E. Okassa
Nagoya Math. J.
Vol. 115 (1989), 63–71

RELÈVEMENTS DES STRUCTURES SYMPLECTIQUES ET PSEUDO-RIEMANNIENNES À DES VARIÉTÉS DE POINTS PROCHES

EUGÈNE OKASSA

On considère une variété différentielle M, paracompacte de classe C^∞. Etant donné une algèbre locale A (algèbre commutative unitaire de dimension finie sur $\mathbb{R}$ dont l'idéal maximal m est de codimension 1 sur $\mathbb{R}$), on rappelle qu'un point proche de $x \in M$ d'espèce A est un homomorphisme d'algèbres ξ de $C^\infty(M)$ [algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M] dans A tel que $\xi(f) \equiv f(x) \bmod m$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ [9]. En notant M_x^A l'ensemble des points proches de x d'espèce A, $M^A = \bigcup_{x \in M} M_x^A$ est une variété différentielle de dimension $n \times \dim A$ où $n = \dim M$. Si $A = \mathbb{R}[T_1, \cdots, T_s]/(T_1, \cdots, T_s)^{k+1}$, la variété M^A s'identifie à la variété des jets, $J_0^k(\mathbb{R}^s, M)$, des applications différentiables de classe C^∞ de $\mathbb{R}^s$ dans M ayant $0 \in \mathbb{R}^s$ pour source.

Si f est une fonction de classe C^∞ sur M, $f^A: M^A \to A$ est définie par $f^A(\xi) = \xi(f)$ pour tout $\xi \in M^A$.

§ 1. Relèvement des formes différentielles

On désigne par $\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathrm{N}} \Omega^p(M)$ le $C^\infty(M)$-module gradué des formes différentielles sur M et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M.

PROPOSITION 1. *Etant donné une forme différentielle ω de degré p sur M, il existe une forme différentielle de degré p et une seule ω^A sur M^A à valeurs dans A telle que*

$$\omega^A(a_1 X_1^A, a_2 X_2^A, \cdots, a_p X_p^A) = a_1 \cdots a_p [\omega(X_1, \cdots, X_p)]^A$$

pour tous $a_1, \cdots, a_p$ dans A et $X_1, \cdots, X_p$ dans $\mathfrak{X}(M)$; X^A désigne le prolongement à M^A du champ de vecteurs X sur M.

Démonstration. En chaque point $\xi \in M^A$, les $a.X^A(\xi)$, où $a \in A$ et

Received March 29, 1988.

$X \in \mathfrak{X}(M)$, engendrent l'espace $T_\xi M^A$. Il s'ensuit donc que ω^A est unique. Quant à l'existence, elle est immédiate.

Lorsque $\varphi \in A^*$ est une forme linéaire sur A et ω une forme différentielle sur M, on dira que la forme scalaire $\varphi \circ \omega^A$ est une relevée de ω à M^A. Si ω est une forme différentielle de degré p sur M, si $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une base de A et $(F_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ la base duale, on a:

$$(\varphi \circ \omega^A)(a_1 X_1^A, a_2 X_2^A, \cdots, a_p X_p^A) = \sum_{\alpha \in I} \varphi(a_1 \cdots a_p F_\alpha) F_\alpha^* \circ [\omega(X_1, \cdots, X_p)]^A .$$

EXEMPLE. $M = \mathbb{R}^n$; $A = \mathbb{D}$ l'algèbre des nombres duaux. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ le système de coordonnées canonique sur $\mathbb{R}^n$, $(y_1, \cdots, y_n)$ les coordonnées sur la fibre de $M^{\mathbb{D}} = T\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$. Soit $(1, \varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ avec $\varepsilon^2 = 0$ et $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale. Si $\omega = \sum_{i=1} P_i dx_i$ est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, alors on a;

$$\omega^{\mathbb{D}} = 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n P_i \, dx_i \right) + \varepsilon \otimes \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i + \sum_{i=1}^n P_i \, dy_i \right]$$

$$1^* \circ \omega^{\mathbb{D}} = \sum_{i=1}^n P_i \, dx_i$$

$$\varepsilon^* \circ \omega^{\mathbb{D}} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i + \sum_{i=1}^n P_i \, dy_i$$

Propriétés.

i) $(\omega_1 + \omega_2)^A = \omega_1^A + \omega_2^A$ pour tous ω_1 et ω_2 dans $\Omega(M)$

ii) $(\omega_1 \wedge \omega_2)^A = \omega_1^A \wedge \omega_2^A$ pour tous ω_1 et ω_2 dans $\Omega(M)$

iii) $d(\omega^A) = (d\omega)^A$ pour tout $\omega \in \Omega(M)$: d est l'opérateur de différentiation extérieure.

iv) Pour tout champ de vecteurs X sur M, pour tout $\omega \in \Omega(M)$, et pour tout $a \in A$, on a: $\theta_{aX^A}(\omega^A) = a(\theta_X \omega)^A$ où θ_X est la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs X.

v) Pour toute dérivation δ de A et pour tout $\omega \in \Omega(M)$, on a: $\theta_{\delta_M} \omega^A = - \delta \circ \omega^A$ où δ_M est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation δ [5].

On désigne par μ_A: $A \times A \to A$ la multiplication dans A.

PROPOSITION 2. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique. Etant donné* $\varphi \in A^*$, *on a* $\operatorname{rang}(\varphi \circ \omega^A) = \operatorname{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \dim M$.

Démonstration. En chaque point $\xi \in M^A$, montrons que le noyau de $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)$ est $\ker(\varphi \circ \mu_A) \cdot T_\xi M^A$.

Soit ξ un point proche de $x_0 \in M$ d'espèce A. On suppose $\dim M = 2n$. Soit $(x_1, \cdots, x_{2n})$ un système de coordonnées locales dans un voisinage U de x_0 tel que $\omega/U(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_{i+n}) = 1$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$ et $\omega/U(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = 0$ pour $j \neq i + n$. On considère $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ une base de A et $(a^*_\alpha)_{\alpha\in I}$ la base duale. Soit $X = \sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n\\ \alpha\in I}} \lambda_{i\alpha}\, a_\alpha(\partial/\partial x_i)^A(\xi)$ un vecteur de $T_\xi M^A$ tel que $(\varphi\circ\omega^A)(\xi)(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_\xi M^A$. On a donc

$$\sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n\\ \alpha\in I}} \lambda_{i\alpha}(\varphi\circ\omega^A)(\xi)\left(a_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^A(\xi),\ b\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^A(\xi)\right) = 0$$

pour tout $b \in A$ et pour tout $j = 1, 2, \cdots, 2n$. On déduit que

$$\sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n\\ \alpha\in I;\beta\in I}} \lambda_{i\alpha}\varphi(a_\alpha a_\beta b)a^*_\beta\left[\xi\left(\frac{\omega}{U}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\right] = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \cdots, 2n\,.$$

Pour $j = 1, 2, \cdots, n$ on a $\sum_{\alpha\in I} \lambda_{j+n}\,\varphi(a_\alpha b) = 0$ pour tout $b \in A$. D'où $\sum_{\alpha\in I} \lambda_{j+n}\, a_\alpha$ est un élément de $\ker(\varphi\circ\mu_A)$. Pour $j = n+1, n+2, \cdots, 2n$, $\sum_{\alpha\in I} \lambda_{i\alpha}\, a_\alpha$ est un élément de $\ker(\varphi\circ\mu_A)$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$. On conclut donc que $\sum_{\alpha\in I} \lambda_{k\alpha}\, a_\alpha$ appartient à $\ker(\varphi\circ\mu_A)$ pour $k = 1, 2, \cdots, 2n$. On déduit donc que $X \in \ker(\varphi\circ\mu_A)\cdot T_\xi M^A$.

Inversement, soit Z un élément de $\ker(\varphi\circ\mu_A)\cdot T_\xi M^A$. On écrit

$$Z = \sum_{\sigma=\text{fini}} f_\sigma V_\sigma \quad \text{où } f_\sigma \in \ker(\varphi\circ\mu_A) \ \textit{et}\ V_\sigma \in T_\xi M^A\,.$$

On a donc

$$Z = \sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n\\ \alpha\in I;\sigma=\text{fini}}} \lambda^\sigma_{i\alpha}\, f_\sigma\, a_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^A(\xi)\,.$$

Pour tout β dans I et pour $j = 1, 2, \cdots, n$ alors

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\omega^A)(\xi)\left(Z, a_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^A(\xi)\right) &= \sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n\\ \alpha,\gamma\in I;\sigma=\text{fini}}} \lambda^\sigma_{i\alpha}\varphi(f_\sigma a_\alpha a_\beta a^*_\gamma)a^*_\gamma\left[\xi\left(\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\right]\\ &= \sum_{\substack{\alpha,\gamma\\ \alpha=\text{fini}}} \lambda^\sigma_{j+n,\alpha}\varphi(f_\sigma a_\alpha a_\beta)\,.\end{aligned}$$

Comme $f_\alpha \in \ker(\varphi\circ\mu_A)$, on a

$$(\varphi\circ\omega^A)(\xi)\left(Z, a_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^A(\xi)\right) = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \cdots, n\,.$$

De la même façon, on a

$$(\varphi\circ\omega^A)(\xi)\left(Z, a_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^A(\xi)\right) = 0 \text{ pour } j = n+1, n+2, \cdots, 2n\,.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000001537 Published online by Cambridge University Press

On conclut que $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)(Z, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_\xi M^A$. Etant donné un idéal I de A, on a $\dim(I \cdot T_\xi M^A) = \dim(I) \times \dim M$ [6]. Comme $\ker(\varphi \circ \mu_A)$ est un idéal de A, alors $\operatorname{rang}(\varphi \circ \omega^A) = \operatorname{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \dim M$. □

LEMME. *Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal de* A *et* $\operatorname{ann}(\mathfrak{m})$ *l'annulateur de* $\mathfrak{m}$. *Il existe une forme linéaire* φ *sur* A *telle que la forme bilinéaire symétrique* $\varphi \circ \mu_A$: $A \times A \to \mathbb{R}$ *soit non-dégénérée si et seulement si* $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Désignons par $\pi : A \to \mathbb{R}$ l'augmentation. Soit $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A telle que $\varphi \circ \mu_A$ soit non-dégénérée et $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m})$. Supposons $\varphi(a) = 0$. Pour tout $b \in A$, $ab = a.\pi(b)$. D'où $\varphi(ab) = \pi(b)\varphi(a) = 0$ pour tout $b \in A$. Comme $\varphi \circ \mu_A$ est non-dégénérée alors $a = 0$. Ainsi la restriction de φ à $\operatorname{ann}(\mathfrak{m})$ est injective: d'où $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

Condition suffisante. On suppose $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$. Soit ε une base de $\operatorname{ann}(\mathfrak{m})$ et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A telle que $\varphi[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$. On note h la hauteur de A: $(\mathfrak{m}^h \neq (0)$ et $\mathfrak{m}^{h+1} = (0))$. La suite croissante d'idéaux

$$\mathfrak{m}^h \subset \mathfrak{m}^{h-1} \subset \mathfrak{m}^{h-2} \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$$

induit la suite décroissante

$$\mathfrak{m} = \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^h) \supset \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-1}) \supset \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-2}) \supset \cdots \supset \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^2) \supset \operatorname{ann}(\mathfrak{m}).$$

Soit $a \in A$ tel que $\varphi(ab) = 0$ pour tout b dans A.

1*er cas*: $b = \varepsilon$ base de $\operatorname{ann}(\mathfrak{m})$.

On $a : 0 = \varphi(a\varepsilon) = \varphi(\pi(a) \cdot \varepsilon) = \pi(a)\varphi(\varepsilon)$. Comme $\varphi(\varepsilon) \neq 0$, alors $\pi(a) = 0$. Donc $a \in \mathfrak{m}$.

2*e cas*: $b \in \mathfrak{m}^{h-1}$ avec $a \in \mathfrak{m}$.

Ainsi $ab \in \mathfrak{m}^h = \operatorname{ann}(\mathfrak{m})$. On déduit que $ab = \lambda\varepsilon$. Comme $\varphi(ab) = 0$, alors $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-1}$. Donc $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$.

3*e cas*: $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$ avec $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$.

Pour tout $c \in \mathfrak{m}$, $(ab)c = a(bc)$. Puisque $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$ et $c \in \mathfrak{m}$, alors $bc \in \mathfrak{m}^{h-1}$. Comme $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$, on conclut que $(ab)c = 0$ pour tout $c \in \mathfrak{m}$; donc $ab \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m})$. Ainsi, $ab = \lambda\varepsilon$ et $\varphi(ab) = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$. On a donc $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$. D'où $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-2})$.

Supposons $b \in \mathfrak{m}^{h-i-1}$ avec $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-i})$. Pour tout $c \in \mathfrak{m}$, $(ab)c = a(bc) = 0$. Ainsi $ab \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m})$. Comme $\varphi(ab) = 0$ alors $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-i-1}$. D'où $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m}^{h-i-1})$. Lorsque $i = h-2$, on a $a \in \operatorname{ann}(\mathfrak{m})$. Puisque $\varphi(a) = 0$ alors $a = 0$. La forme bilinéaire symétrique $\varphi \circ \mu_A : A \times A \to \mathbb{R}$ est donc non-dégénérée. $\square$

Remarque. Lorsque $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, les seules formes $\varphi \in A^*$ telles $\varphi \circ \mu_A : A \times A \to \mathbb{R}$ soient non-dégénérées sont celles qui ne s'annulent pas sur $\operatorname{ann}(\mathfrak{m})$.

EXEMPLE. Les algébres locales

$$\mathbb{R}[T]/(T^k);\ \mathbb{R}[T_1, \cdots, T_s]/(T_1^{k_1}, T_2^{k_2}, \cdots, T_s^{k_s})$$

avec $k \geq 1$, $k_1 \geq 1, \cdots, k_s \geq 1$ sont telles que $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

COROLLAIRE. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Etant donné une forme linéaire $\varphi \in A^*$, la forme scalaire $\varphi \circ \omega^A$ est une forme symplectique sur M^A si et seulement si* $\dim[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ *et* $\varphi[\operatorname{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$.

Soit I un idéal de A. La distribution $\xi \to I \cdot T_\xi M^A$ est un système différentiel de dimension $\dim(I) \times \dim M$ [6].

PROPOSITION 3. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Etant donné $\varphi \in A^*$, l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$ est $I^\perp_{\varphi \circ \mu_A} \cdot T_\xi M^A$ où $I^\perp_{\varphi \circ \mu_A}$ est l'orthogonal de I par rapport à $\varphi \circ \mu_A$.*

Démonstration. Soit ξ un point proche de x_0 d'espèce A, $(x_1, \cdots, x_{2n})$ un système de coordonnées locales dans un voisinage U de x_0 tel que

$$\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i+n}}\right) = 1 \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

et

$$\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ pour } j \neq i + n\,.$$

Soit $X = \sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n \\ \alpha \in I}} \lambda_{i\alpha} a_\alpha (\partial/\partial x_i)^A(\xi)$ un vecteur de $T_\xi M^A$ qui appartient à l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$. Ainsi $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in I \cdot T_\xi M^A$. On a donc

$$\sum_{\substack{i=1,2,\cdots,2n \\ \alpha \in I; \beta \in I}} \lambda_\alpha \varphi(a_\alpha a_\beta b) a_\beta^* \left[\xi\left(\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\right] = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \cdots, 2n\,.$$

On vérifie que $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{i\alpha}\varphi(a_\alpha b) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, 2n$ et pour tout $b \in I$. On conclut que $(\varphi \circ \mu_A)(\sum_{\alpha \in I} \lambda_{i\alpha} a_\alpha, b) = 0$ pour tout $b \in I$, c'est-à-dire que $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{i\alpha} a_\alpha$ appartient à l'orthogonal de I par rapport à $\varphi \circ \mu_A$. Le vecteur X appartient ainsi à $I^{\perp}_{\varphi \circ \mu_A}.T_\xi M^A$. La réciproque se vérifie facilement. $\square$

Corollaire 1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Si A est une algèbre locale telle que* $\dim[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, *alors pour toute forme linéaire $\varphi \in A^*$ qui ne s'annule pas sur* $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})$, *l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$ est* $\mathrm{ann}(I).T_\xi M^A$.

Corollaire 2. *Soit (M, ω) une variété symplectique, A une algèbre locale telle que* $\dim[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ *et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire qui ne s'annule pas sur* $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})$. *Il n'existe pas sur M^A de champ d'éléments de contact lagrangien de la forme $\xi \to I.T_\xi M^A$ pour $\varphi \circ \omega^A$ lorsque A est de dimension impaire.*

Démonstration. En effet, si A est telle que $\dim \mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, on a: $\dim I + \dim \mathrm{ann}(I) = \dim A$ pour tout idéal I de A. Si le champ d'éléments de contact $\xi \to I.T_\xi M^A$ est langrangien, alors $\mathrm{ann}(I) = I$. Ce qui implique que $\dim A = 2 \dim I$. Ce qui signifie que A est de dimension paire.

§ 2. Relèvements des tenseurs symétriques de type $\binom{0}{2}$

Proposition 4. *Soit $g\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ sur M. Il existe un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ et un seul g^A sur M^A à valeurs dans A tel que: $g^A(aX^A, bY^A) = ab[g(X, Y)]^A$ pour tous a, b dans A et X, Y dans $\mathfrak{X}(M)$.*

La démonstration se fait de la même façon que pour la proposition 1.

Si $\varphi \in A^*$ est une forme linéaire sur A, on dira que $\varphi \circ g^A$ est un relevé de g à M^A.

Proposition 5. *Soit g un tenseur symétrique sur M de type $\binom{0}{2}$ et de rang constant. Pour toute forme linéaire φ sur A, on a:* $\mathrm{rang}(\varphi \circ g^A) = \mathrm{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \mathrm{rang}(g)$.

Ceci découle du lemme suivant:

Lemme. *Soit g un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ sur M, de rang constant et de signature (p, q). Soit $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A et (s, t)*

la signature de $\varphi \circ \mu_A$. Alors la signature de $\varphi \circ g^A$ est $(sp + tq, sq + tp)$.

Démonstration. Soit ξ un point proche de x_0 et g_{x_0} la forme bilinéaire symétrique sur $T_{x_0}M$ induite par g et $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base orthogonale de $T_{x_0}M$ pour g_{x_0}. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ une base de A orthogonale pour $\varphi \circ \mu_A$ et $(a_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ la base duale. D'où:

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ g^A)(\xi)(a_\alpha v_i, a_\beta v_j) &= \sum_{\gamma \in I} \varphi(a_\alpha a_\beta a_\gamma) a_\gamma^*[\xi(g_{x_0}(v_i, v_j))] \\
&= 0 \text{ pour } i \neq j \text{ ou } \alpha \neq \beta \\
(\varphi \circ g^A)(\xi)(a_\alpha v_i, a_\alpha v_i) &= \sum_{\gamma \in I} \varphi(a_\alpha^2 a_\gamma) a_\gamma^*[\xi(g_{x_0}(v_i, v_i))] \\
&= \varphi(a_\alpha^2) g_{x_0}(v_i, v_i) \\
&= (\varphi \circ \mu_A)(a_\alpha, a_\alpha) g_{x_0}(v_i, v_i)\,.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la signature de $\varphi \circ \mu_A$ est $(sp + tq, sq + tp)$.

COROLLAIRE. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A. Le tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$, $\varphi \circ g^A$, est une pseudo-métrique sur M^A si et seulement si* $\dim[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ *et* $\varphi[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$.

EXEMPLE. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. Soit $A = \mathbb{D}$, l'algèbre des nombres duaux, et $(1, \varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ avec $\varepsilon^2 = 0$, $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système de coordonnées locales de M et $(y_1, \cdots, y_n)$ les coordonnées sur la fibre de $M^{\mathrm{D}} = TM$ et si $g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = g_{ij}$, alors

$$\varepsilon^* \circ g^{\mathrm{D}} = \left(\begin{array}{c|c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} & g_{ij} \\ \hline g_{ij} & O \end{array}\right).$$

Remarques.

1) La relevée d'une métrique n'est jamais une métrique.

2) Si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathbb{D}^*$ qui ne s'annule pas sur l'idéal maximal de $\mathbb{D}$, la signature de $\varphi \circ g^{\mathrm{D}}$ ne dépend pas de la singature de g.

PROPOSITION 6 [4]. *Etant donné une connexion linéaire ∇ sur M, il existe une connexion linéaire ∇^A et une seule sur M^A telle que: $\nabla^A_{aX^A} bY^A = ab(\nabla_X Y)^A$ pour tous a, b dans A et X, Y dans $\mathfrak{X}(M)$.*

PROPOSITION 7. *Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Pour tout* *tenseur symétrique g de type $\binom{0}{2}$ sur M, on a*: $\nabla^A g^A = (\nabla g)^A$. *De plus,* $\nabla^A(\varphi \circ g^A) = \varphi \circ (\nabla g)^A$ *pour toute forme linéaire φ sur A.*

La démonstration ne présente aucune difficulté.

COROLLAIRE. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et ∇_g la connexion linéaire sur M déduite de g Si A est une algèbre locale telle que* $\dim[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, *alors pour toute forme linéaire $\varphi \in A^*$ qui ne s'annule pas sur* $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})$, $(\nabla_g)^A$ *est la connexion linéaire sur M^A déduite de $\varphi \circ g^A$.*

Remarque. Soit $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})^{\perp}$ l'espace des formes lineaires sur A qui s'annulent sur $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})$ et $\mathbb{P}(A^*/\mathrm{ann}(\mathfrak{m})^{\perp})$ l'espace projectif de $A^*/\mathrm{ann}(\mathfrak{m})^{\perp}$. Soit (M, ω) une variété symplectique (respectivement soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne). Si $\dim[\mathrm{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ et si $\varphi \in A^*$, le fait que $\varphi \circ \omega^A$ ou $\varphi \circ g^A$ soit non-dégénérée ne dépend pas de φ mais de la classe de φ dans $\mathbb{P}(A^*/\mathrm{ann}(\mathfrak{m})^{\perp})$. De même si $\varphi \circ g^A$ est une pseudo-métrique sur M^A, la connexion linéaire sur M^A déduite de $\varphi \circ g^A$ ne dépend pas de φ mais de la classe de φ dans $\mathbb{P}(A^*/\mathrm{ann}(\mathfrak{m})^{\perp})$.

BIBILIOGRAHPIE

[1] Morimoto, A., Prolongations of G-structures to tangent bundles of higher order, Nagoya Math. J., **38** (1970), 153–179.
[2] ——, Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of p^r-velocities, Nagoya Math. J., **40** (1970), 13–31.
[3] ——, Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order, Nagoya Math. J., **40** (1970), 99–120.
[4] ——, Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, J. Diff. Geom., **11** (1976), 479–498.
[5] Okassa, E., Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches, C. R. Acad. Sci. Paris, série I Math. t. 300, **6** (1985), 173–176.
[6] ——, Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches, Prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble, 1987.
[7] Yano, K. and Ishihara, S., Tangent and cotangent bundles, Diff. Geom. Marcel Dekker, New-York, 1973.
[8] Yano, K. and Patterson, E. M., Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles, Jour. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 91–113.
[9] Weil, A., Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Colloque Geom. Diff. Strasbourg, 111–117, 1953.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST-MARTIN-D'HÈRES (France)

Université Marien Ngouabi
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 69
BRAZZAVILLE (Congo)

https://doi.org/10.1017/S0027763000001537 Published online by Cambridge University Press