lorsque  $V$  est infini pourvu que  $g_v$  appartienne à  $G[[z_v]]$  pour tout  $v$  en dehors d'un ensemble fini. En particulier, la fonction  $H_P$  est bien définie sur les points de  $G$  à valeurs dans les adèles de  $F$ .

Indiquons alors un corollaire à la proposition 7.4.1.

COROLLAIRE 7.5.2. Avec les hypothèses et les notations du § 7.4 et de la proposition 7.4.1, on a l'égalité suivante pour tout  $P \in \mathcal{F}(M)$  et toute réduction  $m_P$  de  $m$  à  $P$

$$\text{deg}(m_P) = H_P((g_v)_{v \in V}).$$

*Démonstration.* Soit  $P \in \mathcal{F}(M)$ . La proposition 7.4.1 montre qu'il existe une réduction  $(\mathcal{E}_P, \theta_P, t)$  de  $m$  à  $P$  tel que le  $P$ -torseur  $\mathcal{E}_P$  est défini par des données de recollement  $p_v \in P((z_v))(K)$  où pour tout  $v \in V$  on a  $g_v \in p_v G[[z_v]]$ . Donc pour tout caractère  $\mu \in X^*(P)$ , la famille  $(\mu(p_v))_{v \in V}$  est une donnée de recollement pour le fibré en droites  $\mu(\mathcal{E}_P)$ . On vérifie l'égalité

$$\text{deg}(\mu(\mathcal{E}_P)) = - \sum_{v \in V} \text{val}_v(\mu(p_v)) = \mu(H_P((g_v)_{v \in V})),$$

d'où le résultat. □

**7.6 Description adélique des fibres de Hitchin**

On poursuit avec les notations des paragraphes précédents hormis  $V$  qui désigne maintenant l'ensemble de tous les points fermés de  $C$ . Soit  $F$  le corps des fonctions de la courbe  $C$ . Soit  $\xi \in \mathfrak{a}_T$  et  $(a, t) \in \mathcal{A}(k)$ .

DÉFINITION 7.6.1. Soit  $\mathcal{X}_{(a,t)}$  l'ensemble des couples  $(X, (g_v)_{v \in V})$  qui vérifient :

- (1)  $X$  est un élément semi-simple  $G$ -régulier de  $\mathfrak{g}(F)$  dont la caractéristique  $\chi(X)$  est égale à la restriction de  $a$  au point générique de  $C$  ;
- (2) pour tout  $v \in V$ , l'élément  $g_v$  appartient à  $G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$  et vérifie les trois conditions suivantes :
  - (a) pour tout  $v \in V$  en dehors d'un ensemble fini  $g_v$  est la classe triviale ;
  - (b)  $\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](k)$  ;
  - (c) la caractéristique  $\chi(t)$  est égale à la réduction modulo  $z_\infty$  de  $\chi(X)$ .



*Remarque.* La condition (2)(b) implique que la restriction de  $\chi(X)$  à  $\text{Spec}(k((z_\infty)))$  appartient à  $\text{car}[[z_\infty]](k)$ . Donc (2)(c) fait sens.

Soit  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](k)$  l'unique relèvement de  $t$  tel que  $\chi(t_a)$  soit égal à la restriction de  $a$  à  $\text{Spec}(k[[z_\infty]])$  (cf. proposition 3.9.1). Soit  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $(a, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k))$  (cf. proposition 3.6.2).

DÉFINITION 7.6.2. Soit  $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$  l'ensemble des couples  $(X, (g_v)_{v \in V})$  dans  $\mathcal{X}_{(a,t)}$  qui vérifient :

- (1)(bis)  $X$  est un élément semi-simple elliptique  $G$ -régulier de  $\mathfrak{m}(F)$  qui est conjugué par un élément de  $M((z_\infty))(k)$  à  $t_a$  ;
- (2)(d) la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_M^G$  appartient à la projection sur  $\mathfrak{a}_M^G$  de l'enveloppe convexe des points

$$-H_P((g_v)_{v \in V}) = -\sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

Pour tout  $\delta \in G(F)$  et tout couple  $(X, (g_v)_{v \in V})$  dans  $\mathcal{X}_{(a,t)}$  le couple  $(\text{Ad}(\delta)X, (\delta g_v)_{v \in V})$  appartient aussi à  $\mathcal{X}_{(a,t)}$ . On en déduit une action à gauche de  $G(F)$  sur  $\mathcal{X}_{(a,t)}$ . L'action de  $M(F)$  qui s'en déduit préserve  $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$ . Les conditions (1)(bis) et 2(d) ci-dessus sont préservées par l'action de  $M(F)$  : c'est trivial pour la première condition et la seconde résulte de l'égalité

$$H_P((mg_v)_{v \in V}) = H_P((g_v)_{v \in V})$$

pour tout  $m \in M(F)$ . (Plus précisément, on a, pour tout  $\mu \in X^*(P)$  et tout  $m \in M(F)$ ,

$$\mu(H_P((mg_v)_{v \in V})) = \mu(H_P((g_v)_{v \in V})) - \sum_{v \in V} \text{val}_v(\mu(m))$$

et la somme sur  $V$  est nulle par la formule du produit.)

Lorsqu'un groupe  $G$  abstrait agit à gauche sur un ensemble  $\mathcal{X}$ , on note

$$[G \setminus \mathcal{X}] \tag{7.6.1}$$

le groupoïde quotient dont l'ensemble des objets est  $\mathcal{X}$  et, pour tous objets  $x$  et  $x'$  dans  $\mathcal{X}'$ , l'ensemble des morphismes de  $x$  vers  $x'$  est l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $g \cdot x = x'$ .

PROPOSITION 7.6.3. La construction de la proposition 7.3.1 induit une équivalence de catégories entre le groupoïde quotient  $[M(F) \setminus \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$  et la fibre  $\overline{f^\xi}^{-1}(a, t)$ .

*Démonstration.* Soit  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \overline{\mathcal{M}^\xi}(k)$  tel que  $f(m) = (a, t)$ . Comme le corps  $k$  est algébriquement clos, le  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  admet une trivialisations générique (cf. lemme 4.2.1). On en fixe une et on en déduit une trivialisations générique de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$ , donc un élément  $X \in \mathfrak{g}(F)$  image de  $\theta$  par cette trivialisations. Soit  $Y$  un élément semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique dans  $\mathfrak{m}(F)$  tel que :

- $\chi_G(Y)$  est égal à  $a_\eta$  la restriction de  $a$  au point générique  $\eta$  de  $C$  ;
- $Y$  est conjugué à  $t_a$  par un élément de  $M((z_\infty))(k)$ .

Un tel  $Y$  existe (cf. corollaire 3.9.2). Il résulte du lemme 3.8.1 que  $X$  et  $Y$  sont conjugués sous  $G(F)$ . Quitte à changer la trivialisations de  $\mathcal{E}$ , on peut et on va supposer qu'on a  $X = Y$ .

Un choix de trivialisations de  $\mathcal{E}$  sur les voisinages formels  $\text{Spec}(k[[z_v]])$  donnent des éléments  $g_v$  de  $G((z_v))$  par la construction de la proposition 7.3.1. La classe de  $g_v$  modulo  $G[[z_v]]$  ne dépend pas de ce choix. On obtient ainsi un couple  $(X, (g_v)_{v \in V})$  dans  $\mathcal{X}_{(a,t)}$  qui vérifie en outre

la condition (1)(bis) de la définition 7.6.1. En utilisant la proposition 7.4.1 et le fait que la trivialisat on générique consid er e s'étend à un ouvert de  $C$ , on voit qu'on a

$$\deg(m_P) = \sum_{v \in V} H_P(g_v)$$

pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ . Par la proposition 5.8.1, la condition de  $\xi$ -semi-stabilité se traduit par la condition (2)(d) de la définition 7.6.1. Ainsi  $(X, (g_v)_{v \in V})$  appartient à  $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$ . On laisse le soin au lecteur de vérifier que cette construction donne bien une équivalence de catégories comme annonc e.  $\square$

## 8. Critère valuatif : existence

### 8.1  nonc 

Soit  $\xi$  un élément *quelconque* de  $\mathfrak{a}_T$ . Le but de cette section est de prouver la partie existence du critère valuatif de propriété pour le morphisme  $\overline{f}^\xi$  qui se résume au théorème suivant.

**THÉORÈME 8.1.1.** *Soit  $\kappa$  une extension algébriquement close de  $k$ . Soit  $R$  un anneau de valuation discrète, complet et de corps résiduel  $\kappa$ . Soit  $K$  le corps des fractions de  $R$  et  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ .*

*Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$  et soit  $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$  tel que  $f(m_K) = (a, t)$ .*

*Il existe une extension finie  $K' \subset \overline{K}$  de  $K$  et  $m \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(R')$ , où  $R'$  est la clôture intégrale de  $R$  dans  $K'$ , tels que :*

- (1) *l'image de  $m$  dans  $\overline{\mathcal{M}}^\xi(K')$  est isomorphe à celle de  $m_K$  ;*
- (2)  *$f(m) = (a, t)$ .*

La démonstration du théorème 8.1.1 va nous occuper jusqu'à la fin de cette section.

### 8.2 Quelques mots sur la démonstration

Dans [Lan75] (§ 3, théorème), Langton a montré que le champ des fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe projective et lisse satisfait la partie existence du critère valuatif de propriété. En adaptant les arguments de Langton, Nitsure (cf. [Nit91, § 6]) a démontré le théorème 8.1.1 dans le cas  $G = GL(n)$  et  $\xi = 0$ . Faltings a réussi à étendre cette démonstration à tout groupe  $G$  réductif dans le cas d'un corps de base de caractéristique 0 et pour  $\xi = 0$  (cf. [Fal93, théorème II.4]). Sa démonstration ne semble cependant pas s'étendre au cas d'un corps de base de caractéristique positive. Dans [Hei08], Heinloth a démontré l'analogue du théorème de Langton pour le champ des  $G$ -torseurs sur une courbe projective et lisse sur un corps de base caractéristique nulle ou «pas trop petite». Notre démonstration reprend en partie les arguments de Heinloth, eux-mêmes inspirés par ceux de Langton.

Esquissons les grandes lignes de notre démonstration. Les notations sont celles du théorème 8.1.1. Soit  $C_K$  et  $C_\kappa$  respectivement les fibres générique et spéciale de la courbe  $C \times_k R$  sur  $R$ . Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$  et  $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$  un triplet de Hitchin  $\xi$ -semi-stable au-dessus de  $C_K$  de caractéristique  $(a, t)$ . Les énoncés d'existence qui suivent exigent parfois de remplacer  $K$  par une extension finie, ce qu'on ne rappellera pas à chaque fois. Un tel triplet  $m_K$  s'étend en un triplet  $m_R$  sur toute la courbe  $C_R$  (cf. § 8.4). La fibre spéciale  $m_\kappa$  du prolongement n'est pas nécessairement  $\xi$ -semi-stable. Cependant, on peut choisir le prolongement  $m_R$  de sorte que la fibre spéciale  $m_\kappa$  soit le moins « $\xi$ -instable» possible, ce par quoi on entend que la distance  $d$  de  $\xi$  au convexe  $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$  (défini à la section 5) est minimale (cf. § 8.7). Si elle est nulle,  $m_\kappa$  est  $\xi$ -semi-stable. Sinon, il existe  $Q$  un sous-groupe parabolique maximal de  $G$  tel que la face de  $\overline{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$

associée à  $Q$  contienne le point où cette distance est réalisée (cf. § 8.8). Le prolongement  $m_R$  est donné par des «données de recollement» (cf. § 8.13, le résultat de [DS95] y joue un rôle crucial et nécessite la réduction au cas semi-simple du § 8.5). En conjuguant ces données par un  $K$ -point convenable du centre de  $Q$ , on obtient un autre triplet  $m'_R$  qui est en fibre générique isomorphe à  $m_K$  et dont la face de  $\overline{\mathcal{C}}_{m'_K}$  associé au sous-groupe parabolique  $Q^-$  opposé à  $Q$  est égale à la face de  $\overline{\mathcal{C}}_{m_K}$  associé à  $Q$ . Par minimalité de  $d$ , cela force le convexe  $\overline{\mathcal{C}}_{m'_K}$  à être dégénéré : les faces de  $\overline{\mathcal{C}}_{m'_K}$  associés à  $Q$  et  $Q^-$  sont dans le même hyperplan affine. Mais cela implique que la réduction à  $Q$  de  $m_K$  se relève en une réduction à  $Q$  du triplet  $m_{R/(\pi)^2} \in \mathcal{M}(R/(\pi)^2)$  déduit de  $m_R$  par le changement de base  $R \rightarrow R/(\pi)^2$  où  $(\pi) \subset R$  est l'idéal maximal. On peut réitérer ce processus en changeant de  $K$ -point du centre de  $Q$  (cf. § 8.16). On obtient alors une réduction de  $m$  à  $Q$  sur le complété formel  $\varinjlim_n C \times_k R/\pi^n$ . Par un théorème de Grothendieck, cette réduction à  $Q$  s'algèbrise et cela contredit alors la  $\xi$ -stabilité de  $m_K$  (cf. § 8.17).

### 8.3 Notations

On fixe désormais des objets  $R, \kappa, K$  et  $\overline{K}$  comme dans l'énoncé du théorème 8.1.1. Par le choix d'une uniformisante  $\pi$ , on identifie  $R$  à l'anneau  $\kappa[[\pi]]$ .

### 8.4 Le théorème 8.1.1 pour le champ $\mathcal{M}$

Montrons tout d'abord que le théorème 8.1.1 vaut lorsqu'on remplace le champ  $\overline{\mathcal{M}}^\xi$  par le champ  $\mathcal{M}$  tout entier. C'est bien connu. Nous ne donnons un argument que par souci d'exhaustivité. On reprend les hypothèses du théorème 8.1.1 excepté qu'on ne suppose pas le point  $m_K \in \mathcal{M}(K)$   $\xi$ -semi-stable. Le point  $m_K$  s'explique comme un triplet  $(\mathcal{E}_K, \theta_K, t)$ . Soit  $\eta$  le point générique de  $C_K = C \times_k K$ . Quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, on peut et on va supposer que le torseur  $\mathcal{E}_K$  est trivial au point  $\eta$  (cf. lemme 4.2.1). Fixons donc une telle trivialisations : on en déduit une trivialisations de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  en  $\eta$  et donc un élément  $Y \in \mathfrak{g}(F)$ , où  $F$  est le corps des fonctions de  $C_K$ , qui est l'image de  $\theta$  par cette dernière trivialisations. Notons que  $\chi(Y)$  est égal à la restriction  $a_\eta$  de  $a$  à  $\eta$ .

Soit  $B$  l'anneau local du point générique de la fibre spéciale de  $C_R = C \times_k \text{Spec}(R)$ . C'est un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $F$ . En prenant une section de Kostant (par exemple), on voit qu'il existe  $X \in \mathfrak{g}(B)$  telle que  $\chi(X) = a|_{\text{Spec}(B)}$ . Puisque  $\chi(X) = \chi(Y)$ , le lemme 3.8.1 entraîne que, quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, on peut supposer qu'il existe  $g \in G(F)$  tel qu'on ait  $\text{Ad}(g)X = Y$ . On peut alors avec cet élément  $g \in G(F)$  recoller le torseur  $\mathcal{E}_K$  et la section  $\theta$  avec le couple  $(G \times_k B, X)$  sur  $\text{Spec}(B)$ . On obtient ainsi un couple  $(\mathcal{E}_U, \theta_U)$  qui prolonge  $(\mathcal{E}_K, \theta_K)$  à un ouvert  $U$  de  $C_R$  qui contient tous les points de codimension  $\leq 1$ . Mais tout  $G$ -torseur sur un tel ouvert  $U$  se prolonge de manière unique en un  $G$ -torseur sur  $C_R$  tout entier (cf. [CS79, théorème 6.13]). On obtient un  $G$ -torseur  $\mathcal{E}$  sur  $C_R$  qui prolonge  $\mathcal{E}_K$ . Le fibré  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  possède une section sur  $U$  à savoir  $\theta_U$ . Mais comme  $U$  contient tous les points de codimension  $\leq 1$  et que  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  est affine sur  $C$ , cette section se prolonge de manière unique sur  $C_R$  (cf. [Gro67, corollaire 20.4.12]). On a ainsi obtenu un couple  $(\mathcal{E}, \theta)$ . Les points  $\chi(\theta)(\infty_R)$  et  $\chi(t)$  sont deux points de  $\text{car}(R)$ . Ils sont en fait égaux puisque leurs images dans  $\text{car}(K)$  sont égales. Ainsi le couple  $(\mathcal{E}, \theta)$  se complète en un triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$  d'où le théorème 8.1.1 pour  $\mathcal{M}$ .

### 8.5 Réduction au cas semi-simple

Dans ce paragraphe, on montre que le théorème 8.1.1 pour tout groupe semi-simple implique le théorème 8.1.1 pour tout groupe réductif.

Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur  $k$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $T$  un sous-tore maximal. Soit  $G_{\text{der}}$  le groupe dérivé de  $G$  et  $\mathfrak{g}_{\text{der}}$  son algèbre de Lie. Comme l'ordre du groupe de Weyl est inversible dans  $k$  (cf. § 2.1), on a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{der}} \oplus \mathfrak{z}$$

ce qui induit une décomposition

$$\text{car}_G = \text{car}_{G_{\text{der}}} \oplus \mathfrak{z}. \tag{8.5.1}$$

Soit  $A_G$  le centre connexe de  $G$  et  $\mathfrak{z}$  son algèbre de Lie. Soit  $G' = G/A_G$ . C'est un groupe semi-simple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$  et qui admet  $T' = T/A_G$  comme sous-tore maximal. Le morphisme évident  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  induit des isomorphismes  $\mathfrak{g}_{\text{der}} \rightarrow \mathfrak{g}'$  et

$$\text{car}_{G_{\text{der}}} \simeq \text{car}_{G'}. \tag{8.5.2}$$

La projection de  $\text{car}_G$  sur  $\text{car}_{G_{\text{der}}}$  définie par (8.5.1) composée avec l'isomorphisme (8.5.2) et le morphisme évident  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}/\mathfrak{z}$  induisent un morphisme  $\mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}_{G'}$ . La bijection évidente  $\mathcal{L}^G(T) \rightarrow \mathcal{L}^{G'}(T')$  est compatible à la décomposition de la proposition 3.6.2.

Soit  $S$  un  $k$ -schéma affine et  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}_G(S)$ . Soit  $\mathcal{E}'$  le  $G'$ -torseur obtenu lorsqu'on pousse  $\mathcal{E}$  par le morphisme  $G \rightarrow G'$ . La section  $\theta$  poussée par le morphisme  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  fournit une section  $\theta'$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$ . Soit  $t'$  l'image de  $t$  par le morphisme  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}/\mathfrak{z}$ . Le triplet  $m' = (\mathcal{E}', \theta', t')$  appartient à  $\mathcal{M}_{G'}(S)$ . On obtient ainsi un morphisme  $\mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G'}$  qui à  $m$  associe  $m'$ . Il s'inscrit dans le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_G & \longrightarrow & \mathcal{M}_{G'} \\ \downarrow f_G & & \downarrow f_{G'} \\ \mathcal{A}_G & \longrightarrow & \mathcal{A}_{G'} \end{array}$$

En utilisant le morphisme  $P \rightarrow P/A_G$ , il est clair que toute réduction de  $m$  à un sous-groupe parabolique  $P$  donne naturellement une réduction de  $m'$  à  $P/A_G$ . Si  $S$  est le spectre d'un corps, on obtient ainsi une bijection naturelle entre les réductions de  $m$  et celles de  $m'$  compatible à la bijection  $\mathcal{F}^G(T) \rightarrow \mathcal{F}^{G'}(T')$ . Le morphisme surjectif évident  $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_{T'}$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{a}_T^G \simeq \mathfrak{a}_{T'}$ . Il est alors évident sur les définitions que le point  $m$  est  $\xi$ -semi-stable si et seulement si  $m'$  est  $\xi^G$ -semi-stable, où  $\xi^G$  est la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_T^G$ .

Revenons à la situation du théorème 8.1.1. Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(R)$  et  $m_K = (\mathcal{E}_K, \theta_K, t) \in \overline{\mathcal{M}_G^\xi(K)}$  tel que  $f_G(m_K) = (a, t)$ . Soit  $m'_K = (\mathcal{E}'_K, \theta'_K, t') \in \overline{\mathcal{M}_{G'}^\xi(K)}$  image de  $m_K$  par le morphisme  $\mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{G'}$ . Soit  $(a', t') = f_{G'}(m'_K)$ . Le point  $(a', t')$  appartient à  $\mathcal{A}_{G'}(R)$  puisque c'est l'image de  $(a, t)$ . Le théorème 8.1.1 pour le groupe semi-simple  $G'$  implique que, quitte à changer  $K$  par une extension finie  $K'$  dans  $\overline{K}$  et  $R$  par sa clôture intégrale dans  $K'$ , on peut supposer que  $m'_K$  se prolonge en un triplet  $m' = (\mathcal{E}', \theta', t') \in \overline{\mathcal{M}_{G'}^\xi(R)}$  qui prolonge  $m_K$ . Quitte de nouveau à changer  $K$  et  $R$  comme ci-dessus, on peut supposer que le  $G'$ -torseur  $\mathcal{E}'$  est trivial sur le spectre de  $B$  l'anneau local du point de  $C_R$  défini par  $(\pi)$  (cf. [DS95, théorème 2]). Fixons une telle trivialisations. On en déduit une trivialisations de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$  sur  $\text{Spec}(B)$ ; celle-ci envoie  $\theta'$  sur un point  $Y' \in \mathfrak{g}'(B) \simeq \mathfrak{g}_{\text{der}}(B)$  tel que  $\chi_{G'}(Y) = a'_{|\text{Spec}(B)}$ . En écrivant  $a_{|\text{Spec}(B)} = a'_{|\text{Spec}(B)} \oplus Z$  avec  $Z \in \mathfrak{z}(B)$  suivant (8.5.1) et (8.5.2), on obtient un point  $Y = Y' + Z \in \mathfrak{g}(B)$ . Toute trivialisations de  $\mathcal{E}_K$  sur un ouvert  $U$  de  $C_K$  donne des trivialisations de  $\mathcal{E}'_K$  et  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}'_K)$  sur le même ouvert ainsi que des points  $X$  et  $X'$  sections respectives de  $\mathfrak{g} \times_k U$  et  $\mathfrak{g}' \times_k U$  qui se déduisent de  $\theta$  et  $\theta'$ . La condition de recollement des trivialisations de  $(\mathcal{E}', \theta')$  sur  $\text{Spec}(B)$  et  $U$  se traduit par l'existence d'un élément  $g' \in G'(F)$  tel que  $\text{Ad}(g')X' = Y'$  où  $F$  est le corps des fonctions de  $C_R$ .

Tout relèvement  $g \in G(F)$  de  $g'$  vérifie  $\text{Ad}(g)X = Y$  par construction de  $Y$ . Or l'obstruction à un tel relèvement vit dans  $H^1(F, A_G)$ . Quitte à remplacer  $K$  par une extension, on peut supposer que cet ensemble est réduit à la classe triviale (cf. [Ser94], ch. III § 2) et donc qu'un tel relèvement existe. D'un tel relèvement, on déduit, comme au paragraphe 8.4, un prolongement  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}_G(R)$  de  $m_K$ . Par construction, l'image de  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  dans  $\mathcal{M}_{G'}(R)$  coïncide avec  $m'$  sur un ouvert de  $C_R$  qui contient tous les points de codimension  $\leq 1$ . Par un argument déjà évoqué au paragraphe 8.4, l'image de  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  est donc (isomorphe à)  $m'$ . Il s'ensuit qu'on a  $m \in \overline{\mathcal{M}}_G^\xi(R)$  comme voulu.

**8.6 Les points  $m_K, (a, t)$  et  $(\bar{a}, \bar{t})$**

Désormais et ce jusqu'à la fin de la preuve du théorème 8.1.1, on suppose que  $G$  est *semi-simple*. On se place sous les hypothèses du théorème 8.1.1. Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}(R)$  et soit  $m_K \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K)$  tel que  $f(m_K) = (a, t)$ . Soit  $(\bar{a}, \bar{t}) \in \mathcal{A}(\kappa)$  le point déduit de  $(a, t)$  par le changement de base  $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$ .

**8.7 Le réel  $d$  et le point  $m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$**

Pour toute extension  $K' \subset \bar{K}$  de degré fini sur  $K$ , soit  $m_{K'} \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(K')$  déduit de  $m_K$  par le changement de base  $\text{Spec}(K') \rightarrow \text{Spec}(K)$ . Soit  $R'$  la clôture intégrale  $R$  dans  $K'$ . Soit  $m_{R'} \in \mathcal{M}(R')$  un prolongement de  $m_{K'}$  à  $C \times_k R'$ . L'anneau  $R'$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel  $\kappa$ . Soit  $m_\kappa$  le point de  $\mathcal{M}(\kappa)$  déduit de  $m_{R'}$  par le changement de base  $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R')$ . Soit

$$d(\bar{C}_{m_\kappa}, \xi)$$

la distance de  $\xi$  au convexe  $\bar{C}_{m_\kappa}$  (cf. § 5.5).

LEMME 8.7.1. *L'ensemble des réels  $d(\bar{C}_{m_\kappa}, \xi)$  pour tous  $R'$  et  $m_{R'}$  comme ci-dessus admet un plus petit élément.*

*Démonstration.* Cet ensemble est non vide (cf. § 8.4) et minoré par 0. Il est même discret et fermé dans  $\mathfrak{a}_T$  puisqu'inclus dans l'ensemble des distances de  $\xi$  aux sous-espaces  $X + \mathfrak{a}_T^Q + \mathfrak{a}_G$  pour  $X \in X_*(Q)$  et  $Q \in \mathcal{F}$  (cf. corollaire 6.3.3). Il contient donc sa borne inférieure.  $\square$

Soit  $d \geq 0$  le plus petit élément de l'ensemble considéré dans le lemme 8.7.1. Quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, on peut et on va supposer qu'il existe

$$m = (\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}(R)$$

dont l'image dans  $\mathcal{M}(K)$  est le point  $m_K$  de départ et telle que la distance de  $\xi$  au convexe  $\bar{C}_{m_\kappa}$  soit  $d$ , où  $m_\kappa \in \mathcal{M}(\kappa)$  est l'image de  $m$ . Dans toute la suite, on fixe un tel  $m$ .

Comme  $m$  est  $\xi$ -semi-stable sur  $C_K$ , il sera  $\xi$ -semi-stable si et seulement s'il l'est aussi sur  $C_\kappa$ . On a donc les équivalences suivantes :

$$m \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(R) \Leftrightarrow m_\kappa \in \overline{\mathcal{M}}^\xi(\kappa) \Leftrightarrow d = 0.$$

Ainsi le théorème 8.1.1 est vrai pour le point  $m_K$  si et seulement si  $d = 0$ . Dans la suite, on suppose qu'on a

$$d > 0$$

et on va montrer qu'on aboutit à une contradiction.

**8.8 Le sous-groupe de Levi  $L$  et les sous-groupes paraboliques  $Q_0$  et  $Q$**

Soit  $L \in \mathcal{L}$  tel que  $f(m_\kappa) \in \chi_G^L(\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(\kappa))$  (cf. proposition 3.6.2). Soit  $\varrho$  le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m_\kappa$ . D’après la proposition 6.3.2, il existe un sous-groupe parabolique  $Q_0 \in \mathcal{F}(L)$  tel qu’on ait :

- $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$  ;
- $\varrho$  appartient au sous-espace affine

$$-\text{deg}(m_{\kappa,Q_0}) + \mathfrak{a}_T^{Q_0}$$

où  $m_{\kappa,Q_0}$  est une réduction de  $m_\kappa$  à  $Q_0$  (ici  $\mathfrak{a}_G = \{0\}$  puisque  $G$  est semi-simple). Par hypothèse, la distance de  $\varrho$  à  $\bar{\mathcal{C}}_{m_\kappa}$  n’est pas nulle ; le sous-groupe parabolique  $Q_0$  est donc propre. Dans toute la suite on fixe  $Q \in \mathcal{F}(Q_0)$  maximal parmi les sous-groupes paraboliques propres de  $G$  qui contiennent  $Q_0$ . Soit  $Q^-$  le sous-groupe parabolique opposé à  $Q$ , au sens où  $Q^- \cap Q$  est l’unique facteur de Levi de  $Q$  qui contient  $T$ .

**8.9 Quelques notations :  $V, i_{R,v}, j_{R,v}$  etc**

Soit  $V$  est un ensemble fini de points fermés de  $C_\kappa$  qui contient le support du diviseur

$$D_\kappa = D \times_k \kappa = \sum_{v \in V} d_v v$$

ainsi que le point  $\infty_\kappa$ . Soit  $C_\kappa^V = C_\kappa - V$  et  $\kappa[C^V]$  l’algèbre des fonctions régulières sur  $C_\kappa^V$ . On reprend les notations de la §7 en particulier le diagramme (7.2.1) pour la courbe  $C_\kappa = C \times_k \kappa$  où sont définis les morphismes  $j_A, i_{A,v}$  etc pour tout point  $v \in V$  et toute  $\kappa$ -algèbre.

**8.10 Le point  $t_a$**

Soit  $t_a$  l’unique point de  $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](R)$  qui vérifie les deux assertions suivantes :

- la réduction modulo  $z_\infty$  de  $t_a$  est le point  $t \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(R)$  ;
- $\chi_G(t_a) = \chi_D(\theta) \circ i_{R,\infty}$ .

L’existence et l’unicité de  $t_a$  résulte du fait que  $\chi$  induit un morphisme étale de  $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}$  sur  $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}$ . Soit

$$\bar{t}_a \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](\kappa)$$

la réduction modulo  $\pi$  de  $t_\infty$ . Notons qu’on a  $\bar{t}_a = \bar{t}_{\bar{a}}$  où  $t_{\bar{a}}$  est l’unique point de  $\mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](\kappa)$  de réduction  $\bar{t}$  et de caractéristique  $\bar{a}$ .

**8.11 Trivialisation de  $m$  sur un ouvert de la fibre spéciale**

Soit  $m_\kappa = (\mathcal{E}_\kappa, \theta_\kappa, \bar{t}) \in \mathcal{M}(\kappa)$  le point déduit de  $m$  par le changement de base  $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$ . On a le lemme suivant.

LEMME 8.11.1. *Quitte à rajouter un nombre fini de points à  $V$ , on est dans la situation suivante. Il existe une trivialisation du  $G$ -torseur  $j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa)$  sur  $C_\kappa^V$*

$$\beta_\kappa : j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V$$

telle que l’isomorphisme de schémas en groupes qui s’en déduit

$$\iota_\kappa : \text{Aut}_G(j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa)) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V$$

satisfasse la condition : l'élément  $dl_\kappa(j_\kappa^*\theta)$ , où  $dl_\kappa$  est le morphisme dérivé de  $\iota_\kappa$ , vérifie :

- (1)  $dl_\kappa(j_\kappa^*\theta)$  appartient à  $\mathfrak{l}(\kappa[C_\kappa^V])$  ;
- (2)  $dl_\kappa(j_\kappa^*\theta)$  est conjugué à  $\bar{t}_\infty$  par un élément de  $l \in L((z_\infty))(\kappa)$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  est le corps des fonctions de  $C_\kappa$ . Comme  $\kappa$  est algébriquement clos, le  $G$ -torseur  $\mathcal{E}_\kappa$  est trivial au point générique de  $C_\kappa$  (cf. lemme 4.2.1). Par le choix d'une trivialisations, on obtient aussi une trivialisations générique de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$  qui envoie  $\theta$  sur un certain élément  $X \in \mathfrak{g}(F)$ . Soit  $(\bar{a}, \bar{t}) = f(m_\kappa)$ . Cet élément appartient à  $\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(\kappa)$  d'après la définition de  $L$  (cf. § 8.8). D'après le corollaire 3.9.2, il existe  $X'$  semi-simple et  $G$ -régulier dans  $\mathfrak{l}(F)$  et  $l \in L((z_\infty))(\kappa)$  tel que :

- (A)  $\chi_G(X') = \bar{a}|_{\text{Spec}(F)}$  ;
- (B)  $\text{Ad}(l)X' = \bar{t}_\infty$ .

Notons qu'on a  $\chi_G(X) = \chi_G(X')$  par définition de  $\bar{a}$ . Le lemme 3.8.1 implique que, quitte à changer la trivialisations générique de  $\mathcal{E}_\kappa$ , on peut supposer que  $X$  vérifie les conditions (A) et (B) ci-dessus.

On obtient alors le lemme puisque toute trivialisations générique de  $\mathcal{E}_\kappa$  s'étend à un ouvert de  $C_\kappa$  et que l'élément  $X$  lui aussi se prolonge à un ouvert. □

### 8.12 Trivialisations de $m$ sur des disques formels de la fibre spéciale

Dans la suite, on fixe une trivialisations

$$\beta_\kappa : j_\kappa^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k C_\kappa^V \tag{8.12.1}$$

qui vérifie les conditions du lemme 8.11.1.

Pour tout  $v \in V$  soit

$$\alpha_{\kappa,v} : i_{\kappa,v}^*(\mathcal{E}_\kappa) \rightarrow G \times_k \kappa[[z_v]] \tag{8.12.2}$$

un isomorphisme  $G$ -équivariant. Un tel isomorphisme existe. En effet, cela revient à se donner une section du toseur  $i_{\kappa,v}^*(\mathcal{E}_\kappa)$  au-dessus de  $\text{Spec}(\kappa[[z_v]])$ . Une telle section existe au moins au-dessus du point spécial et, par lissité, elle se prolonge à  $\text{Spec}(\kappa[[z_v]])$ .

LEMME 8.12.1. *On peut choisir les trivialisations  $\alpha_{\kappa,v}$  de sorte le triplet*

$$(\bar{X}, (\bar{g}_v)_{v \in V}, \bar{t}) \tag{8.12.3}$$

associé au point  $m_\kappa = (\mathcal{E}_\kappa, \theta_\kappa, \bar{t}) \in \mathcal{M}(\kappa)$  et aux trivialisations  $(\alpha_{\kappa,v}, \beta_\kappa)$  par la bijection de la proposition 7.3.1 satisfasse les conditions suivantes :

- (1)  $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$  ;
- (2)  $\alpha_{\kappa,\infty}(i_{\kappa,\infty}^*\theta) = \bar{t}_a$  ;
- (3)  $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$ .

*Démonstration.* Quel que soit le choix de  $\alpha_{\kappa,v}$ , on a

$$\bar{g}_v \in G((z_v))(\kappa).$$

La décomposition d'Iwasawa

$$G((z_v))(\kappa) = Q((z_v))(\kappa) \cdot G[[z_v]](\kappa)$$

montre qu'on peut toujours modifier  $\alpha_{\kappa,v}$  de sorte qu'on ait

$$\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa) \tag{8.12.4}$$

d'où l'assertion (1).

On a

$$\text{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1}\bar{X} \in \mathfrak{g}[[z_\infty]](\kappa).$$

L'élément  $\chi(\bar{X})$ , après changement de base à  $\text{Spec}(k[[z_\infty]])$ , appartient à  $\mathbf{car}[[z_\infty]](\kappa)$  et sa réduction modulo  $z_\infty$  coïncide avec celle de  $\chi(\bar{t}_\infty)$ . Comme  $\chi$  est étale au-dessus de  $\mathbf{car}^{\text{reg}}$ , on a

$$\chi(\text{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1}\bar{X}) = \chi(\bar{X}) = \chi(\bar{t}_\infty).$$

Le lemme 8.12.2 ci-dessous montre qu'on peut modifier  $\alpha_{\kappa,\infty}$  de sorte qu'on ait

$$\text{Ad}(\bar{g}_\infty)^{-1}\bar{X} = \bar{t}_\infty. \tag{8.12.5}$$

Mais d'après le lemme 8.11.1,  $\bar{X}$  et  $t_\infty$  sont conjugués sous  $L((z_\infty))(\kappa)$ . Il s'ensuit qu'on a  $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$ .  $\square$

LEMME 8.12.2. Soit  $Y \in \mathfrak{g}[[z_\infty]](R)$  tel que  $\chi_G(Y) = \chi_G(t_a)$ . Il existe  $g \in G[[z_\infty]](R)$  tel que  $\text{Ad}(g)Y = t_a$ .

Le même énoncé vaut lorsqu'on remplace  $R$  par  $\kappa$  et  $t_a$  par  $\bar{t}_a$ .

Démonstration. Soit  $\mathcal{T}$  le  $R[[z_\infty]]$ -schéma défini pour toute  $R[[z_\infty]]$ -algèbre  $B$  par

$$\mathcal{T}(B) = \{h \in G(B) \mid \text{Ad}(h)(Y) = t_a\}.$$

Montrons que le schéma  $\mathcal{T}$  est lisse sur  $\text{Spec}(R[[z_\infty]])$ . Notons tout d'abord que les centralisateurs de  $Y$  et  $t_a$  dans  $G \times_k R[[z_\infty]]$  sont des sous-schémas en tores : cela résulte du fait que  $\theta_\infty \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}(R[[z_\infty]])$  et  $\chi_G(t_a) = \chi_G(Y)$ . Par conséquent, localement pour la topologie étale, ces centralisateurs sont conjugués. Comme  $Y$  et  $t_a$  ont même caractéristique, ces éléments sont localement conjugués pour la topologie étale. Ainsi le schéma  $\mathcal{T}$  a localement des sections pour la topologie étale. C'est donc un torseur sous le schéma en tores  $T \times_k R[[z_\infty]]$ . Il est donc lisse.

D'après le lemme (3.8.1), le schéma  $\mathcal{T} \times_{R[[z_\infty]]} \kappa$  possède des sections. Par lissité de  $\mathcal{T}$  sur  $R[[z_\infty]]$  et par complétude de  $R[[z_\infty]] \simeq \kappa[[\pi, z_\infty]]$ , cette section se relève en une section  $h \in G[[z_\infty]](R)$  de  $\mathcal{T}$ .

La seconde assertion se démontre de la même façon.  $\square$

### 8.13 Trivialisation admissibles de $(\mathcal{E}, \theta, t)$

Désormais on fixe des trivialisations  $(\alpha_{\kappa,v}, \beta_\kappa)$  de  $m_\kappa$  qui satisfont les lemmes 8.11.1 et 8.12.1. Soit  $C_R^V = C_\kappa^V \times_\kappa R$ . Soit  $R[C^V] = \kappa[C^V] \otimes_\kappa R$ .

DÉFINITION 8.13.1. Une *trivialisation admissible* de  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  est la donnée d'isomorphismes  $G$ -équivariants

$$\beta_R : j_R^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k R[C^V] \tag{8.13.1}$$

et pour tout  $v \in V$

$$\alpha_{R,v} : i_{R,v}^* \mathcal{E} \rightarrow G \times_k R[[z_v]] \tag{8.13.2}$$

qui satisfont les conditions suivantes :

- (1) l'isomorphisme  $\beta_R$  se spécialise en l'isomorphisme  $\beta_\kappa$  de (8.12.1) ;
- (2) l'isomorphisme  $\alpha_{R,v}$  se spécialise en l'isomorphisme  $\alpha_{\kappa_v}$  de (8.12.2) ;
- (3)  $\alpha_{R,\infty}(i_{R,\infty}^* \theta) = t_a$ .



*Remarque.* Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet associé à  $m \in \mathcal{M}(R)$  et aux trivialisations (8.13.1) et (8.13.2) par la proposition 7.3.1. Alors ces trivialisations forment une trivialisation admissible de  $m$  si et seulement si :

- la réduction modulo  $\pi$  du triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  est le triplet  $(\bar{X}, (\bar{g}_v)_{v \in V}, \bar{t})$  défini en (8.12.3) ;
- $\text{Ad}(g_\infty)^{-1}X = t_a$ .

LEMME 8.13.2. *Quitte à remplacer  $K$  par une extension finie et  $R$  par sa clôture intégrale dans cette extension, on peut supposer qu'il existe des trivialisations admissibles de  $(\mathcal{E}, \theta, t)$ .*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, on peut et on va supposer que  $j_R^* \mathcal{E}$  est trivial sur  $C_R^V$  (comme  $G$  est semi-simple c'est possible par le théorème 3 de [DS95]). Le torseur  $j_R^* \mathcal{E}$  possède donc des sections au-dessus de  $C_R^V$ . On en déduit un isomorphisme  $\beta_R$  comme en (8.13.1). Quitte à translater cette section par un élément de  $G(\kappa[C^V])$ , on peut supposer que  $\beta_R$  satisfait la condition (1) ci-dessus.

Soit  $v \in V$ . En utilisant la lissité de  $\mathcal{E}$  sur  $C_R$ , on voit que le torseur  $i_{R,v}^* \mathcal{E}$  possède des sections sur  $\text{Spec}(R[[z_v]])$ . On en déduit des isomorphismes  $\alpha_{R,v}$  comme en (8.13.2). Comme précédemment, on se ramène au cas où  $\alpha_{R,v}$  satisfait la condition (2).

Par la proposition 7.3.1, on déduit des trivialisations  $\beta_R$  et  $\alpha_{R,v}$  un triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  comme ci-dessus. Soit

$$Y = \text{Ad}(g_\infty^{-1})X.$$

C'est un élément de  $\mathfrak{g}[[z_\infty]](R)$  qui vérifie  $\chi_G(Y) = \chi_G(X) = \chi_G(t_a)$ . Le lemme 8.12.2 montre que  $Y$  et  $t_a$  sont conjugués sous  $G[[z_\infty]](R)$ . Cela permet de conclure.  $\square$

### 8.14 Sous-groupes unipotents

Soit  $\Phi^+ = \Phi_T^{N_Q}$  et  $\Phi^- = \Phi_T^{N_{Q^-}}$  les ensembles respectifs de racines de  $T$  dans les radicaux unipotents  $N_Q$  et  $N_{Q^-}$ . La composante neutre  $A_Q$  du centre de  $M_Q$  est un tore de dimension 1. Soit

$$\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow A_Q \tag{8.14.1}$$

l'unique isomorphisme qui vérifie  $\alpha(\lambda) > 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ . Pour tout entier  $i > 0$ , soit

$$\Phi_i^+ = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha(\lambda) = i\}$$

et

$$\Phi_i^- = -\Phi_i^+$$

en notation additive.

Pour tout  $\alpha \in \Phi^+ \cup \Phi^-$ , soit  $N_\alpha$  le sous-groupe unipotent associé et

$$\zeta_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow N_\alpha \tag{8.14.2}$$

le groupe à un paramètre additif associé à  $\alpha$ . Pour tout entier  $i > 0$ , soit  $N_i$  le sous-groupe unipotent engendré par les sous-groupes  $N_\alpha$  tels que  $\alpha(\lambda) \leq -i$ . On obtient ainsi une suite décroissante de sous-groupes unipotents

$$\cdots \subset N_i \subset \cdots \subset N_1 = N_{Q^-}$$

et pour  $i$  assez grand on a

$$N_i = \{1\}.$$

On vérifie la relation suivante sur les commutateurs

$$[N_i, N_j] \subset N_{i+j}.$$

**8.15 Condition auxiliaire sur  $V$**

Commençons par le lemme suivant.

LEMME 8.15.1. *Il existe  $V_0$  un ensemble fini non vide de points fermés de  $C_\kappa$  tel que pour toute  $\Gamma(C_\kappa - V_0, \mathcal{O}_{C_\kappa})$ -algèbre  $B$  et tout entier  $i \geq 1$ , l'application de  $N_i(B)$  dans  $\mathfrak{n}_i(B)$  définie par*

$$n \in N_i(B) \mapsto \text{Ad}(n^{-1})\bar{X} - \bar{X}$$

est bijective.

*Démonstration.* Soit  $F$  le corps des fonctions de  $C \times_k \kappa$ . On laisse au lecteur le soin de prouver que le morphisme  $n \mapsto \text{Ad}(n^{-1})\bar{X} - \bar{X}$  induit un isomorphisme de  $N_i \times_k F$  sur  $\mathfrak{n}_i \times_k F$ . Il se prolonge donc en un isomorphisme à un ouvert de Zariski de  $C_\kappa$  complémentaire d'un ensemble fini  $V_0$ . Le lemme s'en déduit.  $\square$

Quitte à agrandir  $V$ , on suppose dans la suite que  $V$  contient l'ensemble fini  $V_0$  donné par le lemme 8.15.1.

**8.16 Constructions de certaines trivialisations admissibles**

Soit  $r$  le plus petit multiple commun des entiers  $i$  tels que  $\Phi_i^+ \neq 0$ . Soit  $R' = R[\pi^{1/r}]$  et  $K'$  le corps des fractions de  $R'$ . Pour tout entier  $j$  soit  $z_j \in A_Q(K')$  défini par

$$z_j = \lambda(\pi^{j/r})$$

où  $\lambda$  est l'isomorphisme  $\mathbb{G}_m \rightarrow A_Q$  défini en (8.14.1).

Soit  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  une trivialisations admissible de  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  (cf. définition 8.13.1). Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.3.1.

DÉFINITION 8.16.1. Soit

$$j(\beta_R, (\alpha_{R,v})) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

la borne supérieure de l'ensemble des entiers  $j \in \mathbb{N}$  qui vérifient :

- (1)  $\text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$  ;
- (2) pour tout  $v \in V$ ,

$$z_j g_v z_j^{-1} \in G((z_v))(R').$$

PROPOSITION 8.16.2. *Pour tout entier  $j \in \mathbb{N}$ , il existe une trivialisations admissible  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  de  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  telle que*

$$j(\beta_R, (\alpha_{R,v})) \geq j.$$

*Démonstration.* Supposons la proposition mise en défaut. Soit  $j \in \mathbb{N}$  le plus petit entier tel que

$$j \geq j(\beta_R, (\alpha_{R,v}))$$

pour toute trivialisations admissible  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  de  $m$ . Comme on a  $\bar{X} \in \mathfrak{l}(\kappa[C^V])$  et  $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$  (cf. assertion (1) du lemme 8.11.1 et assertion (1) du lemme 8.12.1), on a

$$j \geq 1.$$

Soit  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  une trivialisat on admissible de  $m$  telle que

$$j = j(\beta_R, (\alpha_{R,v})).$$

Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.3.1.

Soit  $\text{val}_\pi$  la valuation de  $R$  normalis e par  $\text{val}_\pi(\pi) = 1$ . Cette valuation s'étend à  $R'$  et    $R'[C^V]$  de manière évidente. Pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$ , le  $k$ -espace vectoriel  $\mathfrak{n}_\alpha$  est de dimension 1. Pour tout vecteur  $X_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha(R'[C^V])$ , soit  $\text{val}_\pi(X_\alpha)$  la valuation du coefficient de  $X_\alpha$  sur un vecteur non nul de  $\mathfrak{n}_\alpha(k)$ .

Suivant la décomposition en espaces propres sous  $A_Q$

$$\left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi^\pm} \mathfrak{n}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{m}_Q$$

on écrit

$$X = \sum_{\alpha \in \Phi^\pm} X_\alpha + X_{M_Q}. \tag{8.16.1}$$

Comme la réduction modulo  $\pi$  de  $X$  est  $\bar{X}$  qui appartient à  $\mathfrak{l}(\kappa[C^V])$ , on a

$$\text{val}_\pi(X_\alpha) \geq 1 \tag{8.16.2}$$

pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$ . De plus, la réduction modulo  $\pi$  de  $X_{M_Q}$  est  $\bar{X}$ .

On a aussi la décomposition

$$\text{Ad}(z_j)X = \sum_{\alpha \in \Phi^\pm} \pi^{j\alpha(\lambda)/r} X_\alpha + X_{M_Q}.$$

Par la condition (1) de la définition 8.16.1, on a pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$

$$\frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(X_\alpha) \geq 0. \tag{8.16.3}$$

Pour  $\alpha \in \Phi^+$ , cette inégalité est stricte.

LEMME 8.16.3. *Il existe une trivialisat on admissible  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  de  $m$  pour laquelle :*

- $j = j((\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V}))$  ;
- l'inégalité (8.16.3) est stricte pour tout  $\alpha \in \Phi^-$ .

*Démonstration.* Partons d'une trivialisat on admissible  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  de  $m$  pour laquelle il existe  $\alpha \in \Phi^-$  tel que

$$\frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(X_\alpha) = 0. \tag{8.16.4}$$

Soit  $i$  le plus petit entier tel qu'il existe  $\alpha \in \Phi_i^-$  qui vérifie l'égalité (8.16.4). Soit

$$Y = \text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$$

et  $\bar{Y}$  la réduction modulo  $\pi^{1/r}$  de  $Y$ . Alors  $\bar{Y}$  appartient à  $\bar{X} + \mathfrak{n}_i(\kappa[C^V])$ . D'après le lemme 8.15.1, il existe  $n_i \in N_i(\kappa[C^V])$  tel que

$$\text{Ad}(n_i^{-1})\bar{X} = \bar{Y}. \tag{8.16.5}$$

Pour tout  $\alpha \in \Phi_i^-$  soit  $u_\alpha \in \kappa[C^V]$  et  $n_{i+1} \in N_{i+1}(\kappa[C^V])$  tels qu'on ait

$$n_i = n_{i+1}n \tag{8.16.6}$$

avec

$$n = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(u_\alpha),$$

où les groupes à un paramètre  $\zeta_\alpha$  sont ceux définis en (8.14.2). Comme  $n_{i+1}$  est un élément de  $N_{i+1}(\kappa[C^V])$ , on a

$$\text{Ad}(n_{i+1}^{-1})\bar{X} \in \bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}(\kappa[C^V]).$$

En comparant avec (8.16.5) et (8.16.6), on obtient

$$\text{Ad}(n)\bar{Y} \in \bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}(\kappa[C^V]). \tag{8.16.7}$$

En utilisant l'inclusion  $\kappa \subset R$ , on peut écrire

$$z_j^{-1}nz_j = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(\pi^{ji/r}u_\alpha).$$

De plus, cet élément appartient à  $N_i(R[C^V])$  et sa réduction modulo  $\pi$  est triviale. En effet, par hypothèse, il existe  $\alpha \in \Phi_i^-$  tel que l'égalité (8.16.4) soit vraie. On a donc par (8.16.2)

$$\frac{ji}{r} = -\frac{j\alpha(\lambda)}{r} = \text{val}_\pi(X_\alpha) \in \mathbb{N}^*.$$

Le triplet  $(\text{Ad}(z_j^{-1}nz_j)X, (z_j^{-1}nz_jg_v)_{v \in V}, t)$  définit par la bijection de la proposition 7.3.1 une trivialisat on de  $m$  de la forme  $(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V})$  qui est encore admissible. Il est clair sur la définition 8.16.1 qu'on a  $j(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V}) \geq j$  (par maximalité de  $j$  on a même égalité). Quitte à remplacer  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  par  $(\beta'_R, (\alpha'_{R,v})_{v \in V})$ , et vu (8.16.7) on se ramène au cas où  $\bar{Y}$  appartient à  $\bar{X} + \mathfrak{n}_{i+1}(\kappa[C^V])$ . Par récurrence, on peut même supposer qu'on a  $\bar{Y} = \bar{X}$ . Mais alors l'inégalité (8.16.3) est stricte.  $\square$

Soit  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  une trivialisat on admissible de  $m$  qui satisfait les conclusions du lemme 8.16.3. Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.3.1. On a donc

$$\min_{\alpha \in \Phi^-} \left( -\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(X_\alpha) \right) > j. \tag{8.16.8}$$

On notera que, par définition de  $r$ , le premier membre de cet inégalité est un entier.

Soit  $v \in V$  et  $B_v$  l'anneau déduit de  $R((z_v))$  par localisation en l'idéal premier engendr e par  $\pi$ . C'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel  $\kappa((z_v))$ . On note encore  $\text{val}_\pi$  la valuation normalisée par  $\text{val}_\pi(\pi) = 1$ . Le point  $g_v \in G((z_v))(R)$  induit alors un morphisme du trait  $\text{Spec}(B_v)$  dans  $G$ . Comme la réduction modulo  $\pi$  de  $g_v$  est  $\bar{g}_v$  et que l'on a  $\bar{g}_v \in Q((z_v))(\kappa)$  (cf. (1) (8.12.4)), l'image du point spécial par ce morphisme appartient à l'ouvert  $N_Q M_Q N_{Q^-}$ . Il s'ensuit que l'image du trait entier est dans l'ouvert  $N_Q M_Q N_{Q^-}$ . Il existe donc  $x_v \in M_Q(B_v)$  et  $b_{\alpha,v} \in B_v$  tels que pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$  on ait

$$g_v = \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} \zeta_\alpha(b_{\alpha,v}) \right) \cdot x_v \cdot \left( \prod_{\alpha \in \Phi^-} \zeta_\alpha(b_{\alpha,v}) \right). \tag{8.16.9}$$

Soit  $\bar{x}_v \in M_Q((z_v))(\kappa)$  la réduction modulo  $\pi$  de  $x_v$ . Puisque la réduction  $\bar{g}_v$  de  $g_v$  modulo  $\pi$  appartient à  $Q((z_v))(\kappa)$ , on a  $\text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \geq 1$  pour  $\alpha \in \Phi^-$  et

$$\bar{g}_v \in \bar{x}_v N_Q((z_v))(\kappa). \tag{8.16.10}$$

On a

$$z_j g_v z_j^{-1} = \left( \prod_{\alpha \in \Phi^+} \zeta_\alpha(\pi^{j\alpha(\lambda)/r} b_{\alpha,v}) \right) \cdot x_v \cdot \left( \prod_{\alpha \in \Phi^-} \zeta_\alpha(\pi^{j\alpha(\lambda)/r} b_{\alpha,v}) \right) \tag{8.16.11}$$

et cet élément appartient à  $G((z_v))(R')$  par définition de  $j$ . On a donc pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$

$$\frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \geq 0. \tag{8.16.12}$$

L'inégalité (8.16.12) est stricte pour  $\alpha \in \Phi^+$ .

LEMME 8.16.4. Il existe une trivialisatation admissible  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  de  $m$  pour laquelle :

- (1)  $j = j((\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V}))$  ;
- (2) l'inégalité (8.16.8) est satisfaite ;
- (3) l'inégalité (8.16.12) est stricte pour tout  $\alpha \in \Phi^-$ .

*Démonstration.* Soit  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  une trivialisatation admissible de  $m$  qui satisfait les conclusions du lemme 8.16.3 donc les deux premières assertions. Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit par la proposition 7.3.1. On reprend les notations utilisées ci-dessus, en particulier aux lignes (8.16.9) et (8.16.10). Soit

$$h_v = z_j g_v z_j^{-1} \in G((z_v))(R[\pi^{1/r}])$$

et

$$Y = \text{Ad}(z_j)X \in \mathfrak{g}(R[C^V][\pi^{1/r}]).$$

LEMME 8.16.5. On a les assertions suivantes :

- (1) le triplet  $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$  est un triplet qui satisfait les conditions de la proposition 7.3.1 pour l'anneau  $R'$  ;
- (2) soit  $m' \in \mathcal{M}(R')$  le point associé à ce triplet par la proposition 7.3.1 ; alors, après changement de base à  $K'$ , les points  $m'$  et  $m$  deviennent isomorphes.

*Démonstration.* Pour l'assertion (1), il s'agit de vérifier que le triplet  $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$  satisfait les conditions suivantes :

- $Y \in \mathfrak{g}(R'[C^V])$  ;
- pour tout  $v \in V$ , l'élément  $h_v \in G((z_v))(R')$  et vérifie
 
$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](R') ;$$
- $t$  est un élément de  $t^{\text{reg}}(R')$  dont la caractéristique  $\chi(t)$  est égale à la réduction modulo  $z_\infty$  de  $\chi_G(Y)$ .

La première condition et la relation  $h_v \in G((z_v))(R')$  résultent de la définition de  $j$ . On a donc

$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}((z_v))(R').$$

En fait, on peut remplacer dans la relation précédente  $\mathfrak{g}((z_v))$  par  $\mathfrak{g}[[z_v]]$  car on a d'une part

$$\text{Ad}(h_v^{-1})Y = \text{Ad}(z_j)(\text{Ad}(g_v^{-1})X)$$

et d'autre part

$$\text{Ad}(g_v^{-1})X \in z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](R).$$

De même, la troisième relation est vérifiée puisque  $X$  et  $Y$ , étant conjugués, ont même caractéristique que cette relation vaut  $X$ .

Pour l’assertion (2) du lemme, on remarque qu’on a  $z_j \in G(K')$  et on conclut à l’aide du corollaire 7.3.2. □

LEMME 8.16.6. *On poursuit avec les notations du lemme 8.16.5. Soit  $m'_\kappa \in \mathcal{M}(\kappa)$  le point déduit de  $m'$  par le changement de base  $\text{Spec}(\kappa) \rightarrow \text{Spec}(R)$ . On a alors les assertions suivantes :*

- (1)  $f(m') \in \mathcal{A}_{L,\text{ell}}(\kappa)$  ;
- (2) pour tout  $P \in \mathcal{F}(L)$  et toute réduction  $m'_{\kappa,P}$  de  $m'_\kappa$  à  $P$ , on a

$$\text{deg}(m'_{\kappa,P}) = H_P((\bar{h}_v)_{v \in V})$$

où  $\bar{h}_v \in G((z_v))(\kappa)$  est la réduction modulo  $\pi^{1/r}$  de  $h_v$  ;

- (3) pour tout  $P \in \mathcal{F}(L)$  tel que  $P \subset Q$  soit  $m_{\kappa,P}$  une réduction de  $m_\kappa$  à  $P$  et  $m'_{\kappa,P^-}$  une réduction de  $m'_\kappa$  à  $P^- = (M_Q \cap P)N_{Q^-}$  ; on a l’égalité

$$\text{deg}(m'_{\kappa,P^-}) = \text{deg}(m_{\kappa,P}).$$

*Démonstration.* Le triplet  $(\bar{Y}, (\bar{h}_v)_{v \in V}, \bar{t})$  est la réduction modulo  $\pi^{1/r}$  du triplet  $(Y, (h_v)_{v \in V}, t)$ . Par conséquent, le point  $m'_\kappa$  se déduit du triplet  $(\bar{Y}, (\bar{h}_v)_{v \in V}, \bar{t})$  par la bijection de la proposition 7.3.1. L’inégalité (8.16.8) implique que  $\bar{Y}$  est égal à  $\bar{X}$  défini en (8.12.3). Il s’ensuit que  $f(m'_\kappa) = f(m_\kappa)$  et ce point appartient à  $\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(\kappa)$  (cf. §8.8) d’où l’assertion (1). Rappelons que  $\bar{X} \in I(\kappa[C^V])$  est conjugué à  $\bar{t}_a$  par  $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$  (cf. assertions (2) et (3) du lemme 8.12.1). L’assertion (2) résulte alors du corollaire 7.5.2.

Prouvons l’assertion (3). Soit  $P \in \mathcal{F}(L)$  tel que  $P \subset Q$ . Soit  $P^- \in \mathcal{F}(L)$  défini par  $P^- = (M_Q \cap P)N_{Q^-}$ . On a donc  $P^- \subset Q^-$ . De l’égalité (8.16.11) et du fait que l’inégalité (8.16.12) est stricte pour  $\alpha \in \Phi^+$  on déduit

$$\bar{h}_v \in N_{Q^-}((z_v))(\kappa)\bar{x}_v$$

et

$$\text{deg}(m'_{\kappa,P^-}) = H_{P^-}((\bar{h}_v)_{v \in V}) = H_{P^- \cap M_Q}((\bar{x}_v)_{v \in V}).$$

Mais l’égalité (8.16.10) implique aussi qu’on a

$$\text{deg}(m_{\kappa,P}) = H_P((\bar{g}_v)_{v \in V}) = H_{P \cap M_Q}((\bar{x}_v)_{v \in V}).$$

Comme  $P \cap M_Q = P^- \cap M_Q$ , on a bien

$$\text{deg}(m'_{\kappa,P^-}) = \text{deg}(m_{\kappa,P}). \quad \square$$

D’après les notations du paragraphe 8.8 et les équivalences de la proposition 6.3.2,  $\varrho$  est le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m_\kappa$  et  $Q_0$  est le sous-groupe parabolique de  $\mathcal{F}(L)$  qui vérifie :

- (A)  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$  ;
- (B) la projection de  $\varrho$  sur  $\mathfrak{a}_L^G$  appartient à la projection sur  $\mathfrak{a}_L^G$  de l’enveloppe convexe des points  $-\text{deg}(m_{\kappa,P})$  pour  $P \in \mathcal{P}(L)$  tel que  $P \subset Q_0$  et  $m_{\kappa,P}$  une réduction de  $m_\kappa$  à  $P$ .

L’assertion (B) ci-dessus et l’assertion (3) du lemme 8.16.6 montrent que la projection de  $\varrho$  sur  $\mathfrak{a}_L^G$  appartient à la projection sur  $\mathfrak{a}_L^G$  de l’enveloppe convexe des points  $-\text{deg}(m'_{\kappa,P^-})$  pour  $P \in \mathcal{F}^{Q_0}(L)$  (avec les notations du lemme 8.16.6). La proposition 5.8.1 implique alors que le point  $\varrho$  appartient au convexe  $\bar{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}$  associé à  $m'_\kappa$ .

Il s'ensuit qu'on a l'inégalité suivante sur les distance

$$d(\bar{\mathcal{C}}_{m'_\kappa}, \xi) \leq d(\varrho_{m_\kappa}, \xi) = d(\bar{\mathcal{C}}_{m_\kappa}, \xi) = d.$$

Mais par définition de  $d$  (cf. § 8.7) on a nécessairement égalité dans l'inégalité ci-dessus. Donc  $\varrho$  est aussi le  $\xi$ -point de Harder–Narasimhan de  $m'_\kappa$ . Comme  $\xi - \varrho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+ \cap \mathfrak{a}_T^G$ , le sous-groupe parabolique qui vérifie l'assertion (2) de la proposition 6.3.2 pour  $m'_\kappa$  est nécessairement  $Q_0$ . La projection de  $\varrho$  sur  $\mathfrak{a}_L^G$  est donc égale à la projection sur  $\mathfrak{a}_L^G$  de l'enveloppe convexe des points  $-\text{deg}(m'_{\kappa,P})$  associés aux réductions  $m'_{\kappa,P}$  de  $m'_\kappa$  aux sous-groupes  $P \in \mathcal{P}(M)$  tels que  $P \subset Q_0$ . En particulier, la projection de  $\varrho$  sur la droite  $\mathfrak{a}_Q^G$  égale au point  $-\text{deg}(m'_{\kappa,Q})$  où  $m'_{\kappa,Q}$  est une réduction de  $m'_\kappa$  à  $Q$  (on a  $\mathfrak{a}_G = \{0\}$  puisque  $G$  est semi-simple). L'assertion (B) implique par ailleurs que cette projection est égale à  $-\text{deg}(m_{\kappa,Q})$ . On a donc

$$\text{deg}(m'_{\kappa,Q}) = \text{deg}(m_{\kappa,Q})$$

ce qui, combiné avec l'assertion (3) du lemme 8.16.6 donne

$$\text{deg}(m'_{\kappa,Q}) = \text{deg}(m'_{\kappa,Q-})$$

ou de manière équivalente par l'assertion (2) du lemme 8.16.6

$$H_{Q-}((\bar{h}_v)_{v \in V}) = H_Q((\bar{h}_v)_{v \in V}). \tag{8.16.13}$$

Le lemme 8.16.7 ci-dessous implique alors que pour tout  $v \in V$ , on a

$$\bar{h}_v \in M_Q((z_v))(\kappa)G[[z_v]](\kappa). \tag{8.16.14}$$

Considérons d'abord le point  $v = \infty_\kappa$ . Par la condition (3) qui définit une trivialisations admissible, on a  $\text{Ad}(g_\infty^{-1})X = t_a$ , d'où l'on tire

$$\text{Ad}(h_\infty^{-1})Y = t_a.$$

L'inégalité (8.16.8) implique qu'on a  $\bar{Y} = \bar{X}$ . En réduisant modulo  $\pi^{1/r}$  l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\text{Ad}(\bar{h}_\infty^{-1})\bar{X} = \bar{t}_a.$$

Mais  $\bar{X}$  et  $\bar{t}_a$  sont conjugués par  $\bar{g}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$  (cf. assertion (3) du lemme 8.12.1). On a donc aussi  $\bar{h}_\infty \in L((z_\infty))(\kappa)$ . Par conséquent l'inégalité (8.16.12) est stricte pour  $v = \infty_\kappa$  et pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$ .

Supposons désormais  $v \neq \infty_\kappa$ . Supposons aussi qu'il existe  $\alpha \in \Phi^-$  tel que l'inégalité (8.16.12) soit une égalité c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{j\alpha(\lambda)}{r} + \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) = 0. \tag{8.16.15}$$

Soit  $i$  le plus grand entier tel qu'il existe  $\alpha \in \Phi_i^-$  qui vérifie l'égalité (8.16.15). On a donc

$$\bar{h}_v \in \bar{x}_v N_i((z_v))(\kappa). \tag{8.16.16}$$

En comparant avec (8.16.14), on en déduit que

$$\bar{h}_v \in \bar{x}_v N_i[[z_v]](\kappa). \tag{8.16.17}$$

Pour tout  $\alpha \in \Phi_i^-$  soit  $u_\alpha \in \kappa[[z_v]]$  et

$$n = \prod_{\alpha \in \Phi_i^-} \zeta_\alpha(u_\alpha)$$

tel qu'on ait

$$\bar{h}_v n \in \bar{x}_v N_{i+1}[[z_v]](\kappa).$$

Soit  $n' = z_j^{-1} n z_j$ . On a donc

$$n' = \zeta_\alpha(\pi^{ij/r} u_\alpha).$$

L'égalité (8.16.15) implique que  $ij/r$  est un entier strictement positif. Par conséquent,  $n'$  appartient à  $N_Q((z_v))(R)$  et sa réduction modulo  $\pi$  est triviale. Quitte à remplacer  $g_v$  par  $g_v n'$ , on voit qu'on est ramené au cas où l'on a

$$\bar{h}_v \in \bar{x}_v N_{i+1}[[z_v]](\kappa)$$

et par récurrence au cas où  $\bar{h}_v = \bar{x}_v$ . Mais, dans ce cas, l'inégalité (8.16.12) est stricte pour tout  $\alpha \in \Phi^\pm$ . Cela termine la démonstration du lemme 8.16.4.  $\square$

Soit  $(\beta_R, (\alpha_{R,v})_{v \in V})$  une trivialisatation admissible de  $m$  qui vérifie les conditions du lemme 8.16.4. Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet qui s'en déduit. Soit

$$j_1 = \min \left( \min_{\alpha \in \Phi^-} \left( -\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(X_\alpha) \right), \min_{v \in V, \alpha \in \Phi^-} \left( -\frac{r}{\alpha(\lambda)} \text{val}_\pi(b_{\alpha,v}) \right) \right).$$

C'est un entier qui vérifie  $j_1 > j$ ,

$$\text{Ad}(z_{j_1})X \in \mathfrak{g}(R[C^V])$$

et pour tout  $v \in V$

$$z_{j_1} g_v z_{j_1}^{-1} \in G((z_v))(R).$$

C'est visiblement la contradiction recherchée et cela achève la démonstration de la proposition 8.16.2.  $\square$

Le lemme suivant a été utilisé dans la preuve précédente (preuve de la proposition 8.16.2).

LEMME 8.16.7. Soit  $Q$  et  $Q^-$  deux sous-groupes paraboliques opposés de  $\mathcal{F}^G$ . Pour tout  $v \in V$ , soit  $g_v \in G((z_v))(\kappa)$ . L'égalité

$$H_Q((g_v)_{v \in V}) = H_{Q^-}((g_v)_{v \in V}) \tag{8.16.18}$$

entraîne que pour tout  $v \in V$ , il existe  $m_v \in M_Q((z_v))(\kappa)$  et  $k_v \in G[[z_v]](\kappa)$  tels que

$$g_v = m_v k_v.$$

La preuve du lemme 8.16.7 va utiliser le lemme suivant.

LEMME 8.16.8. Soit  $B$  et  $B'$  dans  $\mathcal{F}^G$  deux sous-groupes de Borel adjacents. Soit  $\alpha$  l'unique racine de  $T$  dans  $G$  qui est positive pour  $B$  et négative pour  $B'$ . Soit  $\zeta_\alpha$  un isomorphisme de  $\mathbb{G}_a$  sur le groupe radiciel  $N_\alpha$  correspondant à la racine  $\alpha$ . Pour tout  $g \in G((z))(\kappa)$ , il existe  $t \in T((z))(\kappa)$ ,  $u \in (N_B \cap N_{B'})((\kappa((z))))$ ,  $x \in \kappa((z))$  et  $h \in G[[z]](\kappa)$  tels que  $g = tu\zeta_\alpha(x)h$ . Pour toute telle décomposition, on a

$$H_{B'}(g) - H_B(g) = \sup(-\text{val}(x), 0) \alpha^\vee.$$

Démonstration. Ce lemme est bien connu. On en donne la démonstration pour la commodité du lecteur. L'existence de la décomposition de  $g$  résulte de la décomposition d'Iwasawa et de l'égalité  $N_B = (N_B \cap N_{B'})N_\alpha$ . Avec les notations de l'énoncé, on écrit  $g = tu\zeta_\alpha(x)h$ . On a

$$H_{B'}(g) - H_B(g) = H_{B'}(\zeta_\alpha(x)).$$



Si  $\text{val}(x) \geq 0$ , on a  $H_{B'}(\zeta_\alpha(x)) = 0$ . Supposons désormais  $\text{val}(x) < 0$ . L'égalité suivante dans  $\text{SL}_2((z))(\kappa)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

montre qu'on a

$$\zeta_\alpha(x) \in \alpha^\vee(x) N_{B'}((z))(\kappa) G[[z]](\kappa)$$

et donc

$$H_{B'}(\zeta_\alpha(x)) = H_{B'}(\alpha^\vee(x)) = -\text{val}(x)\alpha^\vee$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 8.16.7.

*Démonstration du lemme 8.16.7.* Traitons d'abord le cas où  $V = \{v\}$  est un singleton. Pour alléger les notations, on omet l'indice  $v$ . Soit  $g \in G((z))(\kappa)$ . On va montrer que  $-H_Q(g) + H_{Q^-}(g)$  est une somme à coefficients positifs de coracines  $\alpha^\vee$  dans  $\Delta_Q^\vee$  et que cette somme est nulle si et seulement s'il existe  $m \in M_Q((z))(\kappa)$  et  $k \in G[[z]](\kappa)$  tels que  $g = mk$ . Par la décomposition d'Iwasawa, on peut et on va supposer qu'on a  $g \in N_Q((z))(\kappa)$ .

Soit  $B \subset Q$  et  $B^- \subset Q^-$  deux sous-groupes de Borel opposés de  $\mathcal{F}^G$ . Soit  $n = |\Phi^G|/2$  et  $B_0 = B, B_1, \dots, B_n = B^-$  une chaîne minimale de sous-groupes de Borel de  $\mathcal{F}^G$  tels que  $B_i$  et  $B_{i+1}$  soient adjacents pour  $0 \leq i < n$ . D'après le lemme 8.16.8, la différence

$$H_{B^-}(g) - H_B(g) = \sum_{i=0}^{n-1} (H_{B_{i+1}}(g) - H_{B_i}(g))$$

est une combinaison linéaire à coefficients positifs de coracines de  $T$  dans  $B$ . Comme  $H_{Q^-}(g) - H_Q(g)$  est l'image de  $H_{B^-}(g) - H_B(g)$  par le morphisme canonique  $\mathfrak{a}_B \rightarrow \mathfrak{a}_Q$ , la différence  $H_{Q^-}(g) - H_Q(g)$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de  $\Delta_Q^\vee$ . Supposons désormais

$$H_{Q^-}(g) - H_Q(g) = 0.$$

Numérotons les racines  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $T$  dans  $B$  de sorte qu'on ait pour tout  $0 \leq i < n$

$$\Phi^B \cap \Phi^{B_i} = \{\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n\}.$$

Soit  $I \subset \{1, \dots, n\}$  tel que  $\Phi^{N_Q} = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ . Pour tout  $i \in I$ , on a donc

$$H_{B_i}(g) - H_{B_{i-1}}(g) = 0. \tag{8.16.19}$$

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , soit  $\zeta_i$  un isomorphisme de  $\mathbb{G}_a$  sur le groupe radiciel correspondant à la racine  $\alpha_i$ . On a supposé  $g \in N_Q((z))(\kappa)$ . Il existe donc  $x_i \in \kappa((z))$  pour  $1 \leq i \leq n$  tels que  $x_i = 0$  si  $i \notin I$  et

$$g = \zeta_n(x_n)\zeta_{n-1}(x_{n-1}) \cdots \zeta_1(x_1).$$

On remarque que pour  $1 \leq i < n$ , on a

$$\zeta_n(x_n)\zeta_{n-1}(x_{n-1}) \cdots \zeta_{i+1}(x_{i+1}) \in (N_{B_i} \cap N_{B_{i-1}})(\kappa((z))).$$

En utilisant le lemme 8.16.8 et l'égalité (8.16.19), on voit par récurrence sur  $i$  qu'on a  $\text{val}(x_i) \geq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . En particulier  $g \in N_Q[[z]](\kappa)$  comme on voulait. Cela conclut la preuve lorsque  $V$  est un singleton.

Revenons au cas général d'un ensemble  $V$  fini non vide. On vient de voir que pour tout  $v \in V$ , la différence  $-H_Q(g_v) + H_{Q^-}(g_v)$  est une combinaison à coefficients positifs d'éléments de  $\Delta_Q$ . Il s'ensuit que l'égalité (8.16.18) est vraie si et seulement si pour tout  $v \in V$

$$H_Q(g_v) = H_{Q^-}(g_v).$$

On est donc ramené au cas du singleton. □

### 8.17 Où l'on obtient la contradiction cherchée

Pour tout entier  $n$ , soit

$$R_n = R/\pi^n R.$$

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . Soit  $(\beta_R, \alpha_{R,v})$  une trivialisatation admissible de  $m$  qui vérifie

$$j(\beta_R, \alpha_{R,v}) \geq n \tag{8.17.1}$$

(cf. proposition 8.16.2). Soit  $(X, (g_v)_{v \in V}, t)$  le triplet associé à  $m$  et à cette trivialisatation par la proposition 7.3.1. Soit  $(X_n, (g_{n,v})_{v \in V}, t_n)$  le triplet qui s'en déduit par réduction modulo  $\pi^n$ . Ce triplet vérifie les conditions suivantes :

- (1)  $X_n \in \mathfrak{q}(R_n[C^V])$  ;
- (2) pour tout  $v \in V$ ,  $g_{n,v} \in Q((z_v))(R_n)$  ;
- (3)  $\text{Ad}(g_{n,\infty})^{-1}X_n = t_{a,n}$  où  $t_{a,n}$  est la réduction modulo  $\pi^n$  de  $t_a$ .

De ce triplet, on déduit, par la proposition 7.3.1 appliquée au groupe  $Q$ , un triplet  $m_{Q,n} = (\mathcal{E}_{Q,n}, \theta_{Q,n}, t_n)$  formé d'un  $Q$ -torseur  $\mathcal{E}_{Q,n}$  sur

$$C_n = C \times_k R_n,$$

d'une section  $\theta_{Q,n}$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n})$  tel que  $\chi_Q(\theta_{Q,n}(\infty_{R_n})) = \chi_Q(t_n)$ . En outre, ce triplet est une réduction à  $Q$  du point  $m_n \in \mathcal{M}(R_n)$  obtenu par changement de base à  $R_n$ .

L'algorithme utilisé dans la preuve de la proposition 8.16.2 consiste à conjuguer  $X$  (et translater à droite  $g_v$  en conséquence), respectivement translater à gauche  $g_v$ , par des éléments de la forme  $\zeta_\alpha(u_\alpha)$  où  $u_\alpha$  est un élément de  $R[C^V]$ , respectivement de  $R((z_v))$ , de valuation  $\pi$ -adique  $\geq n$  de façon à obtenir un triplet  $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$  associée à une trivialisatation admissible dont le  $j$  associé est plus grand que  $n + 1$ . En particulier la réduction modulo  $\pi^n$  de  $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$  est égale à  $(X_n, (g_{n,v})_{v \in V}, t_n)$ . Soit  $(X_{n+1}, (g_{n+1,v})_{v \in V}, t_{n+1})$  la réduction modulo  $\pi^{n+1}$  de  $(X', (g'_v)_{v \in V}, t)$ . Soit  $m_{Q,n+1} = (\mathcal{E}_{Q,n+1}, \theta_{Q,n+1}, t_{n+1})$  la réduction à  $Q$  de  $m_{n+1} \in \mathcal{M}(R_{n+1})$  qui s'en déduit comme plus haut. Le changement de base de  $m_{Q,n+1}$  à  $C_n$  redonne  $m_{Q,n}$ .

Par récurrence, on obtient pour tout entier  $n$  une réduction  $m_{Q,n} = (\mathcal{E}_{Q,n}, \theta_{Q,n}, t_n)$  à  $Q$  du point  $m_n = (\mathcal{E}_n, \theta_n, t_n) \in \mathcal{M}(R_n)$  déduit de  $m \in \mathcal{M}(R)$  par changement de base telle que l'image de  $m_{n+1}$  dans  $\mathcal{M}(R_n)$  soit isomorphe à  $m_n$ . Le morphisme  $Q$ -équivariant

$$\mathcal{E}_{Q,n} \rightarrow \mathcal{E}_{Q,n} \times_k^G Q \simeq \mathcal{E}_n$$

fournit par passage au quotient une section

$$\sigma_n : C_n \rightarrow \mathcal{E}_n/Q.$$

Lorsque  $n$  varie, les sections obtenues s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_n/Q & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n+1}/Q \\ \sigma_n \uparrow & & \uparrow \sigma_{n+1} \\ C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont les flèches canoniques de transition. Elles forment donc un système inductif  $\hat{\sigma} = (\sigma_n)_{n \geq 1}$ . Soit

$$\hat{C} = \varinjlim_n C_n$$

et

$$\widehat{\mathcal{E}/Q} = \varinjlim_n \mathcal{E}_n/Q.$$

Le système inductif  $\hat{\sigma}$  donne un élément, encore noté  $\hat{\sigma}$ , de

$$\text{Hom}_{\text{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\mathcal{E}/Q}).$$

Comme  $C_R$  est propre sur  $\text{Spec}(R)$  et que  $\mathcal{E}/Q$  est séparé et de type fini sur  $\text{Spec}(R)$ , on sait, d'après le théorème d'algébrisation des morphismes de Grothendieck (théorème 5.4.1 de [Gro61]), que l'application de prolongement aux complétés

$$\text{Hom}_{\text{Spec}(R)}(C_R, \mathcal{E}/Q) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\mathcal{E}/Q})$$

est une bijection. Il existe donc  $\sigma \in \text{Hom}_{\text{Spec}(R)}(C_R, \mathcal{E}/Q)$  qui s'envoie sur  $\hat{\sigma}$  par la bijection ci-dessus. En utilisant de nouveau le théorème d'algébrisation, on voit que  $\sigma$  est en fait une section de  $\mathcal{E}/Q$ . Soit  $\mathcal{E}_Q$  le  $Q$ -torseur au-dessus de  $C_R$  défini par

$$\mathcal{E}_Q = C_R \times_{\sigma, \mathcal{E}/Q} \mathcal{E}.$$

Par construction,  $\mathcal{E}_Q$  est une réduction de  $\mathcal{E}$  à  $Q$ .

Soit

$$\widehat{\text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)} = \varinjlim_n \text{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n}).$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , la section  $\theta_n$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_n)$  se factorise par la section  $\theta_{Q,n}$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_{Q,n})$ . Par construction, les sections  $\theta_n$  forment un système inductif et donc un élément noté de

$$\text{Hom}_{\text{Spf}(R)}(\hat{C}, \widehat{\text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)}).$$

Par le théorème d'algébrisation déjà cité, on en déduit que  $\theta$  se factorise par une section  $\theta_Q$  de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_Q)$ .

Par construction, le réduction modulo  $\pi^n$  de  $\chi_Q(\theta_Q)(\infty_R)$  est égale à  $\chi_Q(\theta_{Q,n})(\infty_{R_n}) = \chi_Q(t_n)$ . Il s'ensuit qu'on a

$$\chi_Q(\theta_Q)(\infty_R) = \chi_Q(t).$$

Par conséquent le triplet  $m_Q = (\mathcal{E}_Q, \theta_Q, t)$  est une réduction de  $m$  à  $Q$ . Soit  $m_{Q,K}$  et  $m_{Q,\kappa}$  les réductions à  $Q$  de  $m_K$  et  $m_\kappa$  qui s'en déduisent par changement de base. Par platitude de  $\mathcal{E}_Q$  sur  $C_R$ , on a

$$\text{deg}(m_{Q,K}) = \text{deg}(m_{Q,\kappa}).$$

Or  $m_K$  est  $\xi$ -semi-stable : on a donc

$$\xi \in -\text{deg}(m_{Q,K}) - \overline{+a_Q} + a_T^Q.$$

Au paragraphe 8.8, on a introduit le sous-groupe parabolique  $Q_0 \subset Q$  qui vérifie  $\xi - \rho \in \mathfrak{a}_{Q_0}^+$  et  $\varrho \in -\text{deg}(m_{Q_0, \kappa}) + \mathfrak{a}_T^{Q_0}$ . On a donc

$$\xi \in -\text{deg}(m_{Q_0, \kappa}) + \mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\xi \in (-\text{deg}(m_{Q, K}) - \overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q) \cap (-\text{deg}(m_{Q_0, \kappa}) + \mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}).$$

De l'égalité  $\text{deg}(m_{Q, K}) = \text{deg}(m_{Q, \kappa})$ , on tire  $(-\overline{+\mathfrak{a}_Q} + \mathfrak{a}_T^Q) \cap (\mathfrak{a}_{Q_0}^+ + \mathfrak{a}_T^{Q_0}) \neq \emptyset$ . En projetant sur  $\mathfrak{a}_Q$ , on trouve  $-\overline{+\mathfrak{a}_Q} \cap \mathfrak{a}_Q^+ \neq \emptyset$  ce qui n'est pas : c'est la contradiction cherchée (cf. fin du §8.7).

### 9. Séparation du morphisme $f^\xi$

#### 9.1 Énoncé

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 9.1.1. *Supposons  $G$  semi-simple. Pour tout  $\xi \in \mathfrak{a}_T$ , le morphisme*

$$f^\xi : \mathcal{M}^\xi \rightarrow \mathcal{A}$$

*est séparé.*

*Remarque.* L'énoncé et la démonstration du théorème 9.1.1 s'inspirent d'un théorème de Langton (cf. [Lan75, §3 théorème]). Faltings a donné une preuve du théorème 9.1.1 pour  $\xi = 0$  et lorsque le corps de base est de caractéristique nulle (cf. [Fal93, théorème II.4]).

Dans toute la suite, on suppose  $G$  semi-simple. D'après le critère valuatif de séparation, il est équivalent de prouver l'énoncé suivant.

PROPOSITION 9.1.2. *Soit  $\kappa$  une extension de  $k$  algébriquement close. Soit  $R$  un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $\kappa$ . Soit  $m$  et  $m'$  deux éléments de  $\mathcal{M}^\xi(R)$  et  $m_K$  et  $m'_K$  les éléments de  $\mathcal{M}^\xi(K)$  qui s'en déduisent par changement de base. Supposons que ces objets satisfont les deux conditions suivantes :*

- $f^\xi(m) = f^\xi(m')$  ;
- il existe un isomorphisme  $\phi_K : m'_K \rightarrow m_K$ .

*Alors il existe un unique isomorphisme  $\phi : m' \rightarrow m$  qui prolonge  $\phi_K$ .*

#### 9.2 Où l'on se ramène à un problème sur un trait

Dans toute la suite, soit deux triplets  $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$  et  $m' = (\mathcal{E}', \theta', t)$  dans  $\mathcal{M}^\xi(R)$  tels que  $f^\xi(m) = f^\xi(m')$ . Soit  $m_K = (\mathcal{E}_K, \theta_K, t)$  et  $m'_K = (\mathcal{E}'_K, \theta'_K, t)$  les triplets de  $\mathcal{M}^\xi(K)$  qui s'en déduisent par changement de base. Soit  $\phi_K : m'_K \rightarrow m_K$  un isomorphisme. On note encore  $\phi_K$  l'isomorphisme  $G$ -équivalent sous-jacent

$$\phi_K : \mathcal{E}'_K \rightarrow \mathcal{E}_K.$$

L'isomorphisme qui s'en déduit

$$\text{Ad}_D(\phi_K) : \text{Ad}_D(\mathcal{E}'_K) \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_K)$$

envoie  $\theta'_K$  sur  $\theta_K$ . On cherche à prolonger  $\phi_K$  en un isomorphisme  $G$ -équivalent

$$\phi : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$$

de sorte que l'isomorphisme qui s'en déduit

$$\text{Ad}_D(\phi) : \text{Ad}_D(\mathcal{E}') \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E})$$

envoie  $\theta'$  sur  $\theta$ . Soit  $\pi$  une uniformisante de  $R$  et  $B$  l'anneau local de  $C_R$  en le point de codimension 1 défini par l'idéal  $(\pi)$ . C'est donc un anneau de valuation discrète de corps résiduel le corps des fonctions  $\kappa(C)$  de la courbe  $C_\kappa$  et de corps des fractions le corps des fonctions  $F$  de la courbe  $C_K$ .

LEMME 9.2.1. *Pour que  $\phi_K$  se prolonge à  $C_R = C \times_k R$  il faut et il suffit qu'il se prolonge à  $\text{Spec}(B)$ . De plus, de tels prolongements, s'ils existent, sont uniques.*

*Démonstration.* Un isomorphisme  $G$ -équivariant de  $\mathcal{E}'$  sur  $\mathcal{E}$  n'est autre qu'une section globale du  $C_R$ -schéma

$$\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E}) = (\mathcal{E}' \times_{C_R} \mathcal{E})/G$$

où  $G$  agit diagonalement à droite sur  $\mathcal{E}' \times_{C_R} \mathcal{E}$ . L'isomorphisme  $\phi_K$  définit une section  $\sigma_K$  de  $\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$  au-dessus de  $C_K$ . Tout prolongement de cette section à  $C_R$  est nécessairement unique, d'où l'unicité de l'énoncé. Supposons que  $\phi_K$  se prolonge à  $\text{Spec}(B)$ . La section  $\sigma_K$  se prolonge donc à  $\text{Spec}(B)$  et par suite à un ouvert de  $C_R$  qui contient tous les points de codimension  $\leq 1$ . Comme  $\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$  est affine sur  $C_R$ ; c'est même un torseur sous  $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$ ; une telle section se prolonge automatiquement à  $C_R$  (cf. [Gro67, corollaire 20.4.12]).  $\square$

Notons que si  $\phi_K$  se prolonge en un isomorphisme  $\phi$ , l'isomorphisme  $\text{Ad}_D(\phi)$  envoie nécessairement  $\theta'$  sur  $\theta$  puisque les sections  $\text{Ad}_D(\phi)(\theta')$  et  $\theta$ , qui coïncident sur un ouvert de  $C_R$ , sont en fait égales.

### 9.3 Étude sur le trait $\text{Spec}(B)$

Pour toute extension  $K'$  finie de  $K$  soit  $R'$  la clôture intégrale de  $R$  dans  $K'$ . Soit  $F'$  le corps des fonctions de la courbe relative  $C_{R'} = C \times_k R'$  et  $B'$  la clôture intégrale de  $B$  dans  $F'$ . Dans la démonstration du lemme 9.2.1, on a vu que  $\phi_K$  s'interprète comme une section du  $C_R$ -schéma affine  $\text{Isom}_G(\mathcal{E}', \mathcal{E})$  et que prolonger  $\phi_K$  revient à prolonger cette section à  $\text{Spec}(B)$ . Comme  $B$  est normal,  $\phi_K$  se prolonge à  $\text{Spec}(B)$  si et seulement si le changement de base de  $\phi_K$  à  $K'$  se prolonge à  $B'$ . Dans la suite, on pourra toujours, s'il le faut, remplacer  $K$  par  $K'$ .

Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}_G(R)$  défini par  $(a, t) = f^\xi(m)$ . Soit  $t_a \in \mathfrak{t}^{G\text{-reg}}[[z_\infty]](R)$  l'unique élément dont la caractéristique est la restriction de  $a$  à  $\text{Spec}(R[[z_\infty]])$  et dont la réduction modulo  $z_\infty$  est  $t$ .

Soit  $M \subset L$  les deux sous-groupes de Levi dans  $\mathcal{L}$  tels que  $(a, t)$  appartienne en fibre générique à  $\chi_G^L(\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(K))$  et à  $\chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(\kappa))$  en fibre spéciale (cf. proposition 3.6.2). Soit  $(a_L, t) \in \mathcal{A}_L(R)$  l'unique point tel que  $(a, t) = \chi_G^L((a_L, t))$  (cf. proposition 3.5.1).

LEMME 9.3.1. *Quitte à remplacer  $K$  par une extension finie  $K'$  assez grande et  $R$  par  $R'$ , on est dans la situation suivante :*

- (1) *il existe un point  $X \in \mathfrak{l}(B)$  qui vérifie :*
  - (a)  $\chi_L(X)$  coïncide avec  $a_L$  sur  $\text{Spec}(B)$  ;
  - (b) la réduction  $\bar{X}$  de  $X$  modulo  $\pi$  appartient à  $\mathfrak{m}(\kappa(C))$  et est conjugué à la réduction modulo  $\pi$  de  $t_a$  par un élément de  $M((z_\infty))(\kappa)$  ;
- (2) *il existe des trivialisations des  $G$ -torseurs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sur  $\text{Spec}(B)$  tels que les trivialisations de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  et  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}')$  qui s'en déduisent envoient  $\theta$  et  $\theta'$  sur  $X$ .*

*Démonstration.* La section de Kostant montre qu'un point  $X \in \mathfrak{l}(B)$  qui vérifie (1)(a) existe. Par la proposition 3.9.1 et le lemme 3.8.1, on peut supposer que, quitte à conjuguer  $X$  par un élément de  $L(\kappa(C))$ , l'assertion (1)(b) est aussi vérifiée.

Si l'extension  $K'$  est assez grande les toseurs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont triviaux sur  $\text{Spec}(B')$  (théorème 2 de [DS95]). Quitte à remplacer  $R$  par  $R'$ , on peut supposer que les toseurs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont triviaux sur  $\text{Spec}(B)$  et même, d'après le lemme 9.3.2 ci-dessous qu'il existe des trivialisations qui vérifient l'assertion (2).  $\square$

LEMME 9.3.2. *Soit  $a \in \text{car}^{\text{reg}}(B)$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $\mathfrak{g}(B)$  tels que*

$$\chi_G(X) = \chi_G(Y).$$

*Il existe une extension finie  $K'$  de  $K$  telle que  $X$  et  $Y$  sont conjugués par un élément de  $G(B')$ , où  $B'$  est la clôture intégrale de  $B$  dans le corps des fonctions de  $C_{K'}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $B$ -anneau  $A$  soit

$$\mathcal{T}(A) = \{g \in G(A) \mid \text{Ad}(g)X = Y\}.$$

Rappelons que  $B$  a pour corps des fractions le corps  $F$  des fonctions de  $C_K$  et pour corps résiduel le corps de fonctions  $\kappa(C)$  de  $C_\kappa$ . D'après le lemme 3.8.1, l'ensemble  $\mathcal{T}(\kappa(C))$  est non vide et, quitte à remplacer  $K$  par une extension finie, on peut supposer qu'il en est de même pour  $\mathcal{T}(F)$ . On en déduit que le foncteur  $\mathcal{T}$  est représenté par un toseur encore noté  $\mathcal{T}$  sous le schéma en groupes  $T_X$  qui centralise  $X$ . Or vu l'hypothèse de  $a \in \text{car}^{\text{reg}}(B)$ , ce schéma en groupes est un schéma en tores. Comme le toseur  $\mathcal{T}$  est trivial en fibre générique  $\text{Spec}(F)$ , il est trivial globalement (cf. par exemple [CS78] proposition 2.2). Il possède donc une section sur  $\text{Spec}(B)$ .  $\square$

Désormais on fixe  $X \in \mathfrak{g}(B)$  et des trivialisations de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sur  $\text{Spec}(B)$  qui vérifient les assertions du lemme 9.3.1. On obtient alors une trivialisations de  $\phi_K$  qui s'identifie à la translation à gauche par un élément  $\delta \in G(F)$  qui vérifie

$$\text{Ad}(\delta^{-1})X = X.$$

Il résulte du lemme 9.2.1 et des considérations ci-dessus qu'on a le lemme suivant.

LEMME 9.3.3. *Le morphisme  $\phi_K$  se prolonge si et seulement si  $\delta \in G(B)$ .*

Comme la restriction de  $a$  définit un élément de  $\text{car}^{\text{reg}}(B)$ , la réduction modulo  $\pi$  de  $X$  est encore semi-simple régulière. Le centralisateur de  $X$  dans  $G \times_k B$  est donc un schéma en tores sur  $B$ . Comme  $B$  est normal, on sait qu'un tel schéma en tores est isotrivial. Autrement dit, le tore  $T_{X,F}$  se déploie sur une extension séparable et non ramifiée. On en déduit qu'il existe  $\lambda \in X_*(T_X)$  et un élément  $h \in T_X(F) \cap G(B)$  tel que

$$\delta = \lambda(\pi)h.$$

Comme  $h \in G(B)$  centralise  $X$ , on peut composer la trivialisations de  $\mathcal{E}$  avec  $h$  sans que la condition (2) du lemme 9.3.1 soit affectée. Quitte à changer de trivialisations, on peut et on va supposer que  $h = 1$ . Notons que  $\lambda$  est nécessairement fixe sous  $\text{Gal}(F_s/F)$ . La caractéristique  $\chi_L(X)$  est égale à la restriction de  $a_L$  à  $\text{Spec}(B)$ . Comme  $(a_L, t)$  définit en fibre générique un point de  $\mathcal{A}_{L,\text{ell}}(K)$ , le tore  $T_{X,F}$  est un sous- $F$ -tore elliptique de  $L$  (cf. corollaire 3.9.2 et lemme 3.8.1) ce qui se traduit par l'égalité

$$X_*(T_X)^{\text{Gal}(F_s/F)} = X_*(A_L)$$

où  $A_L$  est le centre connexe de  $L$ . Ainsi  $\lambda \in X_*(A_L)$ . Le lemme suivant, combiné au lemme 9.3.3, montre l'existence du prolongement de  $\phi_K$ .

LEMME 9.3.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a  $\lambda = 0$ .*

**9.4 Preuve du lemme 9.3.4**

On continue avec les notations du paragraphe précédent. Notons tout d’abord que le lemme est évident si  $L = G$  puisque dans ce cas  $X_*(A_G) = 0$ . Dans la suite, on suppose donc qu’on a  $L \neq G$ . On raisonne par l’absurde en supposant  $\lambda \neq 0$  et on cherche une contradiction. Soit  $P$ , respectivement  $\bar{P}$ , le sous-groupe parabolique dans  $\mathcal{F}(L)$  défini par la condition suivante : les racines  $\alpha$  de  $T$  dans  $P$  satisfont l’inégalité  $\alpha(\lambda) \geq 0$ , respectivement  $\alpha(\lambda) \leq 0$ . Ces sous-groupes sont opposés au sens où l’intersection  $P \cap \bar{P}$  est un sous-groupe de Levi commun. On notera que cette intersection contient le sous-groupe de Levi  $M$  défini au § 9.3 et que ces sous-groupes paraboliques sont propres puisque  $\lambda$  n’est pas nul. Soit  $r$  le plus grand entier  $\alpha(\lambda)$  lorsque  $\alpha$  parcourt l’ensemble  $\Phi_T^G$  des racines de  $T$  dans  $G$ . Soit

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} \mathfrak{g}_\alpha$$

le décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces propres pour l’action de  $T$ . Pour tout entier  $i$  qui vérifie  $-r \leq i \leq r$ , soit

$$\mathfrak{g}_i = \bigoplus_{\{\alpha \in X^*(T) \mid \alpha(\lambda) = i\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

et

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\{-r < i \leq r\}} \mathfrak{g}_i.$$

Les sous-espaces  $\mathfrak{g}_+$  et  $\mathfrak{g}_r$  sont stables par  $P$  et  $\mathfrak{g}_{-r}$  est stable par  $\bar{P}$ .

L’inclusion

$$\pi^r \text{Ad}(\lambda(\pi))\mathfrak{g}(B) \subset \mathfrak{g}(B) \tag{9.4.1}$$

est une inclusion entre deux sous- $B$ -modules de  $\mathfrak{g}(F)$ , libres et de rang maximal, qui fournissent chacun un prolongement à  $C_R$  du fibré vectoriel  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_K)$  sur  $C_K$  (cf. proposition 6 de [Lan75]). L’un, celui associé à  $\mathfrak{g}(B)$ , n’est autre que  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  et on note l’autre  $\mathcal{V}$ . Dans la suite, on note  $\mathcal{E}_\kappa$  et  $\mathcal{V}_\kappa$  le  $G$ -torseur et le fibré vectoriel sur  $C_\kappa = C \times_k \kappa$  déduits de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{V}$  par changement de base. On déduit de l’inclusion (9.4.1) un morphisme de fibrés vectoriels

$$\mathcal{V} \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}). \tag{9.4.2}$$

Soit  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{Q}$  le noyau et l’image du morphisme  $\mathcal{V}_\kappa \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$ . Notons que  $\mathcal{W}$  est localement facteur direct de  $\mathcal{V}_\kappa$ . Ce n’est pas le cas pour  $\mathcal{Q}$  qui est simplement un sous-faisceau localement libre de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa)$ . On a

$$\text{deg}(\mathcal{V}_\kappa) = 0.$$

En effet, par platitude on a  $\text{deg}(\mathcal{V}_\kappa) = \text{deg}(\mathcal{V}_K)$  et d’autre part  $\text{deg}(\mathcal{V}_K) = \text{deg}(\text{Ad}_D(\mathcal{E}_K)) = 0$ . Comme  $\text{deg}(\mathcal{V}_\kappa) = 0$ , on a

$$\text{deg}(\mathcal{W}) = -\text{deg}(\mathcal{Q}). \tag{9.4.3}$$

Soit

$$\text{Ad}_D(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{V}$$

l’unique isomorphisme qui, en fibre générique, est le composé de l’isomorphisme

$$\text{Ad}_D(\phi_K) : \text{Ad}_D(\mathcal{E}'_K) \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_K)$$

par l'homothétie de rapport  $\pi^r$  et qui sur  $\text{Spec}(B)$  coïncide avec l'isomorphisme

$$\mathfrak{g}(B) \rightarrow \pi^r \text{Ad}(\lambda(\pi))\mathfrak{g}(B)$$

donné par  $\pi^r \text{Ad}(\lambda(\pi))$ . En composant cet isomorphisme avec le morphisme  $\mathcal{V} \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E})$  défini en (9.4.2), on obtient un morphisme de fibrés vectoriels sur  $C_R$

$$\text{Ad}_D(\mathcal{E}') \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}), \tag{9.4.4}$$

qui donne, en fibre spéciale, un morphisme

$$\text{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa) \rightarrow \text{Ad}_D(\mathcal{E}_\kappa) \tag{9.4.5}$$

dont on note  $\mathcal{W}'$  le noyau. Par construction, on a  $\mathcal{W}' \simeq \mathcal{W}$  et l'image de ce morphisme est le fibré vectoriel  $\mathcal{Q}$ . Vu (9.4.3), on a

$$\text{deg}(\mathcal{W}') = -\text{deg}(\mathcal{Q}). \tag{9.4.6}$$

On a fixée au § 9.3 des trivialisations de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sur  $\text{Spec}(B)$  qui vérifient les assertions du lemme 9.3.1. Via ces choix, le sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  définit une réduction générique de  $\mathcal{E}'_\kappa$  à  $P$  qui s'étend automatiquement en une réduction notée  $\mathcal{E}'_{P,\kappa}$  de  $\mathcal{E}'_\kappa$  à  $P$  sur  $C_\kappa$ . De même, on note  $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}$  la réduction de  $\mathcal{E}_\kappa$  à  $\bar{P}$  qui prolonge la réduction générique donnée par  $\bar{P} \subset G$ .

LEMME 9.4.1. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

- (1) une égalité  $\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P,\text{Ad}} \mathfrak{g}_+ = \mathcal{W}'$  ;
- (2) une injection  $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\text{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$  entre fibrés vectoriels de même rang.

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P,\text{Ad}} \mathfrak{g}_+$  et  $\mathcal{W}'$  sont des sous-fibrés vectoriels de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa)$ , il suffit de vérifier 1 au point générique de  $C_\kappa$ . De même, comme  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\text{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$  sont des sous-faisceaux localement libres de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E}'_\kappa)$  et que  $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\text{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}$  est même localement facteur direct, il suffit de vérifier 2 au point générique de  $C_\kappa$ . Or, dans les trivialisations  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sur  $\text{Spec}(B)$  qu'on a fixée au § 9.3, le morphisme (9.4.4) est le morphisme  $\mathfrak{g}(B) \rightarrow \mathfrak{g}(B)$  donnée par  $\pi^r \text{Ad}(\lambda(\pi))$ . En particulier, en réduction modulo  $\pi$ , ce morphisme est la projection de  $\mathfrak{g}(\kappa(C))$  sur  $\mathfrak{g}_{-r}(\kappa(C))$  de noyau  $\mathfrak{g}_+(\kappa(C))$ . Le lemme est alors clair.  $\square$

LEMME 9.4.2. *Soit  $\mu \in X^*(P)$  le déterminant de l'action adjointe de  $P$  sur  $\mathfrak{g}_+$ . On a l'inégalité*

$$\text{deg}(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})) \geq \text{deg}(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})). \tag{9.4.7}$$

*Remarque.* Le caractère  $\mu$  est un plus haut poids dans la représentation de  $G$  sur  $\bigwedge^{\dim(\mathfrak{g}_+)} \mathfrak{g}$ . Il s'écrit donc dans la base  $\hat{\Delta}_P$  avec des coefficients positifs dont l'un au moins est non nul.

*Démonstration.* D'après l'assertion (1) du lemme 9.4.1, on a

$$\text{deg}(\mathcal{W}') = \text{deg}(\mathcal{E}'_{P,\kappa} \times_k^{P,\text{Ad}} \mathfrak{g}_+) = \text{deg}(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})).$$

D'après l'assertion (2) du lemme 9.4.1, on a

$$\text{deg}(\mathcal{Q}) \leq \text{deg}(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa} \times_k^{\bar{P},\text{Ad}} \mathfrak{g}_{-r}) = -\text{deg}(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})).$$

On peut alors conclure puisque  $\text{deg}(\mathcal{W}') = -\text{deg}(\mathcal{Q})$  (cf. (9.4.6)).  $\square$

On a défini au § 9.3 un sous-groupe de Levi  $M$ . Comme  $P$  et  $\bar{P}$  contiennent tous deux  $M$ , il résulte de la proposition 4.10.1 et de sa démonstration que les toiseurs  $\mathcal{E}'_{P,\kappa}$  et  $\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}$  sont les



premiers facteurs de triplets  $m'_{P,\kappa}$  et  $m_{\bar{P},\kappa}$  qui sont des réductions à  $P$  et  $\bar{P}$  de  $m'_\kappa$  et  $m_\kappa$ . Or, par hypothèse, ces triplets de Hitchin sont  $\xi$ -stables. On a donc, d'une part,

$$\xi \in -\text{deg}(m'_{P,\kappa}) - {}^+ \mathfrak{a}_P + \mathfrak{a}_T^M$$

(rappelons que  $\mathfrak{a}_G = \{0\}$  puisque  $G$  est semi-simple) d'où (cf. la remarque qui suit le lemme 9.4.2)

$$\mu(\xi) < -\mu(\text{deg}(m'_{P,\kappa})) = -\text{deg}(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa}))$$

et d'autre part

$$\xi \in -\text{deg}(m_{\bar{P},\kappa}) - {}^+ \mathfrak{a}_{G\bar{P}} + \mathfrak{a}_T^M$$

ce qui implique l'inégalité

$$-\mu(\xi) < \mu(\text{deg}(m_{\bar{P},\kappa})) = \text{deg}(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa})).$$

On a donc

$$\text{deg}(\mu(\mathcal{E}'_{P,\kappa})) < -\mu(\xi) < \text{deg}(\mu(\mathcal{E}_{\bar{P},\kappa}))$$

ce qui contredit l'inégalité (9.4.7) du lemme 9.4.2. C'était la contradiction recherchée au début de ce paragraphe.

## 10. $\mathcal{M}^\xi$ est un champ de Deligne–Mumford

### 10.1 Énoncé

L'objet de cette section est de prouver le théorème suivant.

**THÉORÈME 10.1.1.** *Pour tout groupe semi-simple  $G$  et tout paramètre  $\xi$  en position générale (cf. définition 6.1.3), le champ  $\mathcal{M}_G^\xi$  est un champ de Deligne–Mumford.*

La démonstration se trouve au paragraphe suivant.

### 10.2 Démonstration

On fixe un groupe semi-simple  $G$  et un paramètre  $\xi$  en position générale. Soit  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}^\xi(k)$  et  $\text{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta)$  le sous-schéma en groupes de  $\text{Aut}_G(\mathcal{E})$  qui centralise  $\theta$ . Le foncteur qui, à un  $k$ -schéma  $S$ , associe le groupe des sections sur  $C \times_k S$  du schéma en groupes  $\text{Aut}_G(\mathcal{E}, \theta) \times_k S$  est représenté par un schéma en groupes sur  $k$ . Il s'agit de voir que ce groupe est non ramifié, ou encore, par un critère différentiel, que son espace tangent sur  $k$  est trivial. Or cet espace tangent admet la description suivante : c'est l'espace des sections  $\varphi \in H^0(C, \text{Ad}(\mathcal{E}))$  qui commutent à  $\theta$  c'est-à-dire telles que le crochet  $[\theta, \varphi]$  est nul. La nullité de l'espace tangent résulte donc de la proposition suivante.

**PROPOSITION 10.2.1.** *Pour toute section  $\varphi \in H^0(C, \text{Ad}(\mathcal{E}))$  telle que  $[\theta, \varphi] = 0$  on a*

$$\varphi = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  comme ci-dessus. Notons que, par le lemme évident ci-dessous, la caractéristique de  $\varphi$  est constante.

**LEMME 10.2.2.** *L'espace des sections  $H^0(C, \text{car}_G)$  s'identifie à  $\text{car}_G(k)$ .*

Soit  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $f(\mathcal{E}, \theta, t) \in \chi_G^M(\mathcal{A}_{M,\text{ell}}(k))$  et  $F$  le corps de fonctions de la courbe  $C$ .

**LEMME 10.2.3.** *Il existe une trivialisations générique de  $\mathcal{E}$  qui vérifie les deux assertions suivantes :*

- (1) l'identification de  $\text{Ad}_D(\mathcal{E})$  avec  $\mathfrak{g}(F)$  qui en résulte envoie  $\theta$  sur un élément  $X \in \mathfrak{m}(F)$  qui est semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique dans  $M$  et qui vérifie l'assertion (1) de la définition 7.6.1 ;
- (2) l'identification de  $\text{Ad}(\mathcal{E})$  avec  $\mathfrak{g}(F)$  qui en résulte envoie  $\varphi$  sur un élément  $Y \in \mathfrak{t}(k)$ .

*Démonstration.* On a vu dans la preuve de la proposition 7.6.3 qu'il existe une trivialisatoin générique de  $\mathcal{E}$  qui vérifie l'assertion (1). Dans l'identification de  $\text{Ad}(\mathcal{E})$  avec  $\mathfrak{g}(F)$ , la section  $\varphi$  s'envoie sur un élément de  $\mathfrak{g}(F)$  noté  $Z$ . Comme  $Z$  commute à  $X$  et que le centralisateur de  $X$  dans  $\mathfrak{g}$  est inclus dans  $\mathfrak{m}$ , on en déduit que  $Z$  appartient à  $\mathfrak{m}(F)$ . La caractéristique  $\chi_M(Z) \in \text{car}_M(F)$  s'envoie par  $\chi_G^M$  sur la caractéristique de  $\varphi$  qui par le lemme précédent est un élément de  $\text{car}_G(k)$ . Il s'ensuit que  $\chi_M(Z)$  appartient à  $\text{car}_M(k)$  et qu'on peut trouver un élément  $Y \in \mathfrak{t}(k)$  tel que  $\chi_M(Y) = \chi_M(Z)$ . Le lemme 3.8.1 montre que  $Y$  et  $Z$  sont conjugués par un élément de  $M(F)$ . Le lemme est alors évident.  $\square$

On fixe désormais une trivialisatoin générique de  $\mathcal{E}$  qui vérifie le lemme 10.2.3. Soit  $X \in \mathfrak{m}(F)$  et  $Y \in \mathfrak{t}(k)$  les éléments qui s'en déduisent. Soit  $L$  le centralisateur de  $Y$  dans  $G$ . On vérifie que  $L$  est un élément de  $\mathcal{L}^G(T)$  qui contient  $M$ . Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de Levi  $L$ . On notera le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 10.2.4. *Le morphisme  $N_Q \rightarrow \mathfrak{n}_Q$  donné par  $n \mapsto \text{Ad}(n^{-1})Y - Y$  est un isomorphisme.*

Soit  $V$  l'ensemble des points fermés de  $C$ . On reprend les notations de la section 7. On déduit de la trivialisatoin générique du torseur  $\mathcal{E}$  et de l'existence d'une trivialisatoin sur un voisinage formel de tout point  $v \in V$  une famille  $(g_v)_{v \in V}$  telle que :

- (1)  $g_v \in G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$  est trivial sauf pour un nombre fini de  $v$  ;
- (2)  $\text{Ad}(g_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}[[z_v]](k)$  ;
- (3) la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_M^G$  appartient à la projection sur  $\mathfrak{a}_M^G$  de l'enveloppe convexe des points

$$-H_P((g_v)_{v \in V}) = - \sum_{v \in V} H_P(g_v).$$

La condition (2) traduit le fait que  $\varphi$  est une section globale de  $\text{Ad}(\mathcal{E})$  et la condition (3) la  $\xi$ -stabilité du triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  (cf. condition (d) de la définition 7.6.1).

LEMME 10.2.5. *Pour tout  $v \in V$ , la classe  $g_v$  se relève en un élément de  $L((z_v))(k)$ .*

*Démonstration.* Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de Levi  $L$ . Par la décomposition d'Iwasawa, l'élément  $g_v$  se relève en un élément  $l_v n_v$  avec  $l_v \in L((z_v))(k)$  et  $n_v \in N_Q((z_v))(k)$ . Le fait que  $L$  centralise  $Y$  et la relation (1) ci-dessus entraînent alors qu'on a

$$\text{Ad}(n_v^{-1})Y \in \mathfrak{g}[[z_v]](k)$$

d'où

$$\text{Ad}(n_v^{-1})Y - Y \in \mathfrak{n}_Q[[z_v]](k).$$

Par le lemme 10.2.4, on a alors  $n_v \in N_Q[[z_v]](k)$ . D'où le lemme.  $\square$

Le lemme précédent implique que le triplet  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  possède une «réduction» au sous-groupe de Levi  $L$ . Il implique aussi que la projection sur  $\mathfrak{a}_L^G$  de l'enveloppe convexe de  $\mathfrak{z}$  ci-dessus est réduite à un point qui est nécessairement un point du réseau  $X_*(L)$  défini au § 5.1. La  $\xi$ -stabilité

entraîne que la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_L^G$  appartient à ce réseau. Si  $L \neq G$ , cela contredit le fait que  $\xi$  soit en position générale. On a donc  $L = G$  et  $Y = 0$  d'où  $\varphi = 0$ .  $\square$

### 11. Comptage des points rationnels dans une fibre

#### 11.1 Le théorème principal

Voici la situation qui va nous occuper jusqu'à la fin de cette section. Rappelons qu'on a fixé en § 3.2 une courbe  $C$  sur  $k$  ainsi qu'un diviseur  $D$  et un point  $\infty \in C(k)$ . On suppose que  $C$  provient par changement de base d'une courbe  $C_0$  sur  $\mathbb{F}_q$ . Soit  $\tau$  l'automorphisme de Frobenius de  $k$  donné par  $x \mapsto x^q$ . On note encore  $\tau$  l'automorphisme  $1 \times \tau$  de  $C = C_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$ . On suppose que  $D$  et  $\infty$  sont fixes sous  $\tau$ .

Soit  $F$  le corps des fonctions de  $C$ . L'automorphisme  $\tau$  de  $C$  induit un automorphisme de  $F$  encore noté  $\tau$  dont l'ensemble des points fixes est précisément le corps  $F_0$  de la courbe  $C_0$ . Soit  $V$ , respectivement  $V_0$ , l'ensemble des points fermés de  $C$ , respectivement  $C_0$ . Pour tout  $v_0 \in V_0$ , soit  $F_{0,v_0}$  le complété de  $F_0$  en  $v_0$  ; on note simplement  $\tau$  l'automorphisme  $\tau \otimes 1$  de

$$F \hat{\otimes}_{F_0} F_{0,v_0} = \prod_{v \in V, v|v_0} F_v$$

où  $F_v$  est le complété de  $F$  en  $v$ . On identifie  $F_v$  à  $k((z_v))$  et  $F_{0,v_0}$  à  $\mathbb{F}_q((z_{v_0}))$  par le choix d'uniformisantes. Soit  $\mathbb{A}$  l'anneau des adèles de  $F$ . Cet anneau est naturellement muni d'une action de  $\tau$  pour laquelle le sous-anneau des points fixes sous  $\tau$  s'identifie à l'anneau  $\mathbb{A}_0$  des adèles de  $F_0$ .

On suppose que le groupe  $G$  est *semi-simple* et que le couple  $(G, T)$  (cf. § 2) provient d'un couple analogue  $(G_0, T_0)$  défini sur  $\mathbb{F}_q$  tel que le tore  $T_0$  soit déployé sur  $\mathbb{F}_q$ . Dans ce cas, tous les sous-groupes de Levi ou paraboliques de  $G$  qui contiennent  $T$  proviennent d'objets analogues définis sur  $\mathbb{F}_q$  relatifs à  $(G_0, T_0)$ . On note encore  $\tau$  l'automorphisme de  $G = G_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$  donnée par  $1 \times \tau$ . On en déduit un automorphisme toujours noté  $\tau$  des groupes de points de  $G$  à valeurs dans  $F$ ,  $\mathbb{A}$  ou  $F \otimes_{F_0} F_{0,v_0}$  pour tout  $v_0 \in V_0$ .

Comme le diviseur  $D$  sur  $C$  est fixe par  $\tau$ , il se descend en un diviseur  $D_0$  sur  $C_0$  de la forme

$$\sum_{v \in V_0} d_v v.$$

Soit  $\mathbf{1}_{D_0}$  la fonction sur  $\mathfrak{g}(\mathbb{A}_0)$  qui est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\prod_{v \in V_0} z_v^{-d_v} \mathfrak{g}[[z_v]](\mathbb{F}_q).$$

Pour alléger un peu les notations, on pose

$$K = \prod_{v \in V_0} G[[z_v]](\mathbb{F}_q),$$

c'est un sous-groupe ouvert et compact de  $G(\mathbb{A}_0)$ . De plus, la fonction  $\mathbf{1}_{D_0}$  est invariante sous l'action adjointe de  $K$ .

Pour tout  $\delta \in M(F)$ , soit  $M^\delta(F_0) \subset M(F)$ , respectivement  $\mathfrak{m}^\delta(F_0) \subset \mathfrak{m}(F)$ , le sous-groupe des points fixes sous  $\text{Int}(\delta) \circ \tau$ , respectivement la sous-algèbre de Lie des points fixes sous  $\text{Ad}(\delta) \circ \tau$ .

L'automorphisme de Frobenius  $\tau$  agit également sur les espaces  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_M$  pour tout  $M \in \mathcal{L}$ . Soit  $(a, t) \in \mathcal{A}(k)$  un élément fixe par  $\tau$ . Il existe  $M \in \mathcal{L}$  et  $(a_M, t) \in \mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k)$  tels que

$$(a, t) = \chi_G^M((a_M, t)).$$

D'après les propositions 3.5.1 et 3.6.2, de tels éléments existent et sont uniques : en particulier ils sont fixes sous  $\tau$ .

Voici le principal théorème de cette section. Il exprime le nombre de points rationnels d'une fibre de  $\overline{f^\xi}$  en termes d'intégrales orbitales pondérées d'Arthur.

**THÉORÈME 11.1.1.** *Soit  $\xi$  en position générale. Soit  $M \in \mathcal{L}$  un sous-groupe de Levi,  $(a_M, t) \in \mathcal{A}_{M, \text{ell}}(k)$  fixe par  $\tau$  et  $(a, t) = \chi_G^M((a_M, t))$ . Le cardinal du groupoïde des points rationnels de la fibre de  $\overline{f^\xi}$  en  $(a, t)$  est égal à*

$$\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))^{-1} \cdot \text{vol}(a, t) \cdot \sum_h \sum_X J_M^G(\text{Ad}(h^{-1})X, \mathbf{1}_{D_0})$$

où :

- $h$  parcourt l'ensemble des doubles classes

$$h \in M(F) \backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{A}_0)$$

qui vérifient

$$\delta = h\tau(h)^{-1} \in M(F) ;$$

- $X$  parcourt un système de représentants de l'ensemble des classes de  $M^\delta(F_0)$ -conjugaison dans l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0) \mid \chi_M(X) = a_{M|_{\text{Spec}(F_0)}}\}$$

des  $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$  dont la caractéristique  $\chi_M(X)$  est égale à la restriction de  $a_M$  à  $\text{Spec}(F_0)$  ;

- $J_M^G(\text{Ad}(h^{-1})X, \mathbf{1}_{D_0})$  est l'intégrale orbitale pondérée d'Arthur définie en (11.11.1) ;
- le volume  $\text{vol}(a, t)$  est défini au § 11.5 l.(11.5.3).

*Remarques.* Les intégrales orbitales pondérées considérées ci-dessus dépendent de choix de mesures de Haar sur  $\mathfrak{a}_M$  (cf. § 11.11) et sur certains tores (cf. § 11.5). Comme ces choix interviennent aussi dans les facteurs  $\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))$  et  $\text{vol}(a, t)$ , la somme qui apparaît dans le théorème 11.1.1 ne dépend d'aucun choix.

Le cardinal d'une fibre de Hitchin  $\xi$ -stable ne dépend pas du choix de  $\xi$  générique. Comme l'un des rapporteurs de cet article le note, il serait intéressant de disposer d'une explication de nature géométrique. Il est clair que la notion de  $\xi$ -stabilité ne dépend que de la composante connexe de  $\xi$  dans l'ouvert «générique». Ngô a construit une action d'un champ de Picard sur une fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  (cf. [Ngo06]). Via un morphisme de degré, ce champ agit aussi sur  $\mathfrak{a}_T$  de sorte que si l'action envoie  $\xi$  sur  $\xi'$ , le tronqué  $\mathcal{M}_a^\xi$  est envoyé sur  $\mathcal{M}_a^{\xi'}$ . Cependant l'action de ce champ n'est en général pas transitive sur l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert générique. Il faudrait analyser ce qui passe lorsqu'on «franchit un mur» (c'est probablement relié aux travaux [DH98] et [Tha96]).

Lorsque l'ensemble de cohomologie  $H^1(\text{Gal}(F_0^{\text{sep}}/F_0), G(F_0^{\text{sep}}))$  est trivial (où  $F_0^{\text{sep}}$  est une clôture séparable de  $F_0$ ), par exemple lorsque le groupe  $G$  est semi-simple simplement connexe, on peut montrer que l'ensemble des doubles classes  $h$  est réduit à un élément. En particulier, le théorème 11.1.1 donne bien le théorème 1.4.1 de l'introduction. La démonstration du théorème 11.1.1 repose sur la description adélique d'une fibre de Hitchin dont on prend les

points «fixes par Frobenius». Lorsque le  $H^1$  précédent est trivial, les triplets de Hitchin sur la courbe  $C_0$  sont génériquement triviaux et, pour le comptage, on pourrait tout autant utiliser une description adélique des triplets de Hitchin sur  $C_0$ .

Avant d’entamer la démonstration du théorème 11.1.1 qui va nous occuper jusqu’à la fin de cette section, nous allons donner quelques rappels sur le cardinal d’un groupoïde quotient et sur ses points fixes sous un automorphisme.

### 11.2 Points fixes sous un automorphisme

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble et  $G$  un groupe abstrait qui agit à gauche sur  $\mathcal{X}$ . Soit  $\tau$  un automorphisme de  $G$ . Soit une bijection de  $\mathcal{X}$ , encore notée  $\tau$ , compatible à l’automorphisme de  $G$  au sens où l’on a

$$\tau(g \cdot x) = \tau(g) \cdot \tau(x).$$

Par définition, le groupoïde des points fixes sous  $\tau$  de  $[G \setminus \mathcal{X}]$  est le groupoïde  $[G \setminus \mathcal{X}^\tau]$  où :

–  $\mathcal{X}^\tau$  est l’ensemble des couples  $(x, g) \in \mathcal{X} \times G$  tels que

$$g \cdot \tau(x) = x ;$$

–  $G$  agit à gauche sur  $\mathcal{X}^\tau$  par

$$h \cdot (x, g) = (hx, hg\tau(h)^{-1}).$$

### 11.3 Cardinal d’un groupoïde

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble et  $G$  un groupe abstrait qui agit à gauche sur  $\mathcal{X}$ . On suppose que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , le stabilisateur  $\text{stab}_G(x)$  de  $x$  dans  $G$  est fini. On suppose aussi que l’ensemble  $G \setminus \mathcal{X}$  des orbites de  $\mathcal{X}$  sous  $G$  est fini. Le cardinal du groupoïde quotient  $[G \setminus \mathcal{X}]$  (cf. (1) (7.6.1) du § 7.6) est par définition

$$\text{card}([G \setminus \mathcal{X}]) = \sum_{x \in G \setminus \mathcal{X}} \frac{1}{|\text{stab}_G(x)|}.$$

### 11.4 Première étape

Dans la suite, on fixe  $M \in \mathcal{L}$  et des couples  $(a_M, t)$  et  $(a, t)$  comme dans l’énoncé du théorème 11.1.1. Soit  $\xi \in \mathfrak{a}_T$  un élément *quelconque*. La fibre du morphisme de Hitchin  $\overline{f}^\xi$  au-dessus de  $(a, t)$  s’identifie par la proposition 7.6.3 au groupoïde quotient  $[M(F) \setminus \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$  où l’ensemble  $\mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$  est celui de la définition 7.6.1 du paragraphe 7.6. Nos hypothèses entraînent que  $\tau$  induit une bijection de cet ensemble compatible à l’action de  $\tau$  sur  $M(F)$  (au sens du § 11.2). On cherche une expression pour le nombre de points sur  $\mathbb{F}_q$  de cette fibre, c’est-à-dire le cardinal du groupoïde des points fixes sous  $\tau$  de  $[M(F) \setminus \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi]$ , en termes d’intégrales orbitales pondérées. Comme le morphisme de Hitchin  $\overline{f}^\xi$  est de type fini (cf. proposition 6.1.5), les hypothèses de finitude requises (cf. § 11.3) sont bien vérifiées.

Suivant le paragraphe 11.2, on introduit l’ensemble  $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi, \tau}$  formé des triplets  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$  tels que  $(X, (g_v)_{v \in V}) \in \mathcal{X}_{(a,t)}^\xi$  et  $\delta \in M(F)$  vérifient les relations

$$\text{Ad}(\delta)\tau(X) = X \tag{11.4.1}$$

et

$$\delta\tau((g_v)_{v \in V}) = (g_v)_{v \in V}. \tag{11.4.2}$$

Le groupe  $M(F)$  agit sur les deux premiers facteurs par l'action décrite au § 7.6 et par  $\tau$ -conjugaison sur le deuxième facteur (c'est-à-dire un élément  $\gamma \in M(F)$  agit sur  $\delta \in M(F)$  par  $\gamma\delta\tau(\gamma)^{-1}$ ). La première étape du comptage consiste à décrire un système de représentants des orbites de  $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$  sous l'action de  $M(F)$ . Pour cela, on introduit quelques notations supplémentaires.

Pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , soit  $\mathbf{1}_{M,g}$  la fonction sur  $\mathfrak{a}_M$  caractéristique de l'enveloppe convexe des points  $-H_P(g)$  pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ . La définition 7.5.1 du § 7.5, appliquée au groupe  $M$  et à son sous-groupe parabolique  $P = M$ , donne un morphisme

$$H_M : M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_M.$$

Soit  $\xi_M$  la projection de  $\xi$  sur  $\mathfrak{a}_M$  suivant la décomposition  $\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{a}_T^M$ .

LEMME 11.4.1. *Considérons les ensembles suivants :*

- (1) un système de représentants dans  $M(\mathbb{A})$  de l'ensemble des doubles classes

$$h \in M(F) \backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{A}_0)$$

qui vérifient

$$h\tau(h)^{-1} \in M(F) ;$$

- (2) pour tout  $\delta \in M(F)$ , un système de représentants dans  $\mathfrak{m}^\delta(F_0)$  de l'ensemble des classes de  $M^\delta(F_0)$ -conjugaison dans l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0) \mid \chi_M(X) = a_{M|\text{Spec}(F_0)}\}$$

des  $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$  dont la caractéristique  $\chi_M(X)$  est égale à la restriction de  $a_M$  à  $\text{Spec}(F_0)$  ;

- (3) pour tous  $h \in M(\mathbb{A})$  et  $\delta \in M(F)$  tels que  $\delta = h\tau(h)^{-1}$  et tout  $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$  semi-simple  $G$ -régulier, un système de représentants dans  $G(\mathbb{A}_0)$  de l'ensemble des doubles classes

$$\text{Int}(h^{-1})T_X(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)/K,$$

où  $T_X(F_0)$  est le centralisateur de  $X$  dans  $M^\delta(F_0)$ , qui vérifient les deux conditions :

- (a)  $\mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1}) \text{Ad}(h^{-1})X) = 1$  ;
- (b)  $\mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)) = 1$ .

L'application

$$(X, g, h) \mapsto (X, hgG(\mathcal{O}), h\tau(h)^{-1})$$

de l'ensemble formé des triplets  $(X, g, h)$  tels que  $h, X$  et  $g$  appartiennent aux ensembles décrits respectivement en (1), (2) et (3) (pour  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ ) vers  $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$  est injective et son image est un système de représentants de l'ensemble des classes  $M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$ .

De plus, le cardinal du stabilisateur dans  $M(F)$  de l'image de  $(X, g, h)$  est donné par le cardinal de l'ensemble fini

$$(\text{Int}(h^{-1})T_X(F_0)) \cap gKg^{-1}.$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que l'application en question induit une application bijective sur le quotient  $M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$ . Montrons tout d'abord la surjectivité. Partons d'un triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$  dans  $\mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}$ . Rappelons que  $g_v$  désigne une classe dans  $G((z_v))(k)/G[[z_v]](k)$ .

Soit un élément  $g \in G(\mathbb{A})$  tel que pour tout  $v$  la composante en  $v$  relève  $g_v$ . Par la relation (11.4.2) ci-dessus, on a

$$g^{-1}\delta\tau(g) \in \prod_{v \in V} G[[z_v]](k).$$

Par le théorème de Lang (appliqué aux quotients (connexes) du  $k$ -groupe pro-algébrique  $G[[z_v]]$ ), on sait qu'un tel élément s'écrit  $x\tau(x^{-1})$  pour un certain  $x \in \prod_{v \in V} G[[z_v]](k)$ . Quitte à remplacer  $g$  par  $gx$ , on peut et on va supposer qu'on a

$$g^{-1}\delta\tau(g) = 1 \tag{11.4.3}$$

autrement dit la classe de  $\tau$ -conjugaison de  $\delta$  dans  $G(\mathbb{A})$  est triviale. Cela implique que la classe de  $\tau$ -conjugaison de  $\delta$  dans  $M(\mathbb{A})$  est triviale (nous n'avons pas trouvé de référence : on donnera un argument dans l'article suivant). Il existe donc  $h \in M(\mathbb{A})$  tel que

$$\delta = h\tau(h)^{-1}.$$

Quitte à faire agir  $M(F)$  sur le triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ , on peut supposer que  $h$  appartient à l'ensemble décrit en (1).

D'après la relation (11.4.1), l'élément  $X$  appartient à  $\mathfrak{m}^\delta(F_0)$ . Soit  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](k)$  l'unique relèvement de  $t$  dont la caractéristique est  $a$ . De même, on peut définir un point  $t_{a_M}$  associé au couple  $(a_M, t)$ . Mais par unicité de  $t_a$ , on a  $t_a = t_{a_M}$ . Ainsi la caractéristique  $\chi_M(t_a)$  est  $a_M$ . La condition (1)(bis) de la définition 7.6.2 entraîne que  $X$  est conjugué à  $t_a$  par un élément de  $M((z_\infty))(k)$  d'où

$$\chi_M(X) = \chi_M(t_a) = a_M.$$

Quitte à faire agir  $M^\delta(F_0)$  sur le triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ , ce qui ne change pas  $\delta$  ni la condition (11.4.3), on peut supposer que  $X$  appartient à l'ensemble décrit en (2).

Posons  $g_0 = h^{-1}g$ . Alors la relation (11.4.3) se traduit par

$$g_0 \in G(\mathbb{A}_0).$$

Quitte à faire agir  $T_X(F_0)$  (qui est inclus dans  $M^\delta(F_0)$ ) sur le triplet  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta)$ , on peut supposer de plus que  $g_0$  appartient à l'ensemble décrit en (3). Les conditions (2)(b) et (2)(d) des définitions 7.6.1 et 7.6.2 se traduisent par les condition (3)(a) et (b) ci-dessus. On a donc prouvé la surjectivité voulue. On laisse le soin au lecteur de vérifier l'injectivité.

Le centralisateur de  $(X, (g_v)_{v \in V}, \delta) = (X, hgG(\mathcal{O}), h\tau(h)^{-1})$  dans  $M(F)$  est le groupe

$$\begin{aligned} \{t \in T_X(F_0) \mid (tg_v)_{v \in V} = (g_v)_{v \in V}\} &= T_X(F_0) \cap \prod_{v \in V} g_v G[[z_v]](k) g_v^{-1} \\ &\simeq (\text{Int}(h^{-1})T_X(F_0)) \cap gKg^{-1} \end{aligned}$$

ce qui donne la dernière assertion. □

### 11.5 Mesures de Haar

On munit  $G(\mathbb{A}_0)$  de la mesure de Haar normalisée par

$$\text{vol}(K) = 1.$$

Plus généralement pour tout sous-groupe parabolique semi-standard  $P$  de  $G$ , les groupes  $M_P(\mathbb{A}_0)$  et  $N_P(\mathbb{A}_0)$  sont munis des mesures de Haar normalisées par

$$\text{vol}(M_P(\mathbb{A}_0) \cap K) = 1 \quad \text{et} \quad \text{vol}(N_P(\mathbb{A}_0) \cap K) = 1.$$

Soit  $X_0 \in \mathfrak{m}(F_0)$  dont la caractéristique est égale à la restriction de  $a_M$  à  $\text{Spec}(F_0)$ . Un tel  $X_0$  existe par la section de Kostant relative à  $M$ . On munit  $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$  d'une mesure de Haar. Soit

$$T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1 = T_{X_0}(\mathbb{A}_0) \cap \text{Ker}(H_M) ;$$

c'est un sous-groupe ouvert de  $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$  qu'on munit de la mesure induite. On munit  $T_{X_0}(F_0)$  de la mesure de comptage et  $T_{X_0}(F_0) \setminus T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1$  de la mesure quotient.

LEMME 11.5.1. *Le volume du quotient ci-dessous est fini*

$$\text{vol}(T_{X_0}(F_0) \setminus T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1) < \infty. \tag{11.5.1}$$

*Démonstration.* D'après le corollaire 3.9.2, il existe un élément  $X \in \mathfrak{m}(F)$ , semi-simple,  $G$ -régulier et elliptique dans  $\mathfrak{m}(F)$ . D'après le lemme 3.8.1,  $X$  et  $X_0$  sont conjugués sous  $M(F)$ . On en déduit que le plus grand sous-tore  $F_0$ -déployé de  $T_{X_0}$  est inclus dans le centre connexe de  $M \times F_0$  (et en fait égal). Ainsi, le  $T_{X_0}$  est  $F_0$ -elliptique dans  $M$  et l'on sait bien que le quotient  $T_{X_0}(F_0) \setminus T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1$  est alors compact (cf. par exemple [Spr79], théorème 4.11) d'où la finitude du volume.  $\square$

Soit  $\delta \in M(F)$  et  $h \in M(\mathbb{A})$  tels que  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ . Soit  $X \in \mathfrak{m}^\delta(F_0)$  de caractéristique  $a_M$ . La condition sur la caractéristique entraîne qu'il existe  $m \in M(F)$  tel que  $X = \text{Ad}(m^{-1})X_0$  (cf. lemme 3.8.1). Soit

$$Y = \text{Ad}(h^{-1})X = \text{Ad}((hm)^{-1})X_0.$$

On remarque que  $Y \in \mathfrak{m}(\mathbb{A}_0)$ . Soit  $T_Y(\mathbb{A}_0)$  le centralisateur de  $Y$  dans  $M(\mathbb{A}_0)$ . L'automorphisme  $\text{Int}(hm)^{-1}$  induit un isomorphisme de  $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$  sur  $T_Y(\mathbb{A}_0)$ . On munit ce dernier de la mesure de Haar obtenue par transport par cet automorphisme. Posons un peu abusivement

$$T_Y(F_0) = \text{Int}(hm)^{-1}T_{X_0}(F_0).$$

Ce groupe est discret et on a, par nos choix de mesures,

$$\text{vol}(T_Y(F_0) \setminus T_Y(\mathbb{A}_0)^1) = \text{vol}(T_{X_0}(F_0) \setminus T_{X_0}(\mathbb{A}_0)^1), \tag{11.5.2}$$

où l'on pose  $T_Y(\mathbb{A}_0)^1 = T_Y(\mathbb{A}_0) \cap \text{Ker}(H_M)$ . On note

$$\text{vol}(a, t) \tag{11.5.3}$$

le volume ci-dessus.

### 11.6 Réseaux dans $\mathfrak{a}_M$

Soit  $G_{sc}$  le revêtement simplement connexe de  $G$ . Soit  $L \in \mathcal{L}^G(T)$  un sous-groupe de Levi semi-standard. Soit  $L_{sc}$  l'image réciproque de  $L$  dans  $G_{sc}$ . Soit  $L_{der}$  le groupe dérivé de  $L$  et  $L_{SC}$  le revêtement simplement connexe de  $L_{der}$ . On ne confondra pas  $L_{sc}$  et  $L_{SC}$ . Le groupe  $L_{SC}$  est en fait le groupe dérivé de  $L_{sc}$ . On note encore  $T_?$  le tore obtenu par image réciproque de  $T$  dans? où? peut être l'un des trois groupes  $L_{der}$ ,  $L_{SC}$  ou  $L_{sc}$ . Soit

$$\pi_1(L_{der}) = \text{coker}(X_*(T_{L_{SC}}) \rightarrow X_*(T_{L_{der}})).$$

Le morphisme de restriction  $X^*(L) \rightarrow X^*(T)$  et donne dualement un morphisme  $X_*(T) \rightarrow X_*(L)$  où l'on a posé  $X_*(L) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(L), \mathbb{Z})$ .



LEMME 11.6.1. *On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_*(T_{L_{sc}}) & \longrightarrow & X_*(T_{G_{sc}}) & \longrightarrow & X_*(L_{sc}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_*(T_{L_{der}}) & \longrightarrow & X_*(T) & \longrightarrow & X_*(L) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1(L_{der}) & \longrightarrow & \pi_1(G) & \longrightarrow & X_*(L)/X_*(L_{sc}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

*Démonstration.* Traitons l'exactitude de la deuxième ligne. Il s'agit d'une suite de  $\mathbb{Z}$ -module libre dont la suite duale est la suite exacte

$$0 \longrightarrow X^*(L) \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow X^*(T_{L_{der}}) \longrightarrow 0.$$

Seule la surjectivité est moins évidente. Elle résulte des isomorphismes

$$T/T_{L_{der}} = Z_L^0 / (Z_L^0 \cap L_{der}) = L/L_{der},$$

où  $Z_L^0$  est le centre connexe de  $L$ , et de l'égalité  $X^*(L) = X^*(L_{der})$ .

L'exactitude de la première ligne se déduit de celle de la deuxième lorsqu'on remplace  $L$  par  $L_{sc}$ . L'injectivité des deux premières flèches verticales est bien connue. On rappelle que  $X_*(T_{G_{sc}})$  est le sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $X_*(T)$  engendré par les coracines de  $T$  dans  $G$ . Le reste du diagramme se déduit alors du lemme du serpent et de l'injectivité de

$$\pi_1(L_{der}) \longrightarrow \pi_1(G)$$

c'est-à-dire de l'inclusion

$$X_*(T_{L_{der}}) \cap X_*(T_{G_{sc}}) \subset X_*(T_{L_{sc}}).$$

Cette dernière est évidente car  $X_*(T_{L_{sc}})$  est d'indice fini dans  $X_*(T_{L_{der}})$  et d'autre part  $X_*(T_{L_{sc}})$  est facteur direct dans  $X_*(T_{G_{sc}})$ . □

Le lemme 11.6.1 montre que la projection  $\mathfrak{a}_T \rightarrow \mathfrak{a}_M$  envoie  $X_*(T)$  surjectivement sur  $X_*(M)$ . D'autre part, elle envoie le sous- $\mathbb{Z}$ -module  $X_*(T_{G_{sc}})$  surjectivement sur le sous- $\mathbb{Z}$ -module  $X_*(M_{sc})$  de  $X_*(M)$ .

### 11.7 Le poids $w_M^\xi$

Pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , on introduit le poids

$$w_M^\xi(g) = |\{\mu \in X_*(M) \mid \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + \mu) = 1\}|$$

qui est le nombre (fini) de points de l'ensemble  $\xi_M + X_*(M)$  qui appartiennent à l'enveloppe convexe des points  $-H_P(g)$  pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ .

LEMME 11.7.1. *La fonction poids  $g \in G(\mathbb{A}) \mapsto w_M^\xi(g)$  est invariante à gauche par  $M(\mathbb{A})$ .*

Soit  $h$  et  $X$  deux éléments respectivement des ensembles décrits en (1) et (2) du lemme 11.4.1 pour  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ . Soit  $Y = \text{Ad}(h)^{-1}X$ . On a une suite exacte (avec les notations du § 11.5)

$$1 \longrightarrow T_Y(\mathbb{A}_0)^1 \longrightarrow T_Y(\mathbb{A}_0) \xrightarrow{H_M} X_*(M) \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* L'action à gauche de  $h \in M(\mathbb{A})$  translate l'enveloppe convexe des points  $-H_P(g)$  par le vecteur  $H_M(h)$ . Comme ce dernier appartient à  $X_*(M)$ , cela ne change pas  $w_M^\xi(g)$ .

Dans la suite exacte, seule la surjectivité à droite n'est pas évidente. Soit  $X_0 \in \mathfrak{m}(F_0)$  de caractéristique  $a_M$ . Comme l'application  $H_M$  est invariante sous l'action adjointe de  $M(\mathbb{A})$  et qu'il existe un élément de  $M(\mathbb{A})$  qui conjugue  $Y$  et  $X_0$  d'une part et  $T_Y(\mathbb{A}_0)$  et  $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$  d'autre part (cf. § 11.5), on peut supposer qu'on a  $Y = X_0$ . En combinant le lemme 3.8.1 et la proposition 3.9.1, on montre que  $X_0$  et  $t_a$  sont conjugués par  $m \in M((z_\infty))(k)$  ( $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](k)$  est l'élément défini dans la proposition 3.9.1). On remarquera qu'on a même  $t_a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}[[z_\infty]](\mathbb{F}_q)$ . Il s'ensuit que l'automorphisme  $\text{Int}(m)$  induit alors un isomorphisme entre  $T_{X_0}(\mathbb{F}_q((z_\infty)))$  et  $T(\mathbb{F}_q((z_\infty)))$ . Comme l'application  $H_M$  restreinte à  $T(\mathbb{F}_q((z_\infty)))$  est surjective, il est de même de sa restriction à  $T_{X_0}(\mathbb{F}_q((z_\infty)))$  et *a fortiori* à  $T_{X_0}(\mathbb{A}_0)$ .  $\square$

### 11.8 Intégrales orbitales pondérées $J_M^\xi$

Soit  $h$  et  $X$  deux éléments respectivement des ensembles décrits en (1) et (2) du lemme 11.4.1 pour  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ . Soit  $Y = \text{Ad}(h^{-1})X$ . On a muni au § 11.5 le centralisateur  $T_Y(\mathbb{A}_0)$  de  $Y$  dans  $G(\mathbb{A}_0)$  d'une mesure de Haar. On introduit alors l'intégrale orbitale pondérée suivante

$$J_M^\xi(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) w_M^\xi(g) dg. \tag{11.8.1}$$

On a muni  $T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)$  de la mesure quotient. L'intégrale converge car l'intégrande est à support compact. Pour alléger les notations, on omet la fonction  $\mathbf{1}_{D_0}$  et on pose

$$J_M^\xi(Y) = J_M^\xi(Y, \mathbf{1}_{D_0}).$$

*Remarque.* Cette intégrale orbitale pondérée n'est pas celle qu'Arthur utilise habituellement. Le lien avec celle d'Arthur se fera au § 11.14.

### 11.9 Un premier comptage

Voici une première expression pour le cardinal d'une fibre.

PROPOSITION 11.9.1. *On a l'égalité*

$$\text{card}([M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}]) = \text{vol}(a, t) \sum_h \sum_X J_M^\xi(\text{Ad}(h^{-1})X)$$

où  $h$  et  $X$  parcourent respectivement les ensembles décrits en (1) et (2) du lemme 11.4.1 pour  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ .

*Démonstration.* D'après la formule donnée au § 11.3 et le lemme 11.4.1, le cardinal du groupoïde  $[M(F) \backslash \mathcal{X}_{(a,t)}^{\xi,\tau}]$  s'écrit comme la somme sur les éléments  $h$  et  $X$  des ensembles respectivement décrits en (1) et (2) du lemme 11.4.1 (pour  $\delta = h\tau(h)^{-1}$ ) de

$$\sum_{g \in T_Y(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)/K} \frac{1}{|T_Y(F_0) \cap gKg^{-1}|} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)),$$

où l'on a posé  $Y = \text{Ad}(h^{-1})X$  et  $T_Y(F_0)$  est le groupe défini au § 11.5. D'après notre choix de mesure sur  $G(\mathbb{A}_0)$ , cette expression s'écrit encore

$$\int_{T_Y(F_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h)) dg,$$

où le centralisateur  $T_Y(\mathbb{A}_0)$  de  $Y$  dans  $G(\mathbb{A}_0)$  est muni de la mesure de Haar du § 11.5. Comme  $g \mapsto \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y)$  est invariante à droite par  $T_Y(\mathbb{A}_0)$ , l'expression précédente s'écrit

$$\int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) \int_{T_Y(F_0) \backslash T_Y(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{M,tg}(\xi_M + H_M(h)) dt \frac{dg}{dt}.$$

En utilisant l'égalité

$$\mathbf{1}_{M,tg}(\xi_M + H_M(h)) = \mathbf{1}_{M,g}(\xi_M + H_M(h) + H_M(t)),$$

nos choix de mesures et le lemme 11.7.1, on voit qu'on a

$$\int_{T_Y(F_0) \backslash T_Y(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{M,tg}(\xi_M + H_M(h)) dt = \text{vol}(T_Y(F_0) \backslash T_Y(\mathbb{A}_0)^1) \cdot w_M^\xi(g).$$

Le résultat s'en déduit. □

### 11.10 Une formule pour le poids $w_M^\xi$

Le but de cette section est de donner une formule analytique pour le poids  $w_M^\xi$ . Cela nous permettra ensuite de comparer ce poids à celui qu'Arthur considère dans ses travaux. Pour cela, on suit, à peu de choses près, Arthur (cf. [Art91, § 6]). On a introduit au § 11.6 le sous- $\mathbb{Z}$ -module  $X_*(M_{sc})$  de  $X_*(M)$ . Soit  $P \in \mathcal{P}(M)$ . L'ensemble  $\Delta_P^\vee$  défini au § 5.2 fournit une base de  $X_*(M_{sc})$ . Tout  $\lambda \in \mathfrak{a}_M$  s'écrit de manière unique

$$\lambda = [\lambda]_P + \{\lambda\}_P \tag{11.10.1}$$

avec  $[\lambda]_P \in X_*(M_{sc})$  et

$$\{\lambda\}_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} r_\alpha \alpha^\vee$$

avec  $0 < r_\alpha \leq 1$ .

Pour tout  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ , soit

$$c_P(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P} (\exp(\Lambda(\alpha^\vee)) - 1).$$

Lorsque  $M = G$ , ce produit vaut 1 (par convention tout produit sur l'ensemble vide vaut 1). Dans la suite, on dit que  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$  est *générique* si  $c_P(\Lambda) \neq 0$  pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$  c'est-à-dire  $\Lambda(\alpha^\vee) \neq 0$  pour tous  $P \in \mathcal{P}(M)$  et  $\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee$ .

PROPOSITION 11.10.1. *Pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , on a l'égalité suivante*

$$w_M^\xi(g) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} c_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g) + [\mu_0 + \xi_M]_P))$$

où la limite est prise sur les  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$  génériques.

*Remarque.* Dans la limite, la somme intérieure dépend du choix d'un système de représentants de  $X_*(M)/X_*(M_{sc})$ . Changer  $\mu_0$  en  $\mu_0 + \mu$  avec  $\mu \in X_*(M_{sc})$  multiplie la somme intérieure par  $\exp(-\Lambda(\mu))$ . Cela n'affecte donc pas la limite en  $\Lambda = 0$ .

*Démonstration.* Elle repose entièrement sur les méthodes d'Arthur. Donnons quelques indications pour la commodité du lecteur. Soit  $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$  la base de  $\mathfrak{a}_M^*$  duale de  $\Delta_P^\vee$ . Pour tout  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$  générique (au sens défini ci-dessus) et tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ , soit

$$\Delta_P^\Lambda = \{\alpha \in \Delta_P \mid \Lambda(\alpha^\vee) < 0\}$$

et  $\varphi_P^\Lambda$  la fonction caractéristique des  $\lambda \in \mathfrak{a}_M$  tels que  $\varpi_\alpha(\lambda) > 0$  pour tout  $\alpha \in \Delta_P^\Lambda$  et  $\varpi_\alpha(\lambda) \leq 0$  pour  $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^\Lambda$ . Soit  $g \in G(\mathbb{A})$ . D'après un lemme dû à Langlands (cf. [Art91], formule (3.8), p. 22), la fonction caractéristique de l'enveloppe convexe des points  $-H_P(g)$  est égale à la fonction

$$\mu \mapsto \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \varphi_P^\Lambda(\mu + H_P(g))$$

de la variable  $\mu \in \mathfrak{a}_M$ . Cette formule vaut dans notre contexte car la famille  $(-H_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$  est orthogonale positive au sens d'Arthur (cf. [Art91, pp. 19–20]). Il s'ensuit qu'on a

$$w_M^\xi(g) = \sum_{\mu \in X_*(M)} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} \varphi_P^\Lambda(\mu + \xi_M + H_P(g)).$$

À la suite d'Arthur (cf. [Art91, §6]), on introduit la série de Fourier pour  $P \in \mathcal{P}(M)$

$$S_P(\Lambda) = \sum_{\mu \in X_*(M)} \varphi_P^\Lambda(\mu + \xi_M + H_P(g)) \exp(\Lambda(\mu)).$$

Cette série est absolument convergente sur le complémentaire dans  $\mathfrak{a}_M^*$  des hyperplans d'équation  $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$  pour  $\alpha \in \Delta_P$ . Sa somme est une fonction continue sur cet ouvert. De plus, la somme alternée

$$\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^\Lambda|} S_P(\Lambda)$$

a pour limite en  $\Lambda = 0$  (où la limite est prise sur les  $\Lambda$  génériques) le poids  $w_M^\xi(g)$ .

Pour terminer, il nous reste à calculer la somme de la série  $S_P(\Lambda)$ . Comme  $H_P(g) \in X_*(M)$ , on a par un changement de variable évident

$$S_P(\Lambda) = \sum_{\mu \in X_*(M)} \varphi_P^\Lambda(\mu + \xi_M) \exp(\Lambda(\mu - H_P(g))).$$

Dans la somme ci-dessus, il est plus commode de sommer d'abord sur  $X_*(M_{sc})$  et ensuite sur un système de représentants de  $X_*(M)/X_*(M_{sc})$ . Soit  $\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{sc})$ . La contribution de  $\mu_0$  à  $S_P(\Lambda)$  est

$$\sum_{\mu \in X_*(M_{sc})} \varphi_P^\Lambda(\mu + \mu_0 + \xi_M) \exp(\Lambda(\mu + \mu_0 - H_P(g))).$$

Par un changement de variable et l'utilisation de la décomposition

$$\mu_0 + \xi_M = [\mu_0 + \xi_M]_P + \{\mu_0 + \xi_M\}_P,$$

on voit que la somme ci-dessus est égale à

$$\exp(\Lambda(\mu_0 - [\mu_0 + \xi_M]_P - H_P(g))) \sum_{\mu \in X_*(M_{sc})} \varphi_P^\Lambda(\mu + \{\mu_0 + \xi_M\}_P) \exp(\Lambda(\mu)).$$

Comme on a  $\{\mu_0 + \xi_M\}_P = \sum_{\alpha \in \Delta_P} r_\alpha \alpha^\vee$  avec  $0 < r_\alpha \leq 1$  et que  $\Delta_P^\vee$  est une base de  $X_*(M_{sc})$ , la somme ci-dessus est égale à

$$\sum_{(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}} \exp\left(\Lambda\left(\sum_{\alpha \in \Delta_P} m_\alpha \alpha^\vee\right)\right)$$

où l'on somme sur les familles d'entiers  $(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}$  qui vérifient  $m_\alpha \geq 0$  pour  $\alpha \in \Delta_P^+$  et  $m_\alpha \leq -1$  pour  $\alpha \in \Delta_P - \Delta_P^+$ . Ces séries géométriques ont pour somme

$$\sum_{(m_\alpha)_{\alpha \in \Delta_P}} \exp\left(\Lambda\left(\sum_{\alpha \in \Delta_P} m_\alpha \alpha^\vee\right)\right) = (-1)^{|\Delta_P^+|} c_P(\Lambda)^{-1}.$$

Le résultat annoncé s'en déduit. □

### 11.11 Poids et intégrales orbitales pondérées d'Arthur

Comme au § 6.3, on munit  $\mathfrak{a}_T$  d'un produit scalaire invariant par  $W$ . Pour tout  $L \in \mathcal{L}$ , on munit  $\mathfrak{a}_L$  de la mesure de Haar qui donne le covolume 1 aux réseaux engendrés par des bases orthonormales dans  $\mathfrak{a}_L$ . Par définition, pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , le poids d'Arthur

$$v_M(g)$$

est le volume dans  $\mathfrak{a}_M$  de l'enveloppe convexe des points  $-H_P(g)$ . On va rappeler l'expression analytique due à Arthur de ce poids. Auparavant, pour tous  $P \in \mathcal{P}(M)$  et  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ , on introduit le polynôme

$$d_P(\Lambda) = \text{vol}(\mathfrak{a}_M / X_*(M_{sc}))^{-1} \prod_{\alpha \in \Delta_P} \Lambda(\alpha^\vee).$$

Pour  $M = G$ , on a, par convention,  $\text{vol}(\mathfrak{a}_G / X_*(G_{sc})) = 1$  et le polynôme ci-dessus est le polynôme constant égal à 1.

PROPOSITION 11.11.1 (Arthur [Art76, pp. 219–220]). *Pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , on a l'égalité suivante*

$$v_M(g) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g)))$$

où la limite est prise sur les  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$  génériques.

*Démonstration.* Elle est analogue à la démonstration de la proposition 11.10.1 dont on reprend les notations. Par le lemme de Langlands déjà évoqué, le poids  $v_M(g)$  est égal la limite en  $\Lambda = 0$  de la transformée de Fourier

$$\int_{\mathfrak{a}_M} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{|\Delta_P^+|} \varphi_P^\Lambda(\mu + H_P(g)) \exp(\Lambda(\mu)) d\mu.$$

Or celle-ci se calcule et vaut  $\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} \exp(-\Lambda(H_P(g)))$ . □

Reprenons les notations du § 11.8. Lorsqu'on fait agir  $T_Y(\mathbb{A}_0)$  par translation à gauche sur  $G(\mathbb{A}_0)$ , l'enveloppe convexe des points  $(-H_P(g))$  pour  $P \in \mathcal{P}(M)$  subit une translation par un vecteur de  $H_M(T_Y(\mathbb{A}_0))$ . Le volume  $v_M(g)$  est donc invariant à gauche par  $T_Y(\mathbb{A}_0)$ . L'intégrale orbitale pondérée d'Arthur (cf. [Art78, § 8]) est définie par la formule

$$J_M(Y) = J_M(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) v_M(g) dg. \tag{11.11.1}$$

Ce sont en fait des analogues pour les algèbres de Lie des intégrales orbitales pondérées d'Arthur. Ces intégrales apparaissent naturellement dans un analogue pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur-Selberg (cf. [Cha02]).

**11.12 Les  $(G, M)$ -familles**

Dans [Art81], Arthur a introduit la notion de  $(G, M)$ -famille. Une  $(G, M)$ -famille est une famille de fonctions  $(b_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$  lisses sur  $\mathfrak{a}_M^*$  et qui vérifient pour un couple  $(P, P')$  de sous-groupes paraboliques adjacents la condition de «recollement»

$$b_P(\Lambda) = b_{P'}(\Lambda)$$

sur l'hyperplan  $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$  où  $\alpha^\vee$  est l'unique élément de  $\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_{P'}^\vee)$ . On peut alors définir *a priori* uniquement pour  $\Lambda$  générique la fonction

$$b_M(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} d_P(\Lambda)^{-1} b_P(\Lambda) \tag{11.12.1}$$

et Arthur montre que cette fonction se prolonge en une fonction lisse sur  $\mathfrak{a}_M^*$  (cf. [Art81, lemme 6.2]). On pose

$$b_M = b_M(0).$$

Les exemples de  $(G, M)$ -familles que l'on considérera sont les deux suivants. Le premier exemple, qui dépend de  $g \in G(\mathbb{A})$ , est la famille  $(v_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$  où, pour tout  $P \in \mathcal{P}(M)$ , on introduit la fonction de la variable  $\Lambda$

$$v_P(g, \Lambda) = \exp(-\Lambda(H_P(g))). \tag{11.12.2}$$

La condition de recollement résulte du lemme 5.7.1. Le second exemple est la famille  $(w_P(\mu))_{P \in \mathcal{P}(M)}$  qui dépend de  $\mu \in \mathfrak{a}_M$  et qui est définie par

$$w_P(\mu, \Lambda) = \frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} \exp(-\Lambda([\mu]_P)). \tag{11.12.3}$$

Le lecteur vérifiera immédiatement que le lemme ci-dessous implique que la famille précédente est une  $(G, M)$ -famille.

LEMME 11.12.1. *Soit  $\mu \in \mathfrak{a}_M$ . Soit  $P$  et  $P'$  deux sous-groupes paraboliques dans  $\mathcal{P}(M)$  adjacents et soit  $\alpha^\vee$  l'unique élément de  $\Delta_P^\vee \cap (-\Delta_{P'}^\vee)$ . Pour tout  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$  qui vérifie  $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$ , on a*

$$\Lambda([\mu]_P) = \Lambda([\mu]_{P'}).$$

*Démonstration.* L'hyperplan de  $\mathfrak{a}_M^*$  d'équation  $\Lambda(\alpha^\vee) = 0$  n'est autre que le sous-espace  $\mathfrak{a}_Q^*$  où  $Q$  est le plus petit sous-groupe parabolique de  $G$  qui contient à la fois  $P$  et  $P'$ . La projection  $p_Q$  de  $\mathfrak{a}_M$  sur  $\mathfrak{a}_Q$  selon la décomposition  $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_M^Q$  induit une bijection de  $\Delta_P^\vee - \{\alpha^\vee\}$ , respectivement  $\Delta_{P'}^\vee - \{-\alpha^\vee\}$ , sur  $\Delta_Q^\vee$ . Soit  $\mu \in \mathfrak{a}_M$ . Écrivons cet élément dans les bases  $\Delta_P^\vee$  et  $\Delta_{P'}^\vee$

$$\mu = \sum_{\beta \in \Delta_P} x_\beta \beta^\vee = \sum_{\gamma \in \Delta_{P'}} y_\gamma \gamma^\vee.$$

Pour tous  $\beta \in \Delta_P$  et  $\gamma \in \Delta_{P'}$  distincts de  $\pm\alpha$  tels que  $p_Q(\beta^\vee) = p_Q(\gamma^\vee)$  on donc  $x_\beta = y_\gamma$ . En utilisant la notation  $[\cdot]$  pour la partie entière, on a donc

$$p_Q([\mu]_P) = \sum_{\beta \in \Delta_P - \{\alpha\}} [x_\beta] p_Q(\beta^\vee) = \sum_{\gamma \in \Delta_{P'} - \{-\alpha\}} [y_\gamma] p_Q(\gamma^\vee) = p_Q([\mu]_{P'})$$

d'où

$$\Lambda([\mu]_P) = \Lambda([\mu]_{P'})$$

pour tout  $\Lambda \in \mathfrak{a}_Q^*$ . □

### 11.13 Produit de deux $(G, M)$ -familles

Le produit de deux  $(G, M)$ -familles est évidemment une  $(G, M)$ -famille. On note  $(v \cdot w)(g, \mu)$  le produit des familles  $v(g)$  et  $w(\mu)$  définies en (11.12.2) et (11.12.3) ci-dessus. Dans le lemme suivant, on reformule les propositions 11.10.1 et 11.11.1.

LEMME 11.13.1. *Pour tout  $g \in g(\mathbb{A})$ , les poids  $w_M^\xi(g)$  et  $v(g)$  sont respectivement les valeurs en  $\Lambda = 0$  des fonctions lisses*

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} (v \cdot w)_M(g, \mu + \xi_M, \Lambda).$$

et

$$v_M(g, \Lambda).$$

La clef pour notre problème de comparaison d'intégrales orbitales pondérées est une formule pour le produit  $(v \cdot w)_M$  due à Arthur. Avant de pouvoir l'énoncer dans le lemme 11.13.4, nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires.

Soit  $b$  une  $(G, M)$ -famille et  $L \in \mathcal{L}(M)$ . Pour tout  $Q \in \mathcal{P}(L)$ , la fonction sur  $\mathfrak{a}_L^*$  obtenue par restriction de  $b_P$  ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique  $P \in \mathcal{P}^Q(M)$ . La famille  $(b_Q)_{Q \in \mathcal{P}(L)}$  est une  $(G, L)$ -famille. Par la formule (11.12.1) appliquée au sous-groupe de Levi  $L$ , on obtient une fonction lisse notée  $b_L(\Lambda)$  sur  $\mathfrak{a}_L^*$  et on pose

$$b_L = b_L(0).$$

LEMME 11.13.2. *Soit  $L \in \mathcal{L}(M)$ . Pour tout  $\mu \in \mathfrak{a}_M$  soit  $(w_Q(\mu, \Lambda))_{Q \in \mathcal{P}(L)}$  la  $(G, L)$ -famille déduite comme ci-dessus de la  $(G, M)$ -famille  $(w_P(\mu, \Lambda))_{P \in \mathcal{P}(M)}$  définie en (11.12.3). Alors on a*

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} w_L(\mu + \xi_M) = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot w_L^\xi(1)$$

où :

- par convention, on pose  $\text{vol}(\mathfrak{a}_G/X_*(G)) = 1$  ;
- 1 est l'élément neutre de  $G(\mathbb{A}_0)$  ;
- le second membre est celui défini au § 11.7 lorsqu'on remplace  $M$  par  $L$ .

*Démonstration.* Le membre de gauche vaut par définition

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{\mu_0 \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} d_Q(\Lambda)^{-1} \cdot \frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} \cdot \exp(-\Lambda([\mu_0 + \xi_M]_P))$$

où :

- la limite est prise sur les  $\Lambda \in \mathfrak{a}_L^*$  génériques ;
- pour chaque  $Q \in \mathcal{P}(L)$ , on choisit  $P \in \mathcal{P}^Q(M)$  ;
- la fraction  $d_P(\Lambda)/c_P(\Lambda)$  est bien définie sur les points génériques de  $\mathfrak{a}_M^*$  et se prolonge en une fonction lisse sur  $\mathfrak{a}_M^*$ .

Pour de tels  $\Lambda$ ,  $Q$  et  $P$ , on vérifie les formules

$$\frac{d_P(\Lambda)}{c_P(\Lambda)} = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L_{\text{sc}}))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M_{\text{sc}}))} \cdot \frac{d_Q(\Lambda)}{c_Q(\Lambda)}$$

et

$$[\mu_0 + \xi_M]_P = [\mu'_0 + \xi_L]_Q$$

où  $\mu'_0$  est la projection de  $\mu_0$  sur  $\mathfrak{a}_L$ . Le lemme 11.6.1 implique que la projection de  $\mathfrak{a}_M$  sur  $\mathfrak{a}_L$  induit une surjection de  $X_*(M)/X_*(M_{\text{sc}})$  sur  $X_*(L)/X_*(L_{\text{sc}})$ . L'ordre de son noyau se combine au rapport des covolumes des réseaux  $X_*(L_{\text{sc}})$  et  $X_*(M_{\text{sc}})$  pour donner le facteur

$$\frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))}.$$

On conclut la démonstration en appliquant la proposition 11.10.1 au sous-groupe de Levi  $L$  et à  $g = 1$ . □

Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de Levi  $L$ . Arthur définit également une  $(L, M)$ -famille  $b^Q$  de la façon suivante : pour tout  $P \in \mathcal{P}^L(M)$ ,  $b^Q_P(\Lambda)$  est la fonction lisse sur  $\mathfrak{a}^*_M$  définie par

$$b^Q_P(\Lambda) = b_{PN_Q}(\Lambda),$$

où le groupe  $PN_Q$  est l'élément de  $\mathcal{P}(M)$  engendré par  $P$  et  $N_Q$ . On peut alors former une fonction lisse

$$b^Q_M(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^L(M)} d^Q_P(\Lambda)^{-1} b^Q_P(\Lambda)$$

en utilisant le coefficient

$$d^Q_P(\Lambda) = \text{vol}(\mathfrak{a}^Q_M/X_*(M'))^{-1} \prod_{\alpha \in \Delta^Q_P} \Lambda(\alpha^\vee)$$

où  $\Delta^Q_P \subset \Delta_P$  est le sous-ensemble des racines dans  $L$  et  $M'$  est l'image réciproque de  $M$  dans le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de  $L$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module  $X_*(M')$  est alors le réseau de  $\mathfrak{a}^Q_M$  engendré par  $\Delta^Q_P$ .

Notons le lemme suivant qui est dû à Arthur et dont on laisse la démonstration au lecteur.

LEMME 11.13.3. *Soit  $L \in \mathcal{L}(M)$  et  $Q \in \mathcal{P}(L)$ . Soit  $g \in G(\mathbb{A}_0)$ .*

*Soit  $v^Q(g)$  la  $(L, M)$ -famille déduite de  $v(g)$ .*

*Pour tout  $l \in L(\mathbb{A}_0)$ , soit  $v^L(l)$  la  $(L, M)$ -famille définie par  $v^L_P(l, \Lambda) = \exp(-\Lambda(H_P(l)))$ .*

*On a l'égalité de  $(L, M)$ -familles*

$$v^Q(g) = v^L(l_Q(g))$$

où  $l_Q(g) \in L(\mathbb{A}_0)$  est donné par la décomposition d'Iwasawa

$$g \in l_Q(g)N_Q(\mathbb{A}_0)K.$$

En particulier, on a l'égalité

$$v^Q_M(g) = v^L_M(l_Q(g)). \tag{11.13.1}$$

Arthur déduit également d'une  $(G, M)$ -famille  $b$  une fonction lisse sur  $\mathfrak{a}^*_Q$  notée  $b'_Q(\Lambda)$  (cf. [Art81, §6(6.3) et lemme 6.1]). Nous ne rappellerons pas sa définition ; seules les deux propriétés suivantes nous seront utiles.



LEMME 11.13.4 (Cf. [Art81, lemme 6.3 et corollaire 6.4]). Soit  $b$  une  $(G, M)$ -famille.

(1) Pour tout  $L \in \mathcal{L}(M)$  et  $\Lambda \in \mathfrak{a}_L^*$ , on a

$$b_L(\Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} b'_Q(\Lambda).$$

(2) Soit  $e$  une  $(G, M)$ -famille et  $e \cdot b$  le produit de  $e$  et  $b$ . Pour tout  $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$ , on a l'égalité

$$(e \cdot b)_M(\Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} e_M^Q(\Lambda) b'_Q(\Lambda).$$

### 11.14 Comparaison d'intégrales orbitales pondérées

Soit  $L \in \mathcal{L}(M)$  et  $Q \in \mathcal{P}(L)$ . On reprend les notations du § 11.8. Les «poids»  $v_M^Q$  et  $v_M^L$  déduits des  $(L, M)$ -familles éponymes permettent de définir les intégrales orbitales pondérées ci-dessus

$$J_M^Q(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash G(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(g^{-1})Y) v_M^Q(g) dg$$

et

$$J_M^L(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = \int_{T_Y(\mathbb{A}_0) \backslash L(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(\text{Ad}(l^{-1})Y) v_M^L(l) dl.$$

Pour  $Q = G$  ou  $L = G$ , on retrouve l'intégrale  $J_M$  définie en (11.11.1). Les deux intégrales sont reliées par la formule de descente énoncée ci-dessous.

LEMME 11.14.1. Avec les notations ci-dessus, on a

$$J_M^Q(Y, \mathbf{1}_{D_0}) = q^{\dim(\mathfrak{n}_Q) \deg(D_0)} J_M^L(Y, \mathbf{1}_{D_0}).$$

*Démonstration.* Elle repose sur la formule (11.13.1) du lemme 11.13.3, la décomposition d'Iwasawa  $G(\mathbb{A}_0) = L(\mathbb{A}_0)N_Q(\mathbb{A}_0)K$ , qui est compatible à nos choix de mesures ainsi que, pour  $l \in L(\mathbb{A}_0)$ , sur le changement de variables  $n \mapsto \text{Ad}(ln)^{-1}Y - Y$  qui induit un isomorphisme entre les espaces mesurés  $N_Q(\mathbb{A}_0)$  et  $\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A}_0)$ , ce dernier étant muni de la mesure de Haar qui donne le volume 1 au produit  $\prod_{v \in V_0} \mathfrak{n}_Q[[z_v]](\mathbb{F}_q)$ . Le facteur en  $q$  provient de l'égalité

$$\int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A}_0)} \mathbf{1}_{D_0}(Z) dZ = q^{\dim(\mathfrak{n}_Q) \deg(D_0)}. \quad \square$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 11.14.2. Avec les notations ci-dessus, on a

$$J_M^\xi(Y) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} q^{1/2(\dim(G) - \dim(L)) \deg(D_0)} \cdot \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot J_M^L(Y) \cdot w_L^\xi(1)$$

où  $1 \in G(\mathbb{A}_0)$  est l'élément neutre.

*Démonstration.* Soit  $g \in G(\mathbb{A}_0)$  et  $\mu \in \mathfrak{a}_M$ . D'après l'assertion (2) du lemme 11.13.4, on a

$$(v \cdot w)_M(g, \mu, \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v_M^Q(g, \Lambda) w'_Q(\mu, \Lambda).$$

En utilisant cette formule et le lemme 11.13.1, on obtient

$$w_M^\xi(g) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v_M^Q(g) \cdot \left( \sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} w'_Q(\mu + \xi_M) \right)$$

d'où l'on déduit la relation

$$J_M^\xi(Y) = \sum_{Q \in \mathcal{L}(M)} J_M^Q(Y) \cdot \left( \sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} w'_Q(\mu + \xi_M) \right). \tag{11.14.1}$$

En utilisant la formule de descente du lemme 11.14.1, la ligne (11.14.1) ci-dessus se réécrit

$$J_M^\xi(Y) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} q^{1/2(\dim(G) - \dim(L)) \deg(D_0)} J_M^L(Y) \cdot \left( \sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} w'_Q(\mu + \xi_M) \right). \tag{11.14.2}$$

D'après l'assertion (1) du lemme 11.13.4, on a

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} w'_Q(\mu + \xi_M) = w_L(\mu + \xi_M)$$

et d'après le lemme 11.13.2, on a

$$\sum_{\mu \in X_*(M)/X_*(M_{sc})} w_L(\mu + \xi_M) = \frac{\text{vol}(\mathfrak{a}_L/X_*(L))}{\text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))} \cdot w_L^\xi(1).$$

Cela conclut la démonstration. □

**COROLLAIRE 11.14.3.** *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout  $\xi \in \mathfrak{a}_T$  en position générale l'égalité*

$$J_M^\xi(Y) = \text{vol}(\mathfrak{a}_M/X_*(M))^{-1} \cdot J_M^G(Y).$$

*Démonstration.* Soit  $L \in \mathcal{L}(M)$ . Par définition (cf. § 11.7), le poids  $w_L^\xi(1)$  vaut 1 si 0 appartient à  $\xi_L + X_*(L)$  et 0 sinon. Or comme  $\xi$  est en position générale, le premier cas n'est possible que si  $L = G$  (cf. définition 6.1.3). D'où le corollaire. □

### 11.15 Démonstration du théorème 11.1.1

Le théorème 11.1.1 est simplement une reformulation de la proposition 11.9.1, pour des  $\xi$  en position générale, à l'aide du corollaire 11.14.3.

## 12. L'exemple d'un groupe semi-simple de rang 1

### 12.1 Introduction

Le but de cette section est de décrire dans un cas simple une fibre de Hitchin non elliptique. La situation sera la suivante. Le corps de base  $k$  est une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique  $\neq 2$ . Le groupe  $G$  est le groupe  $\text{PGL}(2)$  ou  $\text{SL}(2)$  sur  $k$ . Soit  $T \subset G$  le tore maximal standard d'algèbre de Lie  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ . Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie commune à  $\text{PGL}(2)$  et  $\text{SL}(2)$  : c'est l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille 2 et de trace nulle. Les autres notations sont celles utilisées dans l'article (en particulier les §§ 2 et 3).

L'algèbre  $k[\mathfrak{g}]^G$  est la sous-algèbre de  $k[\mathfrak{g}]$  engendrée par le déterminant. On identifie donc l'espace  $\text{car}$  à la droite affine  $\mathbb{A}_k^1$  et le morphisme caractéristique  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{car}$  s'identifie au morphisme  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{A}^1$  donné par le déterminant. Ce morphisme est  $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant lorsque  $\mathbb{G}_{m,k}$  agit naturellement sur  $\mathfrak{g}$  et à travers  $z \mapsto z^2$  sur  $\mathbb{A}_k^1$ . L'ouvert  $\text{car}^{\text{reg}}$  est l'ouvert formé par la droite affine privée de l'origine.

La courbe  $C$  est la droite projective standard  $\mathbb{P}_k^1$  qu'on munit des coordonnées homogènes  $(X : Y)$ . Soit  $0$  et  $\infty$  les points de coordonnées respectives  $(0 : 1)$  et  $(1 : 0)$ . On a donc

$$\mathbb{P}_k^1 - \{\infty\} = \text{Spec}(k[x])$$

et

$$\mathbb{P}_k^1 - \{0\} = \text{Spec}(k[y])$$

avec  $x = X/Y$  et  $y = Y/X$ . Soit  $D$  le diviseur

$$D = 2[0].$$

On obtient la surface réglée  $\text{cat}_D \rightarrow C$  en recollant  $\text{Spec}(k[x, u]) \rightarrow \text{Spec}(k[x])$  et  $\text{Spec}(k[y, v]) \rightarrow \text{Spec}(k[y])$  le long des ouverts  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$  par le changement de coordonnées

$$y = 1/x \quad \text{et} \quad v = u/x^4.$$

De manière analogue, on obtient la surface réglée  $\text{td} \rightarrow C$  en recollant les mêmes ouverts que précédemment mais selon le changement de coordonnées

$$y = 1/x \quad \text{et} \quad v = u/x^2.$$

### 12.2 La base de la fibration de Hitchin

Par la description ci-dessus de la surface réglée  $\text{cat}_D$ , on a l'identification

$$H^0(C, \text{cat}_D) = \{a \in k[y] \mid \deg(a) \leq 4\}$$

de sorte que la base de la fibration de Hitchin est le schéma de dimension 5

$$\mathcal{A} = \{(a, t) \in k[y] \times k^\times \mid \deg(a) \leq 4 \text{ et } t^2 = a(0)\}.$$

De même, on a

$$\mathcal{A}_T = \{(a, t) \in k[y] \times k^\times \mid \deg(a) \leq 2 \text{ et } t = a(0)\}.$$

L'immersion fermée  $\mathcal{A}_T \hookrightarrow \mathcal{A}$  est donnée par

$$(a, t) \mapsto (a^2, t).$$

L'ouvert elliptique

$$\mathcal{A}^{\text{ell}} = \mathcal{A} - \mathcal{A}_T$$

est formé des couples  $(a, t)$  tels que  $a$  n'est pas un carré dans  $k[y]$ .

### 12.3 La fibration de Hitchin

L'espace de Hitchin  $\mathcal{M}_{\text{SL}(2)}$  (cf. § 4) est isomorphe au champ des triplets  $(\mathcal{V}, \theta, t)$  où  $\mathcal{V}$  est un fibré vectoriel de rang 2 muni d'une trivialisatation de son déterminant,

$$\theta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}(D)$$

est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_C$ -modules de trace nulle tel que  $\theta_\infty : \mathcal{V}_\infty \rightarrow \mathcal{V}_\infty$  soit régulier, semi-simple et de déterminant égal à  $t^2$ . L'espace de Hitchin  $\mathcal{M}_{\text{PGL}(2)}$  est isomorphe au champ des triplets  $(\mathcal{V}, \theta, t)$ , où  $\mathcal{V}$  est un fibré vectoriel de rang 2 et  $(\theta, t)$  est comme ci-dessus, pris à «tensorisation près» par un fibré en droites sur  $C$ . Dans les deux cas, le morphisme de Hitchin envoie un triplet  $(\mathcal{V}, \theta, t)$  sur  $(\det(\theta), t)$ .

**12.4 Composantes connexes**

On sait bien que l'espace total  $\mathcal{M}_{\text{SL}(2)}$  de la fibration de Hitchin pour  $\text{SL}(2)$  est connexe. Il n'en est pas de même pour  $\mathcal{M}_{\text{PGL}(2)}$  comme nous allons le voir. La suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{SL}(2) \rightarrow \text{PGL}(2) \rightarrow 1$$

induit une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow H^0(C, \mu_2) \rightarrow H^0(C, \text{SL}(2)) \rightarrow H^0(C, \text{PGL}(2)) \rightarrow 1$$

qui n'est autre que la suite exacte de départ, et une suite exacte d'ensembles pointés

$$0 \rightarrow H^1(C, \text{SL}(2)) \rightarrow H^1(C, \text{PGL}(2)) \rightarrow H^2(C, \mu_2) \rightarrow 1. \tag{12.4.1}$$

On notera qu'on a  $H^1(C, \mu_2) = (1)$  puisque  $C = \mathbb{P}_k^1$  et

$$H^2(C, \mu_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Vérifions la surjectivité à droite dans la suite (12.4.1). On part de la suite

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow T_{\text{SL}(2)} \rightarrow T_{\text{PGL}(2)} \rightarrow 1$$

où  $T_{\text{SL}(2)}$  est un sous-tore maximal de  $\text{SL}(2)$  et  $T_{\text{PGL}(2)}$  est son image dans  $\text{PGL}(2)$ . On en déduit la suite

$$0 \rightarrow H^1(C, T_{\text{PGL}(2)}) \rightarrow H^2(C, \mu_2) \rightarrow H^2(C, T_{\text{SL}(2)}).$$

Mais  $H^2(C, T_{\text{SL}(2)}) = (1)$  puisque  $T_{\text{SL}(2)} \simeq \mathbb{G}_{m,k}$  et  $k$  est algébriquement clos d'où la surjectivité de la flèche  $H^1(C, T_{\text{PGL}(2)}) \rightarrow H^2(C, \mu_2)$  et *a fortiori* de  $H^1(C, \text{PGL}(2)) \rightarrow H^2(C, \mu_2)$ .

La suite (12.4.1) implique que l'espace  $\mathcal{M}_{\text{PGL}(2)}$  possède deux composantes connexes  $\mathcal{M}_{\text{PGL}(2)}^i$  indexées par  $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le morphisme naturel

$$\mathcal{M}_{\text{SL}(2)} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{PGL}(2)}^0$$

est une  $\mu_2$ -gerbe. En effet, d'après la suite (12.4.1), tout  $\text{PGL}(2)$ -torseur dont la classe est d'image triviale dans  $H^2(C, \mu_2)$  se relève en un  $\text{SL}(2)$ -torseur et ce relèvement est unique à un élément de

$$\mu_2 = \text{Ker}(H^0(C, \text{SL}(2)) \rightarrow H^0(C, \text{PGL}(2)))$$

près.

**12.5 Une fibre hyperbolique**

Désormais, *on se limite* au cas  $G = \text{PGL}(2)$  et on note simplement  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G$ . On va étudier la fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  au-dessus du point  $a = (y^2 - 1, -1) \in \mathcal{A}_T$  (qui s'identifie aussi au point  $((y^2 - 1)^2, -1) \in \mathcal{A}_G$ ). Soit

$$U = \mathbb{P}_k^1 - \{-1, 1\} = \text{Spec} \left( k \left[ \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^{\pm 1} \right] \right).$$

Soit  $X \in \mathfrak{t}(k[y])$  défini par

$$X = \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Cet élément est  $G$ -régulier sur  $U$  de centralisateur le schéma en tores constant  $T \times_k U$ . En effet, sa trace est toujours nulle et son déterminant ne s'y annule pas sur  $U$ . Soit  $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}_a$ . Il résulte des considérations du § 4.9 que  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  possède sur  $U$  une réduction canonique à  $T$

disons  $(\mathcal{E}_T, \theta, t)$ . On identifie une fois pour toutes  $T$  à  $\mathbb{G}_{m,k}$  via le morphisme

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_*$$

où  $*$  indique qu'on prend l'image dans  $\mathrm{PGL}(2)$ . Comme tout  $\mathbb{G}_{m,k}$ -torseur est trivial sur  $U$ , on peut choisir une trivialisaton de  $\mathcal{E}_T$ . Soit  $\mathcal{X}_a$  le schéma formé des triplets

$$(\mathcal{E}, \theta, \iota)$$

tels que  $(\mathcal{E}, \theta, t)$  est un triplet de Hitchin au-dessus de  $a$  et  $\iota$  est une trivialisaton de  $\mathcal{E}$  sur  $U$  qui envoie  $\theta$  sur  $X$ . Le groupe

$$H^0(U, T) \simeq \mathbb{G}_{m,k}(U) = k^\times \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^\mathbb{Z} \simeq k^\times \times \mathbb{Z}$$

agit à gauche sur  $\mathcal{X}$  par l'action évidente sur le facteur  $\iota$ . La fibre  $\mathcal{M}_a$  est donc isomorphe au champ quotient  $[\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{Z} \setminus \mathcal{X}_a]$ .

### 12.6 Fibres de Springer affines

Soit  $z$  une indéterminée sur  $k$ . Soit  $\mathcal{O} = k[[z]]$  et  $F = k((z))$  son corps des fractions. Soit  $\mathfrak{p}$  l'idéal de  $\mathcal{O}$  engendré par  $z$ . Soit

$$\mathrm{val} : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

la valuation discrète normalisée par  $\mathrm{val}(z) = 1$ . Soit

$$Y = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$$

et  $M$  la fibre de Springer affine (cf. [KL88] et [GKM04]) définie par

$$M = \{g \in G(F)/G(\mathcal{O}) \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})Y \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})\}.$$

C'est un  $k$ -schéma localement de type fini qui possède deux composantes connexes correspondant aux fibres de l'application

$$M \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

qui, à  $g$ , associe  $\mathrm{val}(\det(\tilde{g})) \bmod 2\mathbb{Z}$ , où  $\tilde{g} \in \mathrm{GL}(2, F)$  est un relèvement quelconque de  $g$ . En utilisant la bijection entre  $\mathrm{GL}(2, F)/\mathrm{GL}(2, \mathcal{O})$  et l'ensemble des  $\mathcal{O}$ -réseaux de  $F^2 = F \oplus F$ , on voit que  $M$  s'identifie au schéma des classes de réseaux de  $F^2$  stables par l'endomorphisme  $Y$ , pour la relation d'équivalence sur les réseaux définie par les homothéties de rapport dans  $z^\mathbb{Z}$ . On obtient la composante d'indice  $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  en ne considérant que les réseaux d'indice dans  $i + 2\mathbb{Z}$  (où l'indice du réseau standard  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  vaut 0 par définition). La matrice

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_* \tag{12.6.1}$$

agit sur  $M$  (suivant les points de vue : soit par translation à gauche sur  $g$ , soit par son action naturelle sur les classes de réseaux) et permute les composantes connexes de  $M$ . Il suffit donc de décrire la composante  $M^0$  des réseaux d'indice 0 mod  $2\mathbb{Z}$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et soit  $M_n^0$  l'ensemble des classes de réseaux de  $F^2$ , d'indice 0 mod  $2\mathbb{Z}$ , qui admettent un représentant  $R$  (nécessairement unique) qui vérifie les inclusions

$$\mathfrak{p}^{1-n} \oplus \mathfrak{p}^n \subsetneq R \subsetneq \mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^{n-1}. \tag{12.6.2}$$

De tels réseaux sont automatiquement stables par  $Y$ , autrement dit  $M_n^0 \subset M^0$ . Un réseau  $R$  qui vérifie les inclusions ci-dessus définit une droite du  $k$ -espace quotient  $\mathfrak{p}^{1-n} \oplus \mathfrak{p}^n \setminus \mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^{n-1}$  de dimension 2. On obtient alors une bijection

$$M_n^0 \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{p}^{1-n} \oplus \mathfrak{p}^n \setminus \mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^{n-1}) \simeq \mathbb{P}_k^1$$

de  $M_n^0$  sur les  $k$ -points de la droite projective  $\mathbb{P}_k^1$ , qui envoie la classe du réseau  $\mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^n$  sur le point  $(1 : 0)$  (en coordonnées homogènes) et celle du réseau  $\mathfrak{p}^{1-n} \oplus \mathfrak{p}^{n-1}$  sur le point  $(0 : 1)$ . Ces deux classes sont les seules dans  $M_n^0$  à être des classes de réseaux décomposés. On identifie ainsi  $M^0$  à la chaîne des droites projectives  $M_n^0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , les droites  $M_n^0$  et  $M_{n+1}^0$  se recollant au point qui correspond à la classe du réseau  $\mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^n$ .

L'action à gauche de  $T(F)$  sur  $G(F)$  préserve  $M$ . On en déduit une action de  $F^\times$  sur  $M$  via l'isomorphisme  $\mathbb{G}_{m,k} \simeq T$ . Le sous-groupe des éléments de  $F^\times$  de valuation 2 stabilise  $M^0$ . Ce groupe s'écrit comme un produit direct

$$z^{2\mathbb{Z}} \times k^\times \times (1 + \mathfrak{p}).$$

La composante  $(1 + \mathfrak{p})$  agit trivialement sur  $M^0$ . L'action de  $z^{2k}$  induit une translation dans la chaîne de droites projectives qui envoie  $M_n^0$  sur  $M_{n-k}^0$ . L'action de  $k^\times$  stabilise chaque composante irréductible  $M_n^0$ . En coordonnées homogènes, on a  $\lambda \cdot (x : y) = (\lambda x : y)$ . Cette action possède donc sur chaque  $M_n^0$  deux points fixes qui sont les deux classes de réseaux décomposés et l'action de  $k^\times$  sur  $M_n^0$  privé de ces deux points est simplement transitive.

Décrivons en termes de réseaux les fonctions  $H_B$  et  $H_{\overline{B}}$  (cf. définition 7.5.1) où  $B$  est le sous-groupe de Borel «supérieur» et  $\overline{B}$  est son opposé. L'espace  $\mathfrak{a}_T$  est de dimension 1. Soit  $\alpha$  la racine de  $T$  dans  $B$  : elle induit sur  $\mathbb{G}_{m,k} \simeq T$  l'isomorphisme identique  $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ . Cette racine (vue comme élément de  $\mathfrak{a}_T^*$ ) induit un isomorphisme  $\mathfrak{a}_T \simeq \mathbb{R}$ . On pose, pour tout  $g \in G(F)/G(\mathcal{O})$ ,

$$h_B(g) = \alpha(H_B(g)) \quad \text{et} \quad h_{\overline{B}}(g) = \alpha(H_{\overline{B}}(g)).$$

Pour réseau  $R$  de  $F^2$ , soit  $R_1 = R \cap (F \oplus (0))$  et  $p_1(R)$  la projection de  $R$  sur  $F \oplus (0)$ . En utilisant  $0 \oplus F$ , on définit  $R_2$  et  $p_2(R)$ . Pour tout idéal fractionnaire  $\mathfrak{p}^n$  de  $F$ , on pose  $\text{val}(\mathfrak{p}^n) = n$ . Cette définition s'applique donc à  $R_1, p_1(R)$  etc. On pose alors

$$h_B(R) = \text{val}(p_2(R)) - \text{val}(R_1) \quad \text{et} \quad h_{\overline{B}}(R) = \text{val}(R_2) - \text{val}(p_1(R)).$$

Cette définition ne dépend que de la classe du réseau  $R$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que si la classe de  $R$  correspond à  $g$  on a  $h_B(R) = h_B(g)$  et  $h_{\overline{B}}(R) = h_{\overline{B}}(g)$  (cf. [CL08, § 9.1], où la fonction  $H_B$  de cet article est l'opposé de notre fonction  $H_B$ ).

On notera qu'on a

$$h_{\overline{B}}(R) - h_B(R) = \text{val}(R_1) - \text{val}(p_1(R)) + \text{val}(R_2) - \text{val}(p_2(R)) \geq 0$$

(comme il se doit, cf. lemme 5.7.1) et que cette différence est nulle seulement si  $R$  est un réseau décomposé. Si la classe  $R$  appartient à  $M$ , par les inclusions (12.6.2), on voit qu'on a

$$0 \leq \text{val}(R_1) - \text{val}(p_1(R)) \leq 1.$$

Donc pour une classe de réseaux  $R$  dans  $M$  non décomposé, on a

$$h_{\overline{B}}(R) - h_B(R) = 2.$$

De plus, pour une classe de réseaux  $R$  dans  $M_n^0$ , on a

$$h_B(R) = \begin{cases} 2n & \text{si } R = \mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^n ; \\ 2(n - 1) & \text{sinon ;} \end{cases} \tag{12.6.3}$$

et

$$h_{\overline{B}}(R) = \begin{cases} 2(n-1) & \text{si } R = \mathfrak{p}^{1-n} \oplus \mathfrak{p}^{n-1}; \\ 2n & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.6.4}$$

### 12.7 Une fibre non séparée

On va voir que la fibre  $\mathcal{M}_a$  du § 12.5 n'est ni séparée ni de type fini. On a vu que  $\mathcal{M}_a$  est isomorphe à un certain quotient de  $\mathcal{X}_a$ . Il résulte des considérations de la section 7 que  $\mathcal{X}_a$  s'identifie à un produit de deux fibres de Springer. Plus précisément, le recollement formel de Beauville–Laszlo identifie  $\mathcal{X}_a$  au produit de

$$M_+ = \{g \in G(k((y-1)))/G(k[[y-1]]) \mid \text{Ad}(g^{-1})X \in \mathfrak{g}(k[[y-1]])\}$$

avec

$$M_- = \{g \in G(k((y+1)))/G(k[[y+1]]) \mid \text{Ad}(g^{-1})X \in \mathfrak{g}(k[[y+1]])\}$$

où

$$X = \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 - y^2 \end{pmatrix}$$

et les plongements  $k[y] \hookrightarrow k[[y-1]]$  et  $k[y] \hookrightarrow k[[y+1]]$  sont les plongements évidents. Comme  $y+1$  est un unité dans  $k[[y-1]]$ , on voit bien que  $M_+$  est la fibre de Springer  $M$  définie au § 12.6. De même  $M_- = M$ .

Interprétons maintenant l'action de  $\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{X}_a$ . Cela correspond à l'action diagonale de  $k^\times \times ((y+1)/(y-1))^{\mathbb{Z}}$  sur  $G(k((y-1))) \times G(k((y+1)))$ . En termes de  $M_+ \times_k M_-$ , on voit que  $\mathbb{G}_{m,k}$  agit diagonalement sur  $M_+ \times_k M_-$  et que  $\mathbb{Z}$  agit sur  $M_+ \times_k M_-$  à travers  $n \mapsto (-n, n)$ , les actions sur chaque facteur étant celles décrites au § 12.6.

On a vu au § 12.4 que  $\mathcal{M}$  possède deux composantes connexes  $\mathcal{M}^i$  indexées par  $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La fibre  $\mathcal{M}_a^i = \mathcal{M}_a \cap \mathcal{M}^i$  est donc le quotient par  $\mathbb{G}_{m,k} \times \mathbb{Z}$  du produit des composantes

$$M_+^{i_+} \times_k M_-^{i_-}$$

pour  $i_+ + i_- = i$  où  $M_\pm^{i_\pm}$  est la composante de  $M_\pm$  d'indice  $i_\pm$ . En fait, l'action de la matrice (12.6.1) sur l'un des facteurs échange les composantes connexes, qui sont donc isomorphes. Pour simplifier la discussion, on ne considère dans la suite que la composante  $\mathcal{M}_a^0$ . L'action de  $1 \in \mathbb{Z}$  qui s'identifie à  $(y+1)/(y-1)$  permute  $M_+^0 \times_k M_-^0$  et  $M_+^1 \times_k M_-^1$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{M}_a^0$  s'identifie au quotient de  $M_+^0 \times_k M_-^0$  par l'action de  $\mathbb{G}_{m,k} \times 2\mathbb{Z}$ . La figure 1 ci-dessous représente  $M_+^0 \times_k M_-^0$  c'est-à-dire le produit de deux chaînes de  $\mathbb{P}_k^1$ . Les sommets du quadrillage (infini) correspondent aux couples de réseaux décomposés, les segments verticaux, respectivement horizontaux, aux couples de réseaux dont la première, respectivement seconde, composante est un réseau décomposé. Les points à l'intérieur des carrés sont les couples de classes de réseaux qui ne sont pas décomposés.

L'action de  $\mathbb{G}_{m,k}$  préserve chaque carré (qui est un produit  $M_{+,n_+}^0 \times_k M_{-,n_-}^0$ ) et l'action de  $2 \in 2\mathbb{Z}$  translate un carré de 1 sur la droite et de 1 vers le bas. On voit donc que le quotient de  $M_+^0 \times_k M_-^0$  par  $2\mathbb{Z} \times \mathbb{G}_{m,k}$  n'est pas de type fini.

Dans la figure 2 ci-dessous, les sommets du carré (symbolisés par les petits cercles) sont des points fixes de l'action de  $\mathbb{G}_{m,k}$ . La gerbe résiduelle de tels points est  $B(\mathbb{G}_m)$ . On a représenté en traits fins les orbites de  $\mathbb{G}_{m,k}$  de dimension 1. Le quotient du carré privé des sommets est donc une droite projective non séparée, symbolisée par un trait gras avec ses deux origines et ses deux points à l'infini qui sont les quotients par  $\mathbb{G}_m$  des côtés du carré. Cette droite est isomorphe à celle

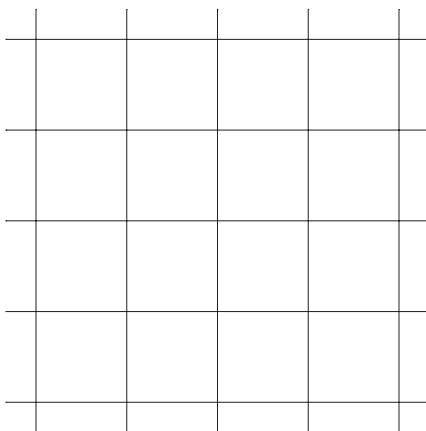


FIGURE 1. Le produit de deux chaînes de  $\mathbb{P}_k^1$ .

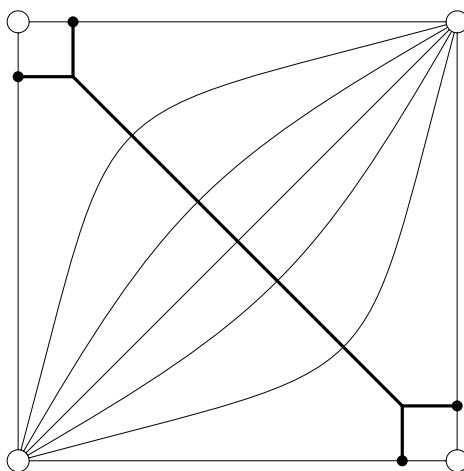


FIGURE 2. En traits fins quelques orbites de  $\mathbb{G}_{m,k}$  sur  $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$  privé des sommets et en gras le quotient non séparé.

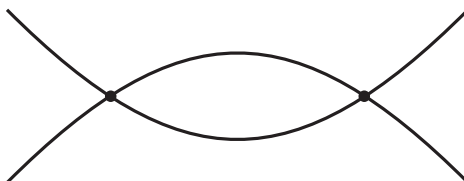


FIGURE 3. Un polygone de Néron à deux côtés.

qu'on obtient en recollant deux droites projectives standard le long de l'ouvert complémentaire de l'origine et du point à l'infini.

En particulier,  $\mathcal{M}_a^0$ , privée des points correspondant aux sommets du quadrillage, est une chaîne infinie de polygones de Néron à deux côtés (cf. figure 3 ci-dessus).

Plus précisément, chaque polygone de Néron de cette chaîne est indexé par  $n \in \mathbb{Z}$ . Un tel polygone est la réunion de deux droites projectives  $P_n$  et  $P'_n$  sur  $k$ . Les ouverts  $(P_n \cup P'_n) - P_n$



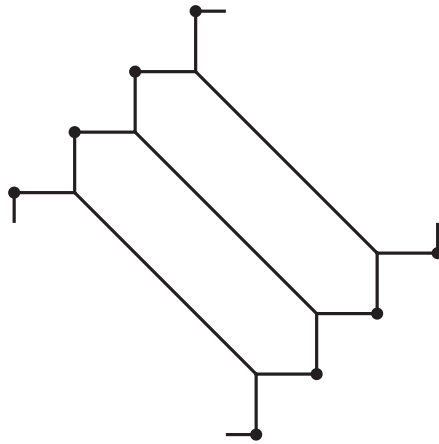


FIGURE 4. Une chaîne de polygones de Néron à deux côtés.

et  $(P_n \cup P'_n) - P'_n$  sont isomorphes à  $\mathbb{G}_{m,k}$ . Dans cette chaîne, on recolle le polygone  $P_n \cup P'_n$  au polygone  $P_{n+1} \cup P'_{n+1}$  en identifiant  $(P_n \cup P'_n) - P'_n$  à  $(P_{n+1} \cup P'_{n+1}) - P'_{n+1}$ . Dans la figure 4 ci-dessous, on a représenté un bout de cette chaîne de polygones. Pour suggérer que cette chaîne est infinie et pour que le lecteur reconnaisse dans la figure 4 la droite non séparée, représentée en traits gras dans la figure 2, les polygones extrêmes ne sont que partiellement dessinés (ils ont été amputés d'un  $\mathbb{G}_{m,k}$ ). Le lecteur qui voudrait retrouver la figure 4 notera que la droite de la figure 2 est une fois sur deux «renversée».

**12.8 Une fibre hyperbolique  $\xi$ -stable**

Comme on va le voir, la situation s'améliore radicalement lorsqu'on prend la fibre  $\xi$ -stable  $\mathcal{M}_a^\xi$  pour un  $\xi$  en position générale (cf. section 6). Soit  $\xi \in \mathfrak{a}_T \simeq \mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{M}_a^{\xi,0}$  la composante d'indice 0 de  $\mathcal{M}_a^\xi$  : c'est le quotient de  $(M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$  par l'action de  $\mathbb{G}_{m,k} \times 2\mathbb{Z}$  où  $(M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi \subset M_+^0 \times_k M_-^0$  est l'ouvert formé (des classes) de réseaux  $(R_+, R_-)$  qui vérifient

$$-h_{\overline{B}}(R_+) - h_{\overline{B}}(R_-) < \xi < -h_B(R_+) - h_B(R_-). \tag{12.8.1}$$

Il résulte de (12.6.3) et (12.6.4) que si  $\xi \notin 2\mathbb{Z}$ , les inégalités ci-dessus sont toujours strictes. Dans la suite, pour alléger les discussions on prend  $\xi = 1$ . Remarquons que la condition (12.8.1) exclut les couples de réseaux décomposés. Soit  $R_+$  un réseau dans la classe de  $\mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^n$  et  $R_-$  tel que  $(R_+, R_-) \in (M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$ . Par (12.6.3) et (12.6.4), l'inégalité (12.8.1) devient

$$-2n - h_{\overline{B}}(R_-) < 1 < -2n - h_B(R_-)$$

donc nécessairement  $h_B(R_-) = -2n - 2$  et  $h_{\overline{B}}(R_-) = -2n$  donc  $R_-$  est un réseau non décomposé de  $M_{-,-n}^0$ . De même, si  $R_- = \mathfrak{p}^{-n} \oplus \mathfrak{p}^n$ , tout réseau  $R_+$  tel que  $(R_+, R_-) \in (M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$  est un réseau non décomposé de  $M_{+,-n}^0$ .

Soit  $(R_+, R_-)$  une paire de réseaux non décomposés avec  $R_+ \in M_{+,-n}^0$ . D'après (12.6.3) et (12.6.4), l'inégalité (12.8.1) devient

$$-2n - h_{\overline{B}}(R_-) < 1 < -2n + 2 - h_B(R_-).$$

Il y a donc deux possibilités pour  $h_B(R_-)$  à savoir  $-2n$  et  $-2n - 2$  donc  $R_- \in M_{-,-n}^0 \cup M_{-,-n-1}^0$ .

On peut donc représenter  $(M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$  par la figure 5.

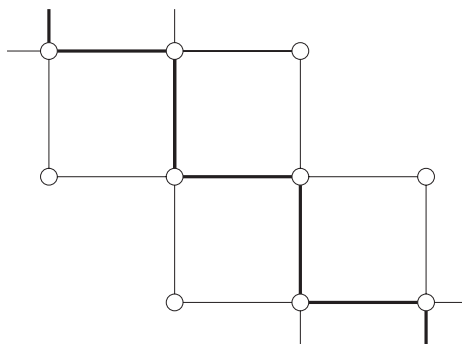


FIGURE 5. Un ouvert  $\xi$ -stable du produit  $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ .

Dans la figure 5 ci-dessus,  $(M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$  est l'ouvert réunion des intérieurs des carrés dessinés (à savoir les produits  $M_{+,n}^0 \times_k M_{-,-n}^0$  et  $M_{+,n}^0 \times_k M_{-,-n-1}^0$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ ) et des segments ouverts en traits gras. Les sommets, c'est-à-dire les couples de réseaux décomposés, sont symbolisés par des petits cercles et sont ôtés. Le groupe  $\mathbb{G}_{m,k} \times 2\mathbb{Z}$  préserve comme il se doit cet ouvert. Le quotient de  $(M_+^0 \times_k M_-^0)^\xi$  par le facteur  $\mathbb{G}_{m,k}$  est une chaîne de droites projectives (désormais non séparées) sur laquelle le facteur  $2 \in 2\mathbb{Z}$  agit par translation de 2. Le quotient  $\mathcal{M}_a^{0,\xi}$  est donc un polygone de Néron à deux côtés (cf. figure 3). La  $\xi$ -stabilité, pour  $\xi$  en position générale, ne garde donc, dans la chaîne de polygones de Néron de la figure 4, qu'un seul polygone.

#### REMERCIEMENTS

Une partie de cet article a été écrit lors d'un séjour du premier auteur nommé à l'*Institute for Advanced Study* de Princeton à l'automne 2008. Il souhaite remercier cet institut pour son hospitalité ainsi que la *National Science Foundation* pour le soutien (agreement No. DMS-0635607) qui a rendu ce séjour possible. Les auteurs remercient également les rapporteurs de cet article pour leur relecture attentive.

#### RÉFÉRENCES

- Art76 J. Arthur, *The characters of discrete series as orbital integrals*, Invent. Math. **32** (1976), 205–261.
- Art78 J. Arthur, *A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in  $G(\mathbf{Q})$* , Duke Math. J. **45** (1978), 911–952.
- Art81 J. Arthur, *The trace formula in invariant form*, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 1–74.
- Art91 J. Arthur, *A local trace formula*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **73** (1991), 5–96.
- BL95 A. Beauville and Y. Laszlo, *Un lemme de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), 335–340.
- BNR89 A. Beauville, M. Narasimhan and S. Ramanan, *Spectral curves and the generalised theta divisor*, J. Reine Angew. Math. **398** (1989), 169–179.
- Beh K. Behrend, *The Lefschetz trace formula for the moduli space of principal bundles*, PhD thesis, <http://www.math.ubc.ca/~behrend/thesis.ps>.
- Beh95 K. Behrend, *Semi-stability of reductive group schemes over curves*, Math. Ann. **301** (1995), 281–305.
- BR94 I. Biswas and S. Ramanan, *An infinitesimal study of the moduli of Hitchin pairs*, J. London Math. Soc. (2) **49** (1994), 219–231.

- BY96 H. Boden and K. Yokogawa, *Moduli spaces of parabolic Higgs bundles and parabolic  $K(D)$  pairs over smooth curves. I*, Internat. J. Math. **7** (1996), 573–598.
- Bou68 N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337 (Hermann, Paris, 1968).
- Cha02 P.-H. Chaudouard, *La formule des traces pour les algèbres de Lie*, Math. Ann. **322** (2002), 347–382.
- CL08 P.-H. Chaudouard and G. Laumon, *Sur l'homologie des fibres de Springer affines tronquées*, Duke Math. J. **145** (2008), 443–535.
- CS78 J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **287** (1978), A449–A452.
- CS79 J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105–134.
- DH98 I. Dolgachev and Y. Hu, *Variation of geometric invariant theory quotients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **87** (1998), 5–56 (with an appendix by Nicolas Ressayre).
- DS95 V. G. Drinfel'd and C. Simpson, *B-structures on G-bundles and local triviality*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 823–829.
- Est01 E. Esteves, *Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3045–3095 (electronic).
- Fal93 G. Faltings, *Stable G-bundles and projective connections*, J. Algebraic Geom. **2** (1993), 507–568.
- GKM04 M. Goresky, R. Kottwitz and R. Macpherson, *Homology of affine Springer fibers in the unramified case*, Duke Math. J. **121** (2004), 509–561.
- Gro61 A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **11** (1961), 167.
- Gro67 A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967), 361.
- Har69 G. Harder, *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*, Invent. Math. **7** (1969), 33–54.
- Har74 G. Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 249–306.
- Hei08 J. Heinloth, *Semistable reduction for G-bundles on curves*, J. Algebraic Geom. **17** (2008), 167–183.
- HS J. Heinloth and A. Schmitt, *The cohomology ring of moduli stacks of principal bundles over curves*, Preprint.
- KL88 D. Kazhdan and G. Lusztig, *Fixed point varieties on affine flag manifolds*, Israel J. Math. **62** (1988), 129–168.
- Kos63 B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.
- Kot99 R. Kottwitz, *Transfer factors for Lie algebras*, Represent. Theory **3** (1999), 127–138 (electronic).
- Lan75 S. Langton, *Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 88–110.
- Ngo08 B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Preprint (2008), <http://arxiv.org/abs/0801.0446>.
- Ngo06 B. C. Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Invent. Math. **164** (2006), 399–453.
- Nit91 N. Nitsure, *Moduli space of semistable pairs on a curve*, Proc. London Math. Soc. (3) **62** (1991), 275–300.

- Ser94 J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, fifth edition (Springer, Berlin, 1994).
- Spr79 T. Springer, *Reductive groups*, in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXXIII (American Mathematical Society, Providence, RI, 1979), 3–27.
- Tha96 M. Thaddeus, *Geometric invariant theory and flips*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 691–723.

Pierre-Henri Chaudouard Pierre-Henri.Chaudouard@math.u-psud.fr  
CNRS et Université Paris-Sud, UMR 8628, Mathématique, Bâtiment 425,  
F-91405 Orsay Cedex, France

Gérard Laumon Gerard.Laumon@math.u-psud.fr  
CNRS et Université Paris-Sud, UMR 8628, Mathématique, Bâtiment 425,  
F-91405 Orsay Cedex, France