CONTRIBUTION A L'ETUDE DU PROBLEME DES TIMBRES POSTE

JACQUES TOUCHARD

On demande le nombre S_n de manières dont on peut replier une bande de n timbres-poste (TP) sur un seul timbre. Dans le graphique de Sainte Lagüe (graphique SL) [3, p. 39], les liaisons entre timbres ne doivent pas se couper (fig. 1). Nous supposerons toujours que le timbre 1 occupe la première place à gauche, car si P_n est, dans ce cas, le nombre de permutations bonnes, on aura $S_n = nP_n$. Nous supposerons de plus que la liaison (1, 2) est au-dessus de l'axe. Nous appellerons arc pair ou couple pair un arc $(\alpha, \alpha + 1)$ où α est pair; arc impair ou couple impair un arc $(\alpha, \alpha + 1)$ où α est impair. Nous appellerons aussi permutation inverse de $g = |1, a, b, \ldots, p, q|$, la permutation $g' = |1, q, p, \ldots, b, a|$.

Dans le §**1** de ce travail, j'indique une méthode qui divise le problème en plusieurs autres. Les §§**2** et **3** m'ont été inspirés par la lecture d'une très intéressante brochure de M. Albert Sade, parue récemment. Le §**3** met en jeu, pour la première fois dans cette question, des groupes d'operations. Dans le §**4**, j'aborde, sans parvenir à le résoudre, un problème de configurations plus simple que celui des TP. La méthode suivie contient une notion, celle des systèmes propres, qui pourra, je pense, être utilisée dans le problème des TP lui-même et je crois aussi que la solution du problème plus simple, en dehors de son intérêt propre, pourrait ouvrir une voie toute différente et moins épineuse pour traiter le problème des TP. Le §**5** donne quelques tables numeriqués. Les valeurs de P_n, jusqu'à $n = 10$, ont été obtenues par M. H. W. Becker, d'Omaha, Nebraska et par moi-même. Celles de P_{11} et de P_{12} sont dûes exclusivement à M. A. Sade.

J'ai rassemblé dans ce mémoire l'essentiel de ce que je connais sur le problème des TP, en laissant toutefois de côté la représentation de certaines configurations par des substitutions de n lettres, qui exigerait de longs développements.

Sauf dans les §§**2** et **3**, je n'ai presque pas donné de démonstrations, celles-ci étant fort longues et exigeant de nombreuses figures, et aussi parce que j'espère pouvoir revenir sur la question avec des résultats plus avancés.

1. En nous référant au graphique SL, nous appellerons point double de première espèce l'intersection de deux arcs, $(\alpha, \alpha + 1) \times (\beta, \beta + 1)$, de même parité, $\beta - \alpha = 2, 4, \ldots$. Rabattons le demi-plan inférieur à l'axe sur le

Reçu le 7 juin, 1949.

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

demi-plan supérieur, nous obtenons un graphique (Γ), fig. 2. Nous appellerons point double de 2^e espèce ou point double fictif (p.d.f.) l'intersection de deux arcs $(\alpha, \alpha + 1) \times (\beta, \beta + 1)$ de parité différente, $\beta - \alpha = 3, 5, 7, \ldots$. Le problème des TP revient à chercher quel est le nombre des permutations qui ne contiennent aucun point double de première espèce, que nous appellerons permutations bonnes, et c'est, en somme, un des problèmes fondamentaux que pose la théorie des permutations. Dans le graphique (Γ) nous supposerons toujours que la permutation est bonne; on n'aura donc pas de point

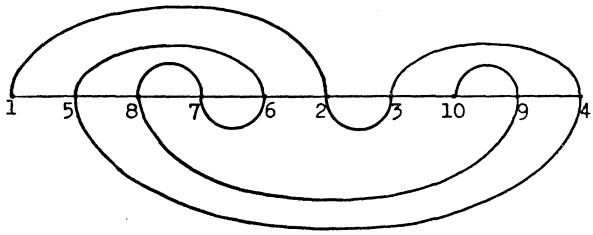

Figure 1

double de 1^e espèce, mais on peut avoir $0, 1, 2, \ldots$ p.d.f. et, si $T_k{}^n$ est le nombre des figures qui présentent k p.d.f., on aura

$$P_n = T_0{}^n + T_1{}^n + T_2{}^n + \ldots .$$

On a évidemment

$$T_0{}^n = 2^{n-2} \tag{1}$$

puisque dans le graphique (Γ), il y a toujours deux places disponibles pour un nouveau timbre. Lorsqu'il y a k p.d.f., il se peut qu'aucun des arcs $(1, 2) - (2, 3) - (3, 4) - \ldots - (\alpha-1, \alpha)$ ne soit coupé et que l'arc $(\alpha, \alpha+1)$ soit coupé. Dans ce cas, il est coupé par un ou plusieurs arcs $(\beta, \beta + 1)$, $(\gamma, \gamma + 1), \ldots$ où $\beta > \alpha + 1$, $\gamma > \alpha + 1, \ldots$. On peut alors assimiler l'ensemble des timbres $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, ... à un seul $(\alpha + 1)^{\text{ème}}$ timbre et, d'après (1), il y a $2^{\alpha+1-2} = 2^{\alpha-1}$ dispositions sans p.d.f. des timbres $1, 2, \ldots,$ $\alpha + 1$. Supprimons maintenant les timbres $1, 2, \ldots, \alpha - 1$; le timbre α devient le premier timbre et nous avons la proposition suivante: si a_k^n est le nombre des figures du graphique (Γ), relatives à n timbres, dans lesquelles le premier arc est coupé, on a

$$T_k{}^n = a_k^n + 2\, a_k^{n-1} + \ldots + 2^h\, a_k^{n-h} + \ldots . \tag{2}$$

On peut raisonner de même sur les deux timbres extrêmes $n - 1$ et n, ce qui donnera pour a_k^n une expression entièrement analogue à (2) et l'on démontre ainsi le théorème suivant:

$$T_k{}^n = d_k^n + 2.2\, d_k^{n-1} + \ldots + i\,.\,2^{i-1}\, d_k^{n-i+1} + \ldots ,$$

où d_k^n est le nombre des figures du graphique (Γ), relatives à n timbres et

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

dans lesquelles le premier et le dernier arcs sont coupés. Ce théorème a une signification physique si l'on se représente une pile de TP repliés sur le premier. Il simplifie un peu la recherche de $T_k{}^n$ et l'on trouve

$$T_1{}^n = (n-4)\,2^{n-4} + (n-6)\,2^{n-6} + (n-8)\,2^{n-8} + \dots,$$

$$T_2{}^n = \frac{n-1}{2}\,[(n-6)\,2^{n-6} + 2(n-8)\,2^{n-8} + \dots + (i-2)(n-2i)\,2^{n-2i} + \dots].$$

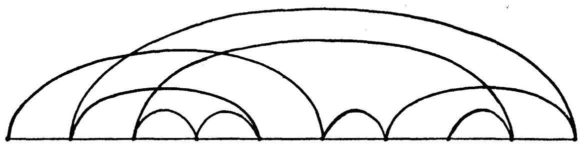

FIGURE 2

On a aussi

$$9\,T_1{}^n = (3n-14)\,2^{n-2} + 9 + (-1)^{n-1},$$

$$108\,T_2{}^n = (n-1)[(3n-22)\,2^{n-1} + 27(n-1) + (-1)^{n-1}(3n-11)].$$

La recherche de $T_3{}^n$ serait plus difficile et déjà celle de $T_2{}^n$ exige des précautions, parce qu'il arrive que l'existence de 2 p.d.f. entraîne obligatoirement celle d'un troisième et même d'un quatrième p.d.f.

Je n'ai pas recherché d'une manière définitive le nombre maximum de p.d.f. que peut présenter une permutation bonne. Je note seulement ceci:

Soit $n = 4\lambda + 1$, la permutation

$$|1|4, 8, \dots, n-1|n-2, n-6, \dots, 3|2, 6, \dots, n-3|n, n-4, \dots, 9, 5|.$$

Soit $n = 4\lambda + 3$, la permutation

$$|1|4, 8, \dots, n-3|n, n-4, \dots, 3|2, 6, \dots, n-1|n-2, n-6, \dots, 9, 5|$$

et leurs inverses donnent chacune $\frac{1}{8}(n-1)(n-3)$ p.d.f. J'ai divisé ces permutations en tranches qui sont des progressions arithmétiques de raison $+4$ ou -4.

Soit $n = 4\lambda$, la permutation

$$|1|4, 8, \dots, n-8|n-1, n-4, n-5, n|n-9, n-13, \dots, 3|$$
$$|2, 6, \dots, n-6|n-3, n-2|n-7, n-11, \dots, 9, 5|.$$

Soit $n = 4\lambda + 2$, la permutation

$$|1|4, 8, \dots, n-6|n-3, n-2|n-7, n-11, \dots, 3|2, 6, \dots, n-8|$$
$$|n-1, n-4, n-5, n|n-9, n-13, \dots, 9, 5|$$

et leurs inverses donnent chacune $\frac{1}{8}(n-2)(n-4) + 1$ p.d.f. J'ai divisé ces

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

permutations en 7 tranches; la 2^e, la 4^e, la 5^e et 7^e sont des progressions arithmétiques de raison $+4$ ou -4. D'après cela, le mathématicien qui résoudra le problème des TP doit vraisemblablement s'attendre à voir apparaître des séries dans le genre de $\sum_0^\infty a_n z^n x^{n^2}$, c'est-à-dire des séries qui se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques ou dans la théorie des partitions.

2. En revenant au graphique SL, M. A. Sade [2] a introduit une fonction que nous appellerons $A(n, x)$, égale au nombre des permutations bonnes de n timbres, commençant par 1 et où x occupe la seconde place et il a remarqué que

$$A(n, 3) = A(n, 4) = P_{n-2}.$$

Je me propose de montrer que

$$A(n, 2k) = A(n, 2k-1), \qquad n \geqslant 2k. \tag{3}$$

1°) *Opération* $\Omega_1(\alpha)$.

Ayant une permutation bonne $g = |1, \ldots . \lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \ldots|$ je laisse 1 immobile et, sur les éléments restants, je fais une substitution circulaire, de gauche à droite, à partir d'une origine α que je place immédiatement à droite de 1, de facon à obtenir $|1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu|$. Les liaisons entre ces éléments ne sont pas modifiées et la seule chose qui puisse arriver c'est que l'arc $(1, 2)$ soit coupé par un ou plusieurs arcs impairs. Or ceci n'arrivera pas si, entre 1 et α, origine de la substitution circulaire, il y a zéro ou un nombre entier de couples impairs. Cette condition est nécessaire et suffisante. Si n est impair, la position du dernier timbre n est indifférente, car, alors, l'arc impair $(n, n+1)$ n'existe pas.

2°) *Opération* $\Omega_2(\alpha)$.

Même définition que pour $\Omega_1(\alpha)$, la substitution circulaire étant faite de droite à gauche, de facon à obtenir: $|1, \alpha, \mu, \lambda, \ldots, \gamma, \beta|$. Appelons conjugué α' de α le nombre $\alpha' = 2k$, si $\alpha = 2k-1$ et $\alpha' = 2k-1$, si $\alpha = 2k$. Pour que la permutation $g\Omega_2(\alpha)$ soit bonne, il faut et il suffit qu'à gauche de α se trouvent son conjugué α' et zéro ou un nombre entier de couples impairs. Si n est impair, la place du timbre n est indifférente. L'opération Ω_2 revient à faire l'opération Ω_1 sur la permutation inverse de g. Comme exemple, soit la permutation bonne

$$g = |1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 8, 11, 10, 9, 12|.$$

On a:

$$\begin{aligned}
g\Omega_1(6) &= g,\\
g\Omega_1(4) &= |1, 4, 3, 2, 7, 8, 11, 10, 9, 12, 6, 5|,\\
g\Omega_1(2) &= |1, 2, 7, 8, 11, 10, 9, 12, 6, 5, 4, 3|,\\
g\Omega_1(7) &= |1, 7, 8, 11, 10, 9, 12, 6, 5, 4, 3, 2|,\\
g\Omega_1(11) &= |1, 11, 10, 9, 12, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 8|,
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

qui sont toutes bonnes, de même que $g\Omega_2(5)$, $g\Omega_2(3)$, $g\Omega_2(2)$, $g\Omega_2(8)$ et $g\Omega_2(12) = g'$, inverse de g.

Pour l'opération $\Omega_1(\alpha)$, on peut toujours prendre comme origine α le timbre 2 et aussi le timbre situé immédiatement à droite de 2. Pour l'opération $\Omega_2(\alpha)$, on peut toujours prendre comme origine α le timbre 2, le timbre situé immédiatement à gauche de 2 et le dernier timbre à droite. Il y a P_{n-1} permutations bonnes où 2 occupe la place 2 et P_{n-1} permutations bonnes où 2 occupe la place n. On a donc la proposition suivante:

Parmi les $P_n - 2P_{n-1}$ permutations bonnes ou 2 n'occcupe ni la place 2 ni la place n, il y a au moins 3 permutations qui présentent le même ordre circulaire de leurs éléments, et au moins 3 permutations qui présentent l'ordre circulaire inverse.

Quant à l'égalité (3), sa démonstration est immédiate. En effectuant l'opération $\Omega_2(2k)$ sur les permutations $A(n, 2k-1)$, on obtient les $A(n, 2k)$ et, en effectuant l'opération $\Omega_2(2k-1)$ sur les permutations $A(n, 2k)$ on obtient les $A(n, 2k-1)$. Il est clair, en effet, que si $2k-1$ occupe la 2^e place, $2k-1$ et $2k$ se trouvent sous l'arc (1, 2) et l'arc $(2k-1, 2k)$ recouvre zéro ou un nombre entier d'arcs impairs. Il y a donc correspondance "one-one" entre les permutations $A(n, 2k)$ et les permutations $A(n, 2k-1)$.

3. M. Sade a également introduit une fonction que nous appellerons $B(n, i)$ et qui, dans le graphique SL, relatif à n timbres est égale au nombre i de places disponibles pour un $(n+1)^{ème}$ timbre. Il a montré que le maximum r de i est $r = \nu + 1$, si $n = 2\nu$ ou $2\nu + 1$; que $B(2\nu, r) = 2^{\nu-1}$, $B(2\nu+1, r) = 2^{\nu}$; et il a imaginé un procédé pour former les permutations bonnes, donnant le maximum r de places disponibles. Nous modifierons et complèterons ce procédé et adopterons les définitions suivantes:

Soit g une permutation des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, commencant par 1. Si, dans g, il existe un ensemble E formé par $\beta - \alpha + 1$ nombres successifs $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots, \beta$, dans un ordre quelconque, nous désignerons par $\rho(\alpha, \beta)$ l'opération qui consiste à renverser l'ordre des éléments de E, sans modifier ceux qui précèdent ou qui suivent E. Par exemple, si

$$g = |1, 2, 3, 9, 10, 8, 7, 5, 6, 4|,$$

on aura

$$g\rho(7, 10) = |1, 2, 3, 7, 8, 10, 9, 5, 6, 4|,$$
$$g\rho(4, \;\; 7) = |1, 2, 3, 9, 10, 8, 4, 6, 5, 7|.$$

L'opération $\rho(\alpha, \beta)$ ne serait pas définie si, entre des éléments de l'ensemble E, se trouvaient des nombres $< \alpha$ ou $> \beta$. Lorsque $\beta = n$, j'écrirai plus simplement $\rho(\alpha, n) = \rho(\alpha)$ et l'opération $\rho(\alpha)$ consiste à renverser l'ordre de tous les nombres $\geqslant \alpha$, supposés réunis dans un même ensemble. L'opération $\rho(1)$ est exclue.

Cela étant, partant de la permutation naturelle $H = |1, 2, 3, \ldots, n|$, les opérations $\rho(2)$, $\rho(3)$, $\rho(4), \ldots, \rho(n-1)$ et $\rho(n) = 1$ forment la base d'un groupe abélien G_0, d'ordre 2^{n-2}, dont toutes les opérations sont d'ordre 2. L'opération $\rho(\alpha)$, appliquée à H, revient à transposer α et l'ensemble $\alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, n$ en renversant l'ordre des éléments de cet ensemble. G_0 est donc isomorphe à un groupe de substitution de $2n - 4$ lettres dont les éléments générateurs sont $n - 2$ transpositions sans lettres communes.

L'ensemble des permutations HG_0 est formé par les permutations sans point double fictif du §**1**, car aucune opération de G_0 ne peut créer de p.d.f. si elle est appliquée à une permutation sans p.d.f.

En prenant un certain nombre d'operations $\rho(a_1), \rho(a_2), \ldots, \rho(a_q)$ et l'opération identique, on forme un sous-groupe invariant de G_0 d'ordre 2^q.

En ce qui concerne le nombre i de places disponibles pour le $(n + 1)^{ème}$ timbre, la permutation H en donne évidemment le nombre maximum $i = r$. Or on verra facilement que:

(A) l'opération $\rho(2)$ n'enlève aucune place disponible.

(B) si $n = 2\nu$, les opérations $\rho(2p)$ n'en enlèvent aucune; l'opération $\rho(2p + 1)$ enlève p places disponibles et si, dans une opération du groupe G_0, figure le produit

$$\rho(2k_1 + 1)\, \rho(2k_2 + 1) \ldots \rho(2k_q + 1), \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_q,\ k_q \neq 0$$

il y aura, pour le $(n + 1)^{ène}$ timbre, $i = r - k_q = \nu + 1 - k_q$ places disponibles.

(C) si $n = 2\nu + 1$, les opérations $\rho(2p + 1)$ n'enlèvent aucune place disponible; l'opération $\rho(2p)$ enlève $p - 1$ places et si, dans une opération de G_0, figure le produit

$$\rho(2k_1)\ \rho(2k_2) \ldots \rho(2k_q), \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_q,\ k_q \neq 0$$

il y aura, pour le $(n + 1)^{ème}$ timbre, $i = r - k_q + 1 = \nu + 2 - k_q$ places disponibles.

De sorte que, parmi les 2^{n-2} permutations sans p.d.f. du §**1**, il y en a:

si $n = 2\nu$, $2^{\nu-1}$ qui donnent $i = r = \nu + 1$
et $2^{\nu+m-1}$ qui donnent $i = \nu - m$ $\quad (m = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2)$,

si $n = 2\nu + 1$, 2^{ν} qui donnent $i = r = \nu + 1$
et $2^{\nu+m}$ qui donnent $i = \nu - m$ $\quad (m = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2)$.

Les permutations de M. Sade, qui donnent $i = r$, sont donc celles qu'on obtient en appliquant à la permutation naturelle H les opérations du sous-groupe de G_0 engendré par $\rho(2), \rho(4), \rho(6), \ldots, \rho(2\nu - 2), \rho(2\nu)$, si $n = 2\nu$ et par $\rho(2), \rho(3), \rho(5), \ldots, \rho(2\nu - 1), \rho(2\nu + 1)$, si $n = 2\nu + 1$.

On peut remarquer d'ailleurs et sans entrer dans le détail, que l'on obtient les permutations de M. Sade en considérant soit les couples impairs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ où $\alpha_i = (2i - 1, 2i)$ soit les couples pairs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, où $\beta_i = (2i, 2i + 1)$ auxquels on adjoint le couple fictif $\beta_0 = (0, 1)$, et en pratiquant les opérations d'un groupe G'_0, analogue à G_0, sur les indices des couples. En outre, il y a certaines transpositions à faire au sein des couples. C'est là la vraie raison pour laquelle le nombre i de places disponibles garde sa valeur maximum $i = r$. Les opérations du groupe G'_0 sont même les seules opérations qu'on puisse effectuer sur les couples pairs ou impairs sans créer de points doubles de première espèce.

Je serai beaucoup plus succinct en ce qui concerne les permutations qui, dans le graphique (Γ), ont un p.d.f. Il faut d'abord observer qu'appliquée à la permutation naturelle H, l'opération $\rho(\alpha, \beta)$ interdit d'effectuer les opérations $\rho(\alpha + 1), \rho(\alpha + 2), \ldots, \rho(\beta)$, à moins, bien-entendu, que $\beta = n$, nombre de timbres, auquel cas $\rho(\alpha, n) = \rho(\alpha)$. On a alors la proposition suivante:

Les opérations engendrées par la base

$$\rho(2), \rho(3), \ldots, \rho(\alpha), \rho(\beta + 1), \rho(\beta + 2), \ldots, \rho(n)$$

et $\rho(\alpha, \beta)$, où $\beta - \alpha$ est pair, forment un groupe abélien G, d'ordre $2^{n-1-\beta+\alpha}$, dont tous les éléments sont d'ordre 2. Ces opérations, appliquées à la permutation H, conservent la séquence $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \beta$, dans l'ordre naturel ou dans l'ordre inverse. Celles qui ne contiennent pas $\rho(\alpha, \beta)$ ne produisent aucun p.d.f. et forment un sous-groupe de G. Celles qui contiennent $\rho(\alpha, \beta)$ produisent l'unique point double de 2^e espèce $(\alpha - 1, \alpha) \times (\beta, \beta + 1)$. On retrouve ainsi la valeur de $T_1{}^n$, donnée au §**1**.

Quant aux permutations qui offrent $r - 1$ places disponibles pour le $(n+1)^{\grave{e}me}$ timbre, on peut les obtenir au moyen du produit de deux opérations $\rho(\alpha, \beta)$, compatibles entre elles, et des opérations $\rho(\lambda)$, compatibles avec les précédentes. Ceci exigerait d'assez longues explications et je me bornerai à donner la valeur de $B(n, r - 1)$, savoir

$$B(2\nu, r - 1) = B(2\nu, \nu) = (\nu - 1)2^{\nu-1} + (\nu - 2)2^{\nu-2} + (\nu - 3)2^{\nu-3} + \ldots + 2,$$
$$B(2\nu + 1, r - 1) = B(2\nu + 1, \nu)$$
$$= (2\nu - 1)2^{\nu-1} + (2\nu - 3)2^{\nu-2} + (2\nu - 5)2^{\nu-3} + \ldots + 5.2^2 + 3.2.$$

4. Ayant $2n$ places ou $2n$ nombres $1, 2, \ldots, 2n$, dans l'ordre naturel sur un axe, on relie les places, deux à deux, par des arcs convexes, chaque place n'étant touchée que par un seul arc. On obtient ainsi un graphique (fig. 3) analogue au graphique (Γ) du §**1**.

Le nombre des configurations possibles est

$$p_{2n} = 1.3.5 \ldots (2n - 1)$$

et l'on demande le nombre $U_{2n}(p)$ de celles qui ont p points doubles.

On peut d'abord ranger les configurations suivant une suite bien ordonnée. On verra, en effet, que, pour $2n$ places, chaque configuration peut être representée d'une seule manière par l'expression

$$a_2 p_{2n-2} + a_4 p_{2n-4} + \ldots + a_{2n-2} p_2 + 1, \qquad a_{2k} \leqslant 2n - 2k \tag{4}$$

qui prend toutes les valeurs entières de 1 à p_{2n}, inclusivement, grâce à l'identité

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

$$p_{2n} = (2n-2)p_{2n-2} + (2n-4)p_{2n-4} + \ldots + 2p_2 + 1.$$

L'expression (4) doit toujours se terminer à droite par l'unité, de sorte qu'il n'y a aucune ambiguité. La configuration de la fig. 3 a pour numéro le nombre $4p_8 + p_6 + p_4 + p_2 + 1 = 440$. Inversement, ayant un nombre m, $1 \leqslant m \leqslant p_{2n}$ et sachant qu'il s'agit d'une configuration de $2n$ places ou de n arcs, on mettra m sous la forme (4) et on en déduira une configuration unique.

La première idée qui vient à l'esprit serait de déterminer le nombre des points doubles d'après la valeur des coefficients a_{2p}. J'ai du y renoncer.

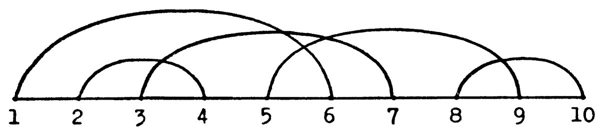

FIGURE 3

Une fois la fonction $U_{2n}(p)$ déterminée, on aura une vérification numérique, puisqu'on doit avoir l'identité

$$p_{2n} = U_{2n}(0) + U_{2n}(1) + \ldots + U_{2n}\binom{n}{2}$$

où $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ est le nombre maximum de points doubles. C'est là une vérification qui ne se présente pas dans le problème des TP, puisque P_n n'est pas connu, sauf pour les premières valeurs de n.

Posons

$$(5) \qquad f_p(x) = U_0(p) + U_2(p)x^2 + U_4(p)x^4 + \ldots + U_{2n}(p)x^{2n} + \ldots .$$

Ce sont les fonctions $f_p(x)$ qu'il faut trouver. Il est bien connu qu'en faisant par convention $U_0(0) = 1$, on a

$$2x^2 f_0(x) = 1 - (1-4x^2)^{\frac{1}{2}}$$

et les nombres $U_{2n}(0)$ sont appelés nombres de Segner. Pour rechercher $f_p(x)$, $p > 0$, j'aurai recours à la notion de système d'arcs que M. A. Errera [1] a imaginée dans le cas des configurations sans points doubles. En généralisant l'idée de cet auteur, nous dirons que deux arcs C_1 et C_2 appartiennent à un même système si l'un recouvre l'autre ou si l'un coupe l'autre, ou si un troisième arc C_3 recouvre C_1 et C_2 ou les coupe tous les deux ou, encore, coupe l'un d'eux et recouvre l'autre. On peut dire aussi qu'un système est un ensemble d'arcs, reliant des points deux à deux et tel que tout point du système, sauf ses deux points extrêmes, soit recouvert par un arc.

Lorsqu'un système S_1 est recouvert par un arc d'un système S_2 et qu'aucun arc de S_1 n'est coupé par aucun arc de S_2, S_1 et S_2 forment un système S, dont S_1 est un sous-système.

Nous dirons qu'un système est *propre*, lorsqu'il ne contient pas de sous-

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

système. Un système à p points doubles est propre à $2n$ places, lorsqu'il figure dans les configurations de $2n$ places et qu'il ne figure pas dans les configurations de $2n - 2$ places. Soit

$$\sigma_{2n}(p) \tag{6}$$

le nombre des systèmes propres à p points doubles et $2n$ places, on a $\sigma_{2n}(p) = 0$ si $2n > 2p + 2$. En effet le système

$$(1, 3)(2, 5)(4, 7)(5, 8) \dots (2n - 4, 2n-1)(2n-2, 2n)$$

présente $n - 1$ points doubles et l'on reconnait aisément qu'il ne peut exister de système propre plus long que celui-là. On peut appeler systèmes longs les systèmes propres à p points doubles et à $2p+2$ places. Comme, d'autre part, le nombre maximum de points doubles est $\frac{1}{2}n(n - 1)$, il n'existe de systèmes propres à p points doubles que pour

$$1 + (1 + 8p)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2n \leqslant 2p + 2.$$

J'aurai maintenant besoin des séries suivantes:

$$g_p(y) = \sigma_2(p)y^2 + \sigma_4(p + 1)y^4 + \dots + \sigma_{2\mu}(p + \mu - 1)y^{2\mu} + \dots , \tag{7}$$

$$G(y, z) = g_0(y) + z^2 g_1(y) + \dots + z^{2k} g_k(y) + \dots , \tag{8}$$

où y et z sont deux variables indépendantes quelconques et nous poserons en outre

$$y(x, z) = xf_0(x)z + \dots + xf_n(x)\, z^{2n+1} + \dots . \tag{9}$$

Cela étant, on trouve, par un calcul assez long, mais sans difficulté, que

$$\begin{aligned}
f_1 &= \sigma_2(0)x^2(2f_0f_1) + \sigma_4(1)x^4f_0^4, \\
f_2 &= \sigma_2(0)x^2(2f_0f_2 + f_1^2) + \sigma_4(1)x^4(4f_0^3f_1) + \sigma_6(2)x^6f_0^6, \\
f_3 &= \sigma_2(0)x^2(2f_0f_3 + 2f_1f_2) + \sigma_4(1)x^4(4f_0^3f_2 + 6f_0^2f_1^2) \\
&\qquad + \sigma_6(2)x^6(6f_0^5f_1) + \sigma_6(3)x^6f_0^6 + \sigma_8(3)x^8f_0^8, \\
f_4 &= \quad \dots , \qquad \dots ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, si l'on substitue la série (9) dans (7) et (8),

(10) $\quad f_p(x)$ est, pour $p = 1, 2, 3, \dots$ le coefficient de z^{2p+2} dans $G(y, z)$.

Or, d'une part, d'après (9),

$$zy(x, z) = xf_0z^2 + x(f_1z^4 + f_2z^6 + f_3z^8 + \dots); \tag{11}$$

d'autre part, si on développe $G[y(x, z), z]$ suivant les puissances de z^2, on aura d'abord le terme $x^2f_0^2z^2$, puis, d'après (10), les termes $f_1z^4 + f_2z^6 + f_3z^8 + \dots$ de sorte que

$$G[y(x, z), z] = x^2f_0^2z^2 + f_1z^4 + f_2z^6 + f_3z^8 + \dots , \tag{12}$$

et, en comparant (11) et (12) et remarquant que $x^2f_0^2 = f_0 - 1$, on obtient l'équation, d'apparence très simple,

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

$$zy = xz^2 + xG(y, z), \tag{13}$$

qui définira la fonction $y(x, z)$, lorsque la fonction $G(y, z)$, où y et z sont maintenant deux variables indépendantes quelconques, sera connue. L'équation (13) est fondamentale dans cette théorie. La racine y, qui s'annule avec x, pourra, sous réserve de la question de convergence, être développée par la série de Lagrange.

Ainsi, la détermination de $U_{2n}(p)$ est ramenée à celle des séries $g_p(y)$, c'est-à-dire à celle du nombre des système propres. Cette détermination est très difficile, tout au moins pour l'auteur de ce mémoire. Les calculs sont d'une extrême complication et je ne suis pas encore parvenu à un résultat général. Une des difficultés du problème est qu'on manque, en quelque sorte, de données expérimentales qui permettraient de rectifier des erreurs presque inévitables lorsqu'on tient compte de la complexité des figures. En effet, déjà pour $2n = 12$, le nombre des configurations dépasse dix mille et il est pratiquement impossible de tracer dix mille figures.

La détermination la plus facile est celle du nombre $\sigma_{2p}(p-1)$ des systèmes propres longs, grace à la propriété suivante: lorsque deux arcs C_1 et C_2 sont coupés par un même arc C_3, un quatrième arc C_4 ne peut couper que C_1 ou que C_2, car si C_4 les coupait tous les deux, on aurait 2 points doubles de plus et seulement 2 places de plus, de sorte que l'on n'aurait plus un système long. On trouve ainsi que $g_0(y)$ satisfait à l'équation

$$g_0^3(y) - y^2 g_0(y) + y^4 = 0, \tag{14}$$

et, en développant la racine qui s'annule avec y par la série de Lagrange, on obtient

$$\sigma_{2p}(p-1) = \frac{(3p-3)!}{(p-1)!(2p-1)!}, \qquad p \geqslant 1.$$

La détermination de $g_1(y)$ est plus ardue. On trouve que $g_1(y)$ est une fonction rationnelle de $g_0(y)$ et on peut la mettre sous la forme, utilisée en algèbre dans la transformation de Tschirnhausen et qui est ici

$$(4y^2 - 27y^4)g_1(y) = 9y^6 + (4y^2 - 30y^4)g_0(y) + (25y^2 - 4)g_0^2(y). \tag{15}$$

On peut obtenir ainsi une équation aux différences pour les nombres $\sigma_{2p}(p)$, mais il se trouve que si l'on pose $u(y) = g_0(y)/y^2$, l'équation (15) est satisfaite par

$$g_1(y) = \frac{y^4}{3}\frac{d}{dy}(y^3u^6)$$

de sorte que

$$\sigma_{2p}(p) = \frac{(3p-2)!}{(2p+1)!(p-3)!} - \frac{(3p-4)!}{(2p+1)!(p-5)!}$$

$$= 2(2p-3)\frac{(3p-4)!}{(2p)!(p-3)!}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

L'équation du 3^e degré à laquelle satisfait $g_1(y)$ est compliquée et je ne l'écrirai pas. A cet égard, il serait peut-être utile d'avoir recours à la fonction $\wp u$ de Weierstrass, avec les invariants $g_2 = 4y^2$, $g_3 = -4y^4$, c'est-à-dire de poser $g_0(y) = \wp(u; 4y^2, -4y^4)$ de sorte que l'équation (14) prendrait la forme très simple $\wp'(u) = 0$. C'est un artifice que je n'ai pas encore pu essayer.

Avec les valeurs que je possède actuellement des $\sigma_{2n}(p)$, je serais théoriquement en mesure de calculer l'expression des fonctions $f_p(x)$ jusqu'à $p = 6$ inclusivement. J'ai déjà donné l'expression de $f_0(x)$. On a de plus

$$2x^4 f_1(x) = 2x^2 - 1 + (1 - 4x^2 + 2x^4)(1 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$2x^6 f_2(x) = 2x^2 - 3x^4 - 2^{-7}(320x^6 - 880x^4 + 260x^2 + 1)(1 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2^{-7}(1 - 4x^2)^{-3/2}.$$

En développant $(1 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $(1 - 4x^2)^{-3/2}$, on obtient ainsi les valeurs de $U_{2n}(1)$ et de $U_{2n}(2)$ que je donnerai plus loin, mais ces calculs sont très pénibles, déjà pour $f_2(x)$. On peut heureusement s'en passer, au moins provisoirement, en se servant de l'équation fondamentale (13) et en ne conservant dans la fonction $G(y, z)$ que les termes dont on a besoin. Par exemple, pour le calcul de $U_{2n}(3)$, il suffira de réduire $G(y, z)$ à

$$P(y, z) = \sigma_2(0)y^2 + \sigma_4(1)y^4 + \sigma_6(2)y^6 + \sigma_8(3)y^8 + \sigma_6(3)z^2y^6$$
$$= y^2 + y^4 + 3y^6 + 12y^8 + z^2y^6,$$

de sorte que l'équation (13) se réduit à

$$zy = xz^2 + xP(y, z). \tag{16}$$

Si y_1 est la racine de (16) qui s'annule avec x, $f_3(x)$ sera le coefficient de z^3 dans le développement de $P(y_1, z)$ et $U_{2n}(3)$ sera le coefficient de x^{2n} dans $f_3(x)$. Comme, d'après (16),

$$P(y_1, z) = \frac{1}{x} zy_1 - z^2,$$

$U_{2n}(3)$ sera le coefficient de $x^{2n+1}z^7$ dans le développement de y_1, qu'on obtiendra, comme nous l'avons dit par la série de Lagrange.

C'est ainsi que nous avons trouvé les expressions suivantes:

$$U_{2n}(0) = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1},$$

$$U_{2n}(1) = \frac{1}{1}\binom{2n}{n-2},$$

$$U_{2n}(2) = \frac{1}{2}\binom{n+3}{1}\binom{2n}{n-3},$$

$$U_{2n}(3) = \frac{1}{3}\binom{n+5}{2}\binom{2n}{n-4} + \binom{2n}{n-3},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-035-6 Published online by Cambridge University Press

$$U_{2n}(4) = \frac{1}{4}\binom{n+7}{3}\binom{2n}{n-5} + \binom{n+6}{1}\binom{2n}{n-4},$$

$$U_{2n}(5) = \frac{1}{5}\binom{n+9}{4}\binom{2n}{n-6} + \left\{\binom{n+8}{2} - 1\right\}\binom{2n}{n-5} + 4\binom{2n}{n-4},$$

$$U_{2n}(6) = \frac{1}{6}\binom{n+11}{5}\binom{2n}{n-7} + \left\{\binom{n+10}{3} - \binom{n+8}{1}\right\}\binom{2n}{n-6}$$
$$+ \frac{3(3n+25)}{2}\binom{2n}{n-5} + \binom{2n}{n-4}.$$

Ces expressions sont trop peu nombreuses pour que l'on puisse essayer de deviner la forme générale de $U_{2n}(p)$. Les nombres qu'on en déduit sont en accord avec ceux de la table du §**5**, que nous avons obtenus en traçant les configurations jusqu'à $2n = 10$.

Pour terminer cette section, nous indiquerons des configurations particulières pour lesquelles on peut achever le calcul. Ce cas particulier s'est d'ailleurs présenté à nous dans nos tentatives pour attaquer le problème des TP par la théorie des substitutions. Appelons origine d'un arc son extrémité gauche et appelons premier arc d'un système l'arc dont l'origine est située la première à gauche. Nous dirons que tous les points doubles d'un système sont rassemblés sur le premier arc lorsque deux arcs du système ne se coupent que si l'un d'eux est le premier arc.

On demande le nombre $V_{2n}(p)$ des configurations de n arcs, à p points doubles, où, dans chaque système ou sous-système, tous les points doubles, lorsqu'il y en a, sont rassemblés sur le premier arc. On a $V_{2n}(0) = U_{2n}(0)$ et on a aussi $V_{2n}(1) = U_{2n}(1)$, car si le 1^er^ arc d'une configuration K n'est pas coupé, il y a au moins un autre système ou sous-système K' et l'on peut raisonner sur K' comme nous venons de le faire sur K. Mais, pour $p > 1$, $V_{2n}(p)$ est différent de $U_{2n}(p)$.

Posons alors, par analogie avec (5),

$$\varphi_p(x) = V_0(p) + V_2(p)x^2 + \ldots + V_{2n}(p)x^{2n} + \ldots,$$

et, par analogie avec (9),

$$v(x, z) = x\varphi_0(x)z + x\varphi_1(x)z^3 + \ldots + x\varphi_n(x)z^{2n+1} + \ldots.$$

On constate, par un calcul sans difficulté, que $\varphi_1(x)$ est le coefficient de z^4 dans $v^2 + v^4$, c'est-à-dire dans $v^2 + v^4 + v^6 + \ldots = v^2/(1 - v^2)$, puisque ni v^6, ni $v^8, \ldots$ ne contiennent de terme en z^4; d'une façon générale, $\varphi_p(x)$ est, pour $p \geqslant 1$ le coefficient de z^{2p+2} dans

$$H(v) = \frac{v^2}{1 - v^2}.$$

Le calcul des fonctions $\varphi_p(x)$ est alors exactement le même que celui des fonctions $f_p(x)$, mais la fonction de 2 variables $G(y, z)$ est remplacée par la fonction d'une seule variable $H(v)$. L'équation (13) est remplacée par $zv = xz^2 + xH(v)$, c'est-à-dire

$$zv^3 + x(1 - z^2)v^2 - zv + xz^2 = 0,$$

qui, en posant $v = xzw$, devient

$$w - 1 - x^2[(1 - z^2)w^2 + z^2w^3] = 0.$$

En développant la racine qui prend la valeur 1, pour $x = 0$, par la série de Lagrange, on obtient:

$$(-1)^p V_{2n}(p) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{n+k+1} \; \frac{(2n+k)!}{k!(n+k)!(p-k)!\,(n-p)!}.$$

Cette expression doit être nulle pour $p = n$, car il ne peut y avoir, dans ce cas, plus de $n - 1$ points doubles.

5. Tables.

VALEURS DE P_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_n	1	1	2	4	10	24	66	174	504	1406	4210	12196

VALEURS DE T_k^n

$k \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	4	8	16	32	64	128	256
1			0	2	8	26	72	186	456
2					0	6	28	112	360
3					0	2	8	54	208
4						0	2	18	80
5							0	4	28
6							0	2	14
7								0	4

VALEURS DE $U_{2n}(p)$

$2n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1										
4	2	1									
6	5	6	3	1							
8	14	28	28	20	10	4	1				
10	42	120	180	195	165	117	70	35	15	5	1

VALEURS DE $\sigma_{2n}(p)$

$2n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1										
4	0	1									
6	0	0	3	1							
8	0	0	0	12	10	4	1				
10	0	0	0	0	55	77	60	35	15	5	1
12	0	0	0	0	0	273	546	570	?	?	?

Note

La rédaction du présent mémoire était achevée, lorsque divers calculs m'ont conduit à faire la remarque suivante. Parmi les configurations du §4, considérons celles où les origines des n arcs sont fixées aux points $1, 2, 3, \ldots, n$ et où leurs extrémités parcourent les $n!$ permutations des points $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$. Soit, dans ce cas, $r(n, p)$ le nombre des figures qui ont p points doubles. La fonction génératrice des nombres $r(n, p)$ est, comme il est très facile de le démontrer,

$$\begin{aligned}\Pi_n(x) &= (1 + x)(1 + x + x^2) \ldots (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \\ &= \sum r(n, p)\, x^p,\end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs $p = 0, 1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$. On a aussi

$$\Pi_n(x) = \frac{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots (1 - x^n)}{(1 - x)^n}$$

et l'on voit que

$$r(n, p) = r\left(n, \binom{n}{2} - p\right).$$

Il y a là le point de départ d'une nouvelle méthode pour traiter la question du §4. Cette méthode donne la solution du problème au moyen d'une fraction continue qui se rattache aux fonctions θ de Jacobi.

RÉFÉRENCES

[1] A. Errera, *Un problème d'énumération*, Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, Collection in-8° (2) tome 11 (1931).

[2] A. Sade, *Sur les chevauchements des permutations*, Edité chez l'auteur (14 boulevard du Jardin Zoologique, Marseille, France, 1949).

[3] A. Sainte Lagüe, *Les réseaux ou graphes*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule 18 (1926).

Lausanne, Suisse