THEORIE DU BONUS

CONSEQUENCES DE L'ETUDE DE MR. LE PROFESSEUR FRECHET

ED. FRANCKX
Belgique

La théorie du bonus n'en est qu'à ses débuts et, afin d'en étudier une première approximation, Monsieur le Professeur Fréchet a utilisé la théorie des chaînes de Markoff-Poincaré; la première synthèse de cette théorie a été donnée dans son livre ,,Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités — 2ème livre — Gauthier Villars".

Nous trouvons que l'idée de Monsieur Fréchet, précisée dans un cadre bien défini d'hypothèses, est particulièrement intéressante et nous voudrions, quant à nous, essayer de dégager pour les actuaires les conséquences qu'une telle hypothèse introduit. On pourra en déduire une marche à suivre pour vérifier dans quelle mesure cette hypothèse cadre avec la réalité.

L'hypothèse fondamentale de Monsieur Fréchet consiste à admettre:

1°) l'existence d'une probabilité pour qu'un véhicule ayant eu i sinistres au cours de l'année calendrier, subisse j sinistres au cours de l'exercice suivant;

2°) que cette probabilité est indépendante de la voiture et de l'année considérée.

Si nous considérons les possibilités réduites à $r = 3$ cas (de façon à simplifier l'exposé, ce qui ne limite en rien le raisonnement), les possibilités seront complètement définies par le tableau ou matrice de la chaîne de Markoff-Poincaré (voir page suivante).

L'existence d'une chaîne de Markoff-Poincaré entraîne un certain nombre de conséquences, développées et démontrées dans l'ouvrage cité de Monsieur Fréchet.

https://doi.org/10.1017/S0515036100007509 Published online by Cambridge University Press

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">Etat de départ</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Année en cours</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Année suivante</td><td>aucun sinistre</td><td>un seul sinistre</td><td>deux sinistres au moins</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Etat d'arrivée</td><td>0</td><td>aucun sinistre</td><td>p_{00}</td><td>p_{10}</td><td>p_{20}</td></tr>
<tr><td>1</td><td>un seul sinistre</td><td>p_{01}</td><td>p_{11}</td><td>p_{21}</td></tr>
<tr><td>2</td><td>deux sinistres au moins</td><td>p_{02}</td><td>p_{12}</td><td>p_{22}</td></tr>
</table>

ou

$$[M_1] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} & p_{20} \\ p_{01} & p_{11} & p_{21} \\ p_{02} & p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

A. On peut considérer la probabilité pour qu'un véhicule, ayant eu i sinistres au cours de l'année de référence un, (année d'inscription), subisse j sinistres au cours de l'année de référence n — c.à.d. n années après l'inscription — et cela sans prendre en considération le nombre des sinistres éventuellement encourrus au cours des années intermédiaires. Si on désigne par p_{ij}^n cette probabilité, on obtient la matrice $[M_n]$

$$[M_n] = \begin{bmatrix} p_{00}^n & p_{10}^n & p_{20}^n \\ p_{01}^n & p_{11}^n & p_{21}^n \\ p_{02}^n & p_{12}^n & p_{22}^n \end{bmatrix}$$

Des formules immédiates

$$p_{ij}^{n+1} = p_{i0}^n\, p_{0j} + p_{i1}^n\, p_{1j} + p_{i2}^n\, p_{2j}$$

$$p_{ij}^{n+1} = p_{i0}\, p_{0j}^n + p_{i1}\, p_{1j}^n + p_{i2}\, p_{2j}^n$$

on déduit la propriété générale des chaînes, écrite sous forme matricielle

$$[M_{n+1}] = [M_n]\,[M_1] = [M_1]\,[M_n] \tag{1}$$

d'où on déduit que les matrices markoviennes constituent un groupe permutable et que

$$[M_n] = [M_1]^n \tag{2}$$

B. Ce qui est plus important en pratique est le comportement asymptotique de la formule précédente, c.à.d.

$$\lim_{n \to \infty} [M_n]$$

On sait, par exemple, suite à l'étude de Poincaré, que le battage des cartes est représentable par une chaîne de Markoff avec 52 états (places au départ, places à l'arrivée, après chaque battage) et Poincaré a démontré que

$$\lim_{n \to \infty} [M_n] = \begin{bmatrix} \frac{1}{52} & \cdots\cdots & \frac{1}{52} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{52} & & \frac{1}{52} \end{bmatrix}$$

ce qui est un des aspects du principe ergodique: après un grand nombre de battages, chaque carte a, quelle que soit la position de départ, la même chance d'arriver à une place arbitraire. C'est une méthode de fabrication du hasard et une justification de notre comportement habituel en jouant aux cartes. Remarquons que n ne doit pas être tellement grand, pour que nous ayons le sentiment que le jeu soit „bien battu".

Il est par suite assez intéressant de soulever l'aspect correspondant de la question dans le cas de la chaîne de Markoff qui est à la base de l'assurance auto.

Avant tout, les matrices n'y ont pas le caractère d'être doublement stochastiques comme dans le cas de Poincaré — (car cela reviendrait à dire qu'un assuré aurait autant de chance d'être, après quelques années, dans la catégorie 0 „des bons conducteurs", 1 des „malchanceux", 2 des „mauvais conducteurs".

Cependant, on peut préciser par la pratique courante la nature de la chaîne de Markoff. En effet, si on réduit la chaîne à ces trois catégories, les fréquences observées, en statistique, pour chacune de ces 9 possibilités de la matrice M, sont strictement positives (il n'y a pas de zéro dans la matrice M_1).

Dès lors, il résulte d'un théorème fondamental de Markoff que l'on se trouve dans le cas dit „régulier" et que:

$$\lim_{n \to \infty} [M_n] = \begin{bmatrix} P_1 & P_1 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_2 \\ P_3 & P_3 & P_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

c.à.d. que la matrice limite $[M_0]$ comporte trois colonnes identiques et si nous désignons par $\overline{V} = [P_1\, P_2\, P_3]$ le vecteur ayant les composants de la colonne, on a de plus:

$$[M_1]\, \overline{V} = \overline{V} \tag{4}$$

ce qui prouve que $\overline{V}$ est le vecteur propre de la matrice $[M_1]$ correspondant à la valeur propre $s = 1$, ce qu'on vérifie aisément en se reportant à la note de Monsieur Fréchet.

Quoi qu'il en soit, il est utile au point de vue de l'assurance automobile de déduire les conséquences de ce théorème de Markoff.

Ce théorème ergodique se traduit comme suit:

Quelle que soit la classification des conducteurs la première année — c.à.d. leur appartenance aux classes conventionnelles „bon", „malchanceux", „mauvais" — *il y a après un grand nombre d'années des probabilités pratiquement invariantes*

P_0 d'être parmi les „bons",
P_1 d'être parmi les „malchanceux" avec $P_0 + P_1 + P_2 = 1$,
P_2 d'être parmi les „mauvais".

Ce serait en quelque sorte le *principe de la stabilisation des probabilités d'appartenance à ces catégories dans le temps.*

Cela implique la prise en considération de *deux* périodes dans la succession des années:

1°) au cours des premières années on a des *probabilités fluctuantes*, données par la suite des matrices $[M_n]$, qui définissent en quelque sorte le *régime transitoire.*

2°) après un nombre déterminé d'années, on constate le passage au *régime permanent* avec ses probabilités stabilisées.

On voit donc que l'hypothèse d'une chaîne de Markoff, introduite par Monsieur Fréchet, est particulièrement intéressante pour l'actuaire et qu'il vaut la peine de se pencher sur les statistiques pour vérifier dans quelle mesure cette hypothèse fondamentale est valable.

Une question sera inévitablement posée: „Qu'entendez-vous par n grand?" On a le sentiment, comme c'est le cas dans de nombreux problèmes de calcul des probabilités, que n ne doit pas être tellement grand. Rappelons qu'il suffit de quelques battages de cartes pour qu'un jeu soit „bien battu".

Peut-on s'attendre à ce qu'après *quelques* années le régime permanent soit atteint?

Le problème consiste à évaluer la *rapidité* de la convergence vers la matrice limite $[M_0]$. On sait d'après Markoff que cette convergence est au moins aussi rapide que celle d'une progression géométrique décroissante.

On pourrait, à mon avis, utiliser la méthode pratique suivante, grâce aux calculatrices modernes:

Partons du vecteur initial

$$\overline{V}_0 = [\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}]$$

et calculons la suite des vecteurs itérés

$$\overline{V}_1 = [M_1]\,\overline{V}_0 \ \ldots .\ \ \overline{V}_n = [M_1]\,\overline{V}_{n-1}$$

on a que

$$\lim_{n \to \infty} \overline{V}_n = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

car $\overline{V}_n = [M_1]^n\,\overline{V}_0$ et en vertu de la propriété A et B:

$$\overline{V}_n = [M_n]\,\overline{V}_0$$

$$\lim \overline{V}_n = [M_0]\,\overline{V} = \overline{V}$$

Or en partant de $\overline{V}_0 = [\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]$, d'après la théorie de l'information, on se trouve dans le cas le plus défavorable, par suite de la succession des vecteurs

$$\overline{V}_0\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2\ \ldots .\ \ \overline{V}_n\ \ldots .\ \to \overline{V}$$

donnera des indications précieuses et concrètes sur le sens précis qu'il faut accorder à l'expression „quelques années". La rapidité avec laquelle cette suite convergera permettra de dire qu'après .... années le régime permanent est *pratiquement* atteint.

* * *

Suite à l'intervention de Monsieur Depoid et d'autres actuaires de l'auditoire, on a soulevé la difficulté pratique de détermination des matrices $[M_n]$. Il y a lieu, en effet, de tenir compte des *départs* des assurés.

Nous avons fait remarquer qu'il est aisé de modifier les hypothèses de Monsieur Fréchet de maintenir la structure d'une chaîne de Markoff-Poincaré, en introduisant un état supplémentaire α, que l'on atteint lorsque l'assuré quitte la compagnie.

La matrice M serait alors la suivante:

			Etat de départ			
		Année en cours	0	1	2	
		Année suivante	aucun sinistre	un seul sinistre	deux sinistres au moins	ne plus être assuré
Etat d'arrivée	0	aucun sinistres	q_{00}	q_{10}	q_{20}	0
	1	un seul sinistre	q_{01}	q_{11}	q_{21}	0
	2	deux sinistres au moins	q_{02}	q_{12}	q_{33}	0
		ne plus être assuré	$q_{0\alpha}$	$q_{1\alpha}$	$q_{3\alpha}$	1

car une fois que l'assuré a quitté la compagnie, on n'y revient pas.

Par suite, il est certain qu'on reste à l'état de „non assuré", c.à.d. à l'état α et $p_{\alpha\alpha} = 1$, d'où des zéros pour tous les autres éléments dans la dernière colonne.

Mais une telle matrice définit, par l'introduction des zéros, une chaîne de Markoff très différente.

En effet, d'après la terminologie des chaînes de Markoff, l'état α est un état *final*, les états 0, 1, 2, des états de *passage*.

On peut, de même, définir les probabilités q_{ij}^n et les matrices $[M_n]$.

Dans ce cas, le principe ergodique se traduit comme suit :

$$\lim_{n \to \infty} [M_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

car on le vérifie aisément puisque l'on a

$$[M_1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le théorème ergodique exprime alors le simple fait:

Quelle que soit la catégorie initiale la 1e année — bons, malchanceux, mauvais, police résiliée — *au bout de quelques années, tous les assurés finissent par quitter la compagnie.*

Cette constatation, presque évidente, n'est plus intéressante pour l'actuaire, car pour le rating ce qui l'intéresse c'est le problème tel qu'il a été défini par Monsieur Fréchet.

Nous nous trouvons devant la situation suivante:

— au point de vue pratique, on peut définir les matrices du type q — Monsieur Depoid a spécifié qu'il sera possible de définir statistiquement les valeurs de:

$$q_{ij}^n$$

pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

— au point de vue théorique, il faudrait rétablir les matrices de Fréchet — les matrices du type p — c.à.d. des p_{ij}^n.

Or, c'est là un problème de probabilité relative et on vérifie que

$$p_{ij}^n = \frac{q_{ij}^n}{q_{i0}^n + q_{i1}^n + q_{i2}^n} \quad j = 1, 2, 3$$

De cette manière, nous pourrions retrouver la suite des matrices de Markoff-Fréchet, susceptibles d'être mises à la base de la théorie de l'assurance automobile.

* * *

https://doi.org/10.1017/S0515036100007509 Published online by Cambridge University Press

Monsieur Philipson a spécifié qu'il est difficile d'admettre que les matrices soient indépendantes de l'année d'assurance considérée. Il est un fait évident que la situation actuelle n'est plus comparable à celle d'il y a vingt ans. On trouvera une autre preuve de la dépendance dans la communication de Monsieur Depoid, où on relève la chute de fréquence des accidents lors de l'affaire de Suez, ce qui met en lumière l'influence de la densité de circulation.

Pour modifier les hypothèses de Fréchet, il faut admettre que les matrices du type p ou du type q sont des fonctions du temps et de prendre par exemple une suite

$$[M_1(\tau)]\ [M_1(\tau+1)]\ \ldots.$$

La chaîne de Markoff n'est plus constante, et cela revient à introduire des systèmes variant d'après l'année d'entrée en assurance. Mais dans ces conditions, on court le risque de subdiviser à tel point le matériel statistique que les chiffres obtenus perdent leur signification. Il n'empêche que même dans ce cas, on pourrait envisager l'existence d'un régime transitoire d'une part, permanent d'autre part.

Ecrit à posteriori quelques jours après le Congrès de La Baule, ce compte-rendu reprend assez fidèlement, nous le pensons, la suite de nos interventions.

Nous croyons utile d'y ajouter une remarque donnant une interprétation de la suite itérée des vecteurs $\overline{V}_n$ (qui converge vers le vecteur propre $\overline{V}$ qui caractérise la matrice limite).

Nous avons indiqué que cette suite peut utilement servir de test pour estimer après combien d'années on atteint le régime permanent.

Dans un tout autre ordre d'idées, et quoique l'hypothèse de Bayes Laplace soit fortement décriée en statistique, admettons à priori le raisonnement suivant: faute d'autre critère de classement nous admettons à priori que tout nouveau client *qui possède, à priori, autant de chance d'être dans l'une des trois catégories*: bon conducteur, malchanceux, mauvais conducteur.

Quelle est alors la probabilité pour qu'il se trouve dans l'une de ces catégories après 1 an, 2 ans, ...n années.

Désignons par

$$\begin{array}{ccc} P_0^1 & P_1^1 & P_2^1 \\ | & | & | \\ P_0^n & P_1^n & P_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

les probabilités correspondantes.

On obtient immédiatement:

$$\begin{aligned} P_0^1 &= \tfrac{1}{3}\, p_{00} + \tfrac{1}{3}\, p_{10} + \tfrac{1}{3}\, p_{20} \\ P_1^1 &= \tfrac{1}{3}\, p_{01} + \tfrac{1}{3}\, p_{11} + \tfrac{1}{3}\, p_{21} \\ P_2^1 &= \tfrac{1}{3}\, p_{02} + \tfrac{1}{3}\, p_{12} + \tfrac{1}{3}\, p_{22} \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$[M_1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^1 \\ P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix}$$

il en résulte $P_0^1\ P_1^1\ P_2^1$ sont précisément les composants du vecteur $\overline{V}_1$.

Un raisonnement identique prouve immédiatement que les composants du vecteur $\overline{V}_n$ sont: $P_0^n\ P_1^n\ P_2^n$ et nous obtenons de la sorte une interprétation de la suite vectorielle itérative indiquée plus haut.

Ne pas admettre l'hypothèse de Bayes Laplace et, pour fixer les idées, tenir compte d'un fichier statistique propre à la compagnie, donc supposer une autre répartition à priori — revient à choisir un autre vecteur initial $\overline{V}_0^1$.

Or, la démonstration de la convergence de la suite $[\overline{V}_n]$ est valable, *quel que soit le vecteur initial* $\overline{V}_0^1$; le vecteur final est toujours le même, c'est le vecteur propre $\overline{V}$ défini par l'équation (4) — (c'est là une conséquence du principe ergodique), c'est le *même régime permanent qui est atteint*, et ce résultat nous semble important.

En finale, on constate que la question principale posée par le travail de Monsieur Fréchet, est de savoir si le principe *ergodique est statistiquement acquis ou non*.

Si oui, les actuaires seraient amenés à:

— subdiviser la période d'assurance en deux phases: une période transitoire, sorte de période de sélection, suivie d'une période de régime permanent où la sélection ne jouerait plus;

— à rechercher à partir de quel moment le régime permanent est acquis.

Les considérations précédentes montrent l'importance du travail de Monsieur le Professeur Fréchet et nous devons lui savoir gré d'avoir posé la question sous cette forme au Congrès de La Baule.

Nous espérons que le travail de Monsieur Fréchet, l'éminent savant qui est à la base de l'analyse générale et de la théorie des espaces abstraits, sera le point de départ de nombreuses études dans le domaine de l'assurance des risques non viagers.