Canad. Math. Bull. Vol. **15** (4), 1972.

# REPRÉSENTATION DES POLYNÔMES POSITIFS SUR [−1, 1]

PAR
RAYMOND LEBLANC

En étudiant certains cônes de fonctionnelles affines positives, nous avons été amenés à considérer les polynômes qui sont positifs sur l'intervalle $[-1, 1]$. En fait, la fonctionnelle affine

$$f(x) = A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n+A_{n+1}$$

est positive sur l'enveloppe convexe fermée $K$ de la courbe $(t, t^2, \ldots, t^n) \subseteq R^n$ pour $t \in [-1, 1]$ si et seulement si le polynôme

$$P(t) = A_1t+A_2t^2+\cdots+A_nt^n+A_{n+1}$$

est positif sur $[-1, 1]$.

Dans un espace vectoriel $V$, $C$ est un cône de sommet $O$ si $O \in C$, $x$ et $y \in C \Rightarrow x+y \in C$ et $\lambda>0$, $x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$. Une demi-droite $D \subseteq C$ d'origine $O$ est une génératice extrémale si pour tout $x \in D$, $x=y+z$, $y \in C$, $z \in C$, implique $y \in D$ et $z \in D$. Un cône est dit saillant s'il ne contient aucune des droites passant par son sommet. On sait [2, p. 167] qu'un cône saillant est l'enveloppe convexe de ses génératices extrémales.

Soit $P_n$ l'ensemble des polynômes $P(t)$ de degré $\leq n$ tels que pour $t \in [-1, 1]$, on ait $P(t) \geq 0$. L'ensemble $P_n$ est un cône convexe de sommet $O$. Ses génératices extrémales sont caractérisées par le théorème suivant.

THÉORÈME. *Un polynôme $P(t) \in P_n$ est sur une génératrice extrémale si et seulement si son degré est précisément égal à $n$, tous ses zéros sont dans* $[-1, 1]$ *et ses zéros situés dans* $(-1, 1)$ *sont d'ordre pair.*

Ce théorème se trouve dans [1]. Le but de notre article est d'en présenter une démonstration beaucoup plus simple.

Puisque $P(t)$ et $-P(t)$ ne peuvent être tous deux positifs sur $[-1, 1]$, le cône $P_n$ est saillant et nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Tout polynôme $P(t)$ de degré $\leq n$, positif sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *peut s'écrire sous la forme*

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i(t)$$

*où les polynômes $P_i(t)$ sont extrémaux dans $P_n$ et $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.*

Un polynôme est extrémal s'il est situé sur une génératrice extrémale.

**Démonstration du Théorème.** Remarquons d'abord que si $P \in P_n$ est de degré inférieur à $n$, alors $P$ n'est pas sur une génératrice extrémale. En effet, considérons

$$Q_1(t) = \tfrac{1}{2}(1-t)P(t)$$
$$Q_2(t) = \tfrac{1}{2}(1+t)P(t);$$

alors $Q_1, Q_2 \in P_n$, $Q_1 \neq \lambda P$, $Q_2 \neq \lambda P$ et

$$P(t) = Q_1(t) + Q_2(t).$$

Une autre condition nécessaire pour que $P \in P_n$ se trouve sur une génératrice extrémale est qu'il possède au moins un zéro dans l'intervalle $[-1, 1]$. Sinon, sachant que $P(t) > 0$ sur $[-1, 1]$, on peut trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, sur l'intervalle $[-1, 1]$, $\tfrac{1}{2}\{P(t) \pm \varepsilon\} > 0$. Puisque

$$P(t) = \tfrac{1}{2}\{P(t)+\varepsilon\} + \tfrac{1}{2}\{P(t)-\varepsilon\},$$

on conclut que $P(t)$ n'est pas extrémal.

Observons aussi que les zéros d'un polynôme $P(t) \in P_n$ qui sont situés dans $(-1, 1)$ sont de multiplicité paire. En fait, si $\alpha_i \in (-1, 1)$ est un zéro de $P(t)$ d'ordre $K_i$, alors

$$P(t) = (A_i + \phi(t))(t-\alpha_i)^{K_i}$$

où $A_i \neq 0$ et $\phi(t) \to 0$ lorsque $t \to \alpha_i$; de telle sorte que si $K_i$ est impair, $P(t)$ change de signe de part et d'autre du point $\alpha_i$.

Enfin, soit $P(t)$ un polynôme extrémal. Nous allons montrer que tous ses zéros sont dans $[-1, 1]$. Soient $-1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_l < 1$ les zéros de $P(t)$ dans $[-1, 1)$, $\alpha_i$ étant d'ordre $K_i$. Soit $K_{l+1} \geq 0$ l'ordre du zéro que $P(t)$ possède au point 1. Considérons le polynôme

$$Q(t) = (1-t)^{K_{l+1}} \prod_{i=1}^{l} (t-\alpha_i)^{K_i}.$$

Ce dernier appartient à $P_n$. La fonction continue $R(t) = P(t)/Q(t)$ est strictement positive sur l'intervalle compact $[-1, 1]$. Si $\lambda > 0$ est son minimum sur cet intervalle, alors $\lambda Q(t)$ et $P(t) - \lambda Q(t)$ appartiennent à $P_n$ et leur somme est $P(t)$. Puisque $P(t)$ est extrémal, $\lambda Q(t)$ l'est aussi. Par suite, son degré est égal à $n$. Donc tous les zéros de $P(t)$ se trouvent dans $[-1, 1]$.

Réciproquement, il est facile de voir qu'un polynôme de $P_n$, $P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $a_n \neq 0$, dont tous les zéros sont dans $[-1, 1]$ est extrémal.

Je tiens à remercier le professeur Serge Dubuc pour ses suggestions et son encouragement.

## Bibliographie

1. S. Karlin et L. S. Shapley, *Geometry of moment spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc., **12,** 1953.

2. R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

Université du Québec,
Trois-Rivières, Québec