Can. J. Math., Vol. XXXIII, No. 4, 1981, pp. 937–945

SYSTEMES FONDAMENTAUX D'UNITES DE CERTAINS COMPOSES DE DEUX CORPS QUADRATIQUES, I

CLAUDE LEVESQUE

1. Introduction. Lorsque $L_4 = \mathbf{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ est un composé de deux corps quadratiques réels, nous pouvons calculer explicitement un système fondamental d'unités de L_4 (cf. [**3**], [**2**] et [**5**]), en considérant les unités fondamentales η_2, δ_2 et ϵ_2 des trois sous-corps quadratiques L_2, F_2 et K_2 de L_4.

$$\begin{tikzcd}
 & L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\eta_2 \in L_2 = \mathbf{Q}(\theta) \arrow[dr, dash] & \delta_2 \in F_2 = \mathbf{Q}(\theta\xi) \arrow[d, dash] & \epsilon_2 \in K_2 = \mathbf{Q}(\xi) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbf{Q} &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1

Il s'agit ensuite de regarder si L_4 contient ou non les racines carrées des éléments de

(1.1) $\quad B = \{\eta_2, \epsilon_2, \delta_2, \eta_2\epsilon_2, \eta_2\delta_2, \epsilon_2\delta_2, \eta_2\epsilon_2\delta_2\}.$

Comme le groupe (sans torsion) des unités de L_4 est engendré par les éléments de B et par les racines carrées des éléments de B contenues dans L_4, alors nous pouvons déterminer un système fondamental d'unités de L_4.

C'est cette méthode qui sera utilisée dans cette note pour obtenir un système fondamental d'unités de $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$ lorsque, sous certaines

Reçu le 26 février, 1980. Cet article fut écrit grâce à une subvention CRSNG (#A4545) et grâce au programme FCAC (#EQ1321).

conditions,

(1.2) $\theta^2 = D^2 + 2d, \quad \xi^2 = D^2 + d,$

(1.3) $\theta^2 = D^2 - d, \quad \xi^2 = D^2 + d,$

(1.4) $\theta^2 = D^2 - 2d, \quad \xi^2 = D^2 + 2d.$

Le cas où

$$\theta^2 = D^2 + 4d, \quad \xi^2 = D^2 + 2d$$

a été étudié par G. Frei [**1**], et c'est pourquoi nous supposerons en (1.2) que d est impair.

C'est un résultat de Degert ([**4**], p. 44) qui nous permettra de déterminer l'unité fondamentale de chacun des sous-corps quadratiques.

THEOREME (Degert). *Soit $K = \mathbf{Q}(\omega)$ une extension quadratique de $\mathbf{Q}$ telle que*

$$\omega = \sqrt{m},\ m = D_1^2 + d_1 > 1,\ D_1 \in \mathbf{N},\ d_1 \in \mathbf{Z},\ d_1 | 4D_1,$$

et telle que m est sans facteur carré. Alors

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{D_1 + \omega}{\sqrt{|d_1|}} \text{ si } |d_1| = 1 \text{ ou } 4 \text{ ou si } (D_1, d_1) = (2, -2) \text{ ou } (5, -20), \\ \dfrac{(D_1 + \omega)^2}{|d_1|} \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

est l'unité fondamentale de K, sauf si $(D_1, d_1) = (2, 1)$ ou $(3, -4)$, où $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est l'unité fondamentale de K.

2. Cas où $\theta^2 = D^2 + 2d$ et $\xi^2 = D^2 + d$. Nous nous proposons, au cours de ce chapitre, de prouver le résultat suivant.

THEOREME 2.1. *Soit $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\theta^2 = D^2 + 2d,\ \xi^2 = D^2 + d$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$ et d impair. Supposons que θ^2 et ξ^2 sont des entiers > 1 qui ne contiennent aucun facteur carré et dénotons respectivement par η_2, ϵ_2 et δ_2 l'unité fondamentale de chacun des corps $\mathbf{Q}(\theta)$, $\mathbf{Q}(\xi)$ et $\mathbf{Q}(\theta\xi)$. Alors un système fondamental d'unités de L_4 est donné par

$$S = \{\eta_2, \epsilon_2, E\},$$

où

$$\eta_2 = (D + \theta)^2/2|d|,$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ si } (D, d) = (2, 1), \\ D + \xi \text{ si } d = \pm 1 \text{ et } (D, d) \neq (2, 1), \\ (D + \xi)^2/|d| \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{\delta_2} = \xi + \theta \text{ si } d = \pm 1, \\ \sqrt{\epsilon_2 \delta_2} = (D + \xi)(\xi + \theta)/|d| \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

sauf pour $(D, d) = (1, 1)$, $(2, -1)$ *et* $(3, -3)$ *où*

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}.$$

Une application du théorème de Degert nous permet de dire que l'unité fondamentale de $L_2 = \mathbf{Q}(\theta)$ est

$$(2.1) \quad \eta_2 = \begin{cases} 1 + \theta \text{ si } (D, d) = (2, -1), \\ (D + \theta)^2/2|d| \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

et que l'unité fondamentale de $K_2 = \mathbf{Q}(\xi)$ est

$$(2.2) \quad \epsilon_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ si } (D, d) = (2, 1), \\ D + \xi \text{ si } d = \pm 1 \text{ et } (D, d) \neq (2, 1), \\ (D + \xi)^2/|d| \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Posons

$$\lambda^2 = \theta^2\xi^2/|d|^2 = ((D^2 + d)/|d|)^2 + ((D^2 + d)/d).$$

Comme

$$\left(\frac{\theta^2}{|d|}, \frac{\xi^2}{|d|}\right) = \left(\frac{D^2+d}{|d|}, \frac{D^2+d}{|d|} + \frac{d}{|d|}\right) = \left(\frac{D^2+d}{|d|}, 1\right) = 1,$$

alors λ^2 est sans facteur carré, de sorte que l'unité fondamentale de $F_2 = \mathbf{Q}(\lambda)$ est

$$(2.3) \quad \delta = \begin{cases} 1 + \sqrt{2} \text{ si } (D, d) = (3, -3), \\ \dfrac{\left(\dfrac{D^2+d}{|d|} + \lambda\right)^2}{\left|\dfrac{D^2+d}{d}\right|} = \dfrac{(\xi+\theta)^2}{|d|} \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Cela découle du théorème de Degert et c'est

$$(D_1, d_1) = \left(\frac{D^2+d}{|d|}, \frac{D^2+d}{d}\right) = (2, -2)$$

qui nous mène à $(D, d) = (3, -3)$. Les autres cas à considérer contredisent soit l'hypothèse que ξ^2 est sans facteur carré ou soit le fait que d est impair.

La démonstration du Théorème 2.1 repose sur le lemme suivant que nous allons démontrer sous les hypothèses du Théorème 2.1.

LEMME 2.2. *Soit* $(D, d) \neq (1, 1)$, $(2, -1)$ *et* $(3, -3)$.

(i) *Si* $d = -1$, *alors* $\sqrt{2(D+1)} \notin L_4$.

(ii) *Si* $d \neq \pm 1$, *alors* $\sqrt{|d|} \notin L_4$.

(iii) $\sqrt{2|d|} \notin L_4$.

(iv) *Si* $d = -1$, *alors* $\sqrt{D+1} \notin L_4$.

(v) $\sqrt{2} \notin L_4$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-074-3 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. (i) Soit $d = -1$. Si $2(D + 1)$ est un carré de $\mathbf{N}$, alors $D + 1 = 2t^2$, i.e. $D = 2t^2 - 1$, ce qui contredit l'hypothèse que $D^2 - 1 = 4t^4 - 4t^2$ est sans facteur carré. Comme $(D + 1)|(D^2 - 1)$, alors $D + 1$ ne contient aucun facteur carré, de sorte que si $2(D + 1)$ est un carré de L_4, c'est que $2(D + 1) = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2. Or $2(D + 1) = D^2 - 2$ n'est pas possible; $2(D + 1) = D^2 - 1$ entraîne $D = 3$, i.e. $\xi^2 = 8$, alors que $2(D + 1) = (D^2 - 1)(D^2 - 2)$ implique $D = 2$.

(ii) Soit $d \neq \pm 1$. Comme $|d|$ ne peut être un carré de $\mathbf{N}$, alors $|d| = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2. Si $|d| = D^2 + d$, alors $D^2 = 0$ lorsque $d > 0$ et $D^2 = 2d$ lorsque $d < 0$, deux contradictions. Si $|d| = D^2 + 2d$, alors $D^2 = -d$ lorsque $d > 0$ et $D^2 = -3d$, i.e. $(D, d) = (3, -3)$ lorsque $d < 0$. Finalement, si $|d| = \lambda^2 = D^4/d^2 + 3D^2/d + 2$, alors $|d|\,|2$, i.e. $|d| = 1$.

(iii) Comme d est impair, alors $2|d|$ ne peut être un carré de $\mathbf{N}$. Si $2|d| = D^2 + d$, alors $(D, d) = (1, 1)$ ou $(3, -3)$. Si $2|d| = D^2 + 2d$, alors $(D, d) = (2, -1)$. Si $2|d| = D^4/d^2 + 3D^2/d + 2$, alors $|d| = 1$ et $2 = D^4 + 3D^2 + 2$ ou $2 = D^4 - 3D^2 + 2$, ce qui est absurde.

(iv) Soit $d = -1$. Si $D + 1 = D^2 - 1$, alors $D = 2$. Il est impossible d'avoir $D + 1 = \theta^2$ ou λ^2.

(v) Si $2 = D^2 + d$, alors $d|2$, i.e. $d = 1$ ou -1, ce qui entraîne $(D, d) = (1, 1)$. Si $2 = D^2 + 2d$, alors $(D, d) = (2, -1)$. Si $2 = \lambda^2$, alors $D^4 + 3D^2 d = 0$, i.e. $(D, d) = (3, -3)$.

Nous pouvons maintenant donner la

Démonstration du théorème 2.1. (A) Il est aisé de vérifier que si $(D, d) = (1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$, alors un système fondamental d'unités de L_4 est donné par $S = \{\sqrt{\eta_2}, \epsilon_2, \sqrt{\delta_2}\}$, $\{\eta_2, \sqrt{\epsilon_2}, \sqrt{\delta_2}\}$, $\{\sqrt{\eta_2}, \sqrt{\epsilon_2}, \delta_2\}$ respectivement.

(B) Si $(D, d) = (2, 1)$, alors $S = \{\eta_2, \epsilon_2, \sqrt{\delta_2}\}$ est un système fondamental de L_4.

(C) Soit $(D, d) \neq (1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$. Cherchons les éléments de l'ensemble

$$\{\eta_2, \epsilon_2, \delta_2, \eta_2\epsilon_2, \eta_2\delta_2, \epsilon_2\delta_2, \eta_2\epsilon_2\delta_2\}$$

qui sont des carrés de L_4, où les éléments η_2, ϵ_2 et δ_2 sont décrits en (2.1), (2.2) et (2.3).

(i) Soit $d = 1$. Alors $\sqrt{\epsilon_2} \notin L_4$, car $N_{L_4/L_2}(\epsilon_2) = -1$ n'est pas un carré de L_2. De plus, $\sqrt{\eta_2} \notin L_4$, car $\sqrt{2|d|} \notin L_4$. Cependant $\sqrt{\delta_2} \in L_4$. Comme $N_{L_4/F_2}(\epsilon_2\eta_2) = -1$ n'est pas un carré de F_2, alors $\sqrt{\epsilon_2\eta_2} \notin L_4$. Tout ceci entraîne que $\eta_2\delta_2$, $\epsilon_2\delta_2$ et $\eta_2\epsilon_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4.

(ii) Soit $d = -1$. Notons que

$$\epsilon_2 = D + \xi = (D + 1 + \xi)^2/2(D + 1).$$

D'où $\sqrt{\epsilon_2} \notin L_4$ car $\sqrt{2(D + 1)} \notin L_4$. Comme $\sqrt{2|d|} \notin L_4$, $\sqrt{\eta_2} \notin L_4$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-074-3 Published online by Cambridge University Press

Cependant $\sqrt{\delta_2} \in L_4$. De plus, $\sqrt{\epsilon_2\eta_2} \notin L_4$ vu que $\sqrt{D+1} \notin L_4$. Tout ceci entraîne que $\eta_2\delta_2$, $\epsilon_2\delta_2$ et $\eta_2\epsilon_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4.

(iii) Soit $d \neq \pm 1$. Comme $|d|$ et $2|d|$ ne sont pas des carrés de L_4, alors η_2, ϵ_2 et δ_2 ne sont pas des carrés de L_4. Comme $\sqrt{2} \notin L_4$, alors $\eta_2\epsilon_2$ et $\eta_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4. Toutefois $\sqrt{\epsilon_2\delta_2} \in L_4$, alors que $\sqrt{\eta_2\epsilon_2\delta_2} \notin L_4$. D'où la conclusion.

LEMME 2.3. *Posons*

$$e_2 = (\xi + \alpha)/|\beta|, \; u_2 = (\xi + \beta)/\alpha$$

où

$$\alpha = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + 2d}, \; \beta = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + 2d}.$$

Alors e_2 et u_2 sont des unités > 1 de L_4 vérifiant

$$e_2u_2 = \begin{cases} \epsilon_2^6 \text{ si } (D, d) = (2, 1), \\ \epsilon_2^2 \text{ si } d = \pm 1 \text{ et si } (D, d) \neq (2, 1), \\ \epsilon_2 \text{ ailleurs}, \end{cases}$$

$$e_2u_2^{-1} = \begin{cases} \delta_2^2 \text{ si } (D, d) = (3, -3), \\ \delta_2 \text{ ailleurs}. \end{cases}$$

Démonstration. Notons que

$$\alpha + \beta = D, \; \alpha - \beta = \sqrt{D^2 + 2d} = \theta,$$
$$\alpha\beta = -d/2, \; \alpha^2 + \beta^2 = D^2 + d.$$

Il est facile de prouver que $e_2 > 1$ et $u_2 > 1$.

Le fait que e_2 et u_2 soient des unités résulte des deux dernières égalités du lemme. En effet, e_2^2 est un produit d'unités; donc e_2 et u_2 sont des unités.

Remarquant que

$$e_2u_2 = \frac{2\xi^2 + 2D\xi - d}{2\alpha|\beta|} = \frac{D^2 + 2D\xi + \xi^2}{|d|} = \frac{(D + \xi)^2}{|d|},$$

$$e_2u_2^{-1} = \frac{\xi + \alpha}{|\beta|} \cdot \frac{\xi - \beta}{\alpha} = \frac{2\xi^2 + 2\theta\xi + d}{|\mathrm{d}|} = \frac{2D^2 - 3d + 2\theta\xi}{|d|}$$
$$= \frac{(\xi + \theta)^2}{|d|},$$

nous pouvons aisément déduire le reste.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant sous les hypothèses du Théorème 2.1. Ce résultat nous donne un système fondamental de L_4 en fonction cette fois-ci de η_2, e_2 et u_2.

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-074-3 Published online by Cambridge University Press

THEOREME 2.4. *Soit*

$$S_0 = \begin{cases} \{\eta_2, e_2, \sqrt[6]{e_2u_2}\} \text{ si } (D, d) = (2, 1), \\ \{\sqrt{\eta_2}, e_2, \sqrt{e_2u_2}\} \text{ si } (D, d) = (1, 1) \text{ ou } (3, -3), \\ \{\eta_2, e_2, \sqrt{e_2u_2}\} \text{ si d } = \pm 1 \text{ et si } (D, d) \neq (1, 1), (2, 1), \\ \{\eta_2, e_2, u_2\} \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Alors S_0 est un système fondamental d'unités de L_4.

Démonstration. Il s'agit de suivre chaque étape de la démonstration du Théorème 2.1 et de prouver que le régulateur $R(S_0)$ de S_0 est égal au régulateur $R(S)$ de S. Faisons un exemple. Soit $(D, d) = (2, 1)$. Comme $\epsilon_2{}^6 = e_2u_2$ et $\delta_2 = e_2u_2{}^{-1}$, alors

$$\begin{cases} \eta_2 = (\eta_2)^1(\epsilon_2)^0(\sqrt{\delta_2})^0, \\ e_2 = (\eta_2)^0(\epsilon_2)^3(\sqrt{\delta_2})^1, \\ \sqrt[6]{e_2u_2} = (\eta_2)^0(\epsilon_2)^1(\sqrt{\delta_2})^0, \end{cases}$$

de sorte que

$$R(\eta_2, e_2, \sqrt[6]{e_2u_2}) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| R(\eta_2, \epsilon_2, \sqrt{\delta_2}) = R(\eta_2, \epsilon_2, \sqrt{\delta_2}).$$

3. Cas où $\theta^2 = D^2 - d$ et $\xi^2 = D^2 + d$. Nous allons prouver dans ce chapitre le résultat suivant.

THEOREME 3.1. *Soit $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\theta^2 = D^2 - d, \ \xi^2 = D^2 + d$$

avec $D, d \in \mathbf{N}$ et $d|D$. Supposons que θ^2 et ξ^2 sont des entiers > 1 qui ne contiennent aucun facteur carré et dénotons respectivement par η_2, ϵ_2 et δ_2 l'unité fondamentale de chacun des corps $\mathbf{Q}(\theta)$, $\mathbf{Q}(\xi)$ et $\mathbf{Q}(\theta\xi)$. Alors un système fondamental d'unités de L_4 est donné par

$$S = \begin{cases} \{\sqrt{\epsilon_2}, \eta_2, \sqrt{\delta_2}\} & \text{si } (D, d) = (2, 2), \\ \{\epsilon_2, \eta_2, \delta_2\} & \text{si } d = 1 \text{ et } D \neq 2, \\ \{\epsilon_2, \sqrt{\eta_2\epsilon_2}, \sqrt{\delta_2}\} & \text{si } d = 2 \text{ et } D \neq 2, \\ \{\epsilon_2, \sqrt{\eta_2\epsilon_2}, \delta_2\} & \text{si } (D, d) = (2, 1) \text{ ou si } d \geqq 3. \end{cases}$$

Note. L'hypothèse à l'effet que $D^2 + d$ et $D^2 - d$ sont sans facteur carré entraîne que D est pair. En effet, soit D impair. Alors D^2 est de la forme $4k + 1$ et d est de la forme $2r + 1$. Si r est pair, alors $4|(D^2 - d)$; si r est impair, alors $4|(D^2 + d)$. Comme par hypothèse θ^2 et ξ^2 sont sans facteur carré, alors D est pair.

Grâce du théorème de Degert, nous savons que l'unité fondamentale de $K_2 = \mathbf{Q}(\xi)$ est

$$(3.1)\quad \epsilon_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ si } (D, d) = (2, 1), \\ D + \xi \text{ si } d = 1 \text{ et } D \neq 2, \\ (D + \xi)^2/d \text{ ailleurs}, \end{cases}$$

et que l'unité fondamentale de $L_2 = \mathbf{Q}(\theta)$ est

$$(3.2)\quad \eta_2 = \begin{cases} 1 + \sqrt{2} & \text{si } (D, d) = (2, 2), \\ D + \theta & \text{si } d = 1, \\ (D + \theta)^2/d & \text{si } d \neq 1 \text{ et } (D, d) \neq (2, 2). \end{cases}$$

Posons

$$\lambda^2 = \theta^2\xi^2/d^2 = (D^2/d)^2 - 1.$$

Comme D est pair, alors

$$\left(\frac{D^2 + d}{d}, \frac{D^2 - d}{d}\right) = \left(\frac{D^2 + d}{d}, \frac{D^2 + d}{d} - 2\right)$$
$$= \left(\frac{D^2}{d} + 1, 2\right) = 1,$$

de sorte que λ^2 est sans facteur carré. Alors l'unité fondamentale de $F_2 = \mathbf{Q}(\lambda)$ est

$$(3.3)\quad \delta_2 = \frac{D^2}{d} + \lambda = \frac{D^2 + \xi\theta}{d} = \frac{(\xi + \theta)^2}{2d}.$$

Tout comme au chapitre précédent, la démonstration du Théorème 3.1 repose sur le lemme suivant démontré sous les hypothèses du Théorème 3.1.

LEMME 3.2. *Soit* $(D, d) \neq (2, 1), (2, 2)$.
(i) *Si* $d = 1$, *alors* $\sqrt{2(D + 1)} \notin L_4$.
(ii) *Si* $d = 1$, *alors* $\sqrt{D + 1} \notin L_4$.
(iii) $\sqrt{2} \notin L_4$.
(iv) *Si* $d \neq 1$, *alors* $\sqrt{d} \notin L_4$.
(v) *Si* $d \geqq 3$, *alors* $\sqrt{2d} \notin L_4$.

Démonstration. Il s'agit de procéder comme à la démonstration du Lemme 2.2: si X n'est pas le carré d'un nombre naturel et si X n'est pas égal à θ^2, ξ^2 ou λ^2, alors $\sqrt{X} \notin L_4$.

Nous pouvons maintenant donner la

Demonstration du Théorème 3.1. (A) Si $(D, d) = (2, 1)$, alors $\epsilon_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ vérifie $N_{L_4/L_2}(\epsilon_2) = -1$ et nous avons

$$\eta_2 = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})^2, \quad \delta_2 = \frac{1}{10}(5 + \sqrt{15})^2.$$

D'où la conclusion. De même, si $(D, d) = (2, 2)$.

(B) Soit $d = 1$ et $D \neq 2$. Il s'agit de remarquer que

$$N_{L_4/L_2}(\epsilon_2) = -1 \text{ et que } \eta_2 = D + \theta = (D + 1 + \theta)^2/2(D + 1)$$

et de procéder comme au Chapitre 2.

(C) Soit $d \neq 1$ et $(D, d) \neq (2, 2)$. Nous avons $\sqrt{\eta_2\epsilon_2} \in L_4$. Cependant, η_2 et ϵ_2 ne sont pas des carrés de L_4 vu que $\sqrt{d} \notin L_4$. Si $d = 2$, alors $\sqrt{\delta_2} \in L_4$; si $d \neq 2$, alors $\sqrt{\delta_2} \notin L_4$ car $\sqrt{2d} \notin L_4$. D'où $\epsilon_2\delta_2$ et $\eta_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4. Finalement, si $d = 2$, alors $\sqrt{\epsilon_2\eta_2\delta_2} \in L_4$ et si $d \neq 2$, alors $\sqrt{\epsilon_2\eta_2\delta_2} \notin L_4$. D'où la conclusion.

4. Cas où $\xi^2 = D^2 - 2d$ et $\xi^2 = D^2 + 2d$. Au cours de ce chapitre, nous prouverons le

THEOREME 4.1. *Soit $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\theta^2 = D^2 - 2d, \ \xi^2 = D^2 + 2d$$

avec $D, d \in \mathbf{N}$, D impair et $d|D$. Supposons que θ^2 et ξ^2 sont des entiers > 1 qui ne contiennent aucun facteur carré et dénotons respectivement par η_2, ϵ_2 et δ_2 l'unité fondamentale de chacun des corps $\mathbf{Q}(\theta)$, $\mathbf{Q}(\xi)$ et $\mathbf{Q}(\theta\xi)$. Alors un système fondamental d'unités de L_4 est donné par

$$S = \{\epsilon_2, \sqrt{\eta_2\epsilon_2}, E\},$$

où

$$\eta_2 = (D + \theta)^2/2d, \ \epsilon_2 = (D + \xi)^2/2d,$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{\delta_2} = \frac{1}{2}(\theta + \xi) \ \textit{si} \ d = 1, \\ \delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \ \textit{si} \ (D, d) = (3, 3), \\ \delta_2 = (\theta + \xi)^2/4d \ \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

Note. Comme θ^2 et ξ^2 sont sans facteur carré, alors D et d ne peuvent tous deux être pairs. Par contre si D était pair et d impair, alors $D^2 - 2d$ et $D^2 + 2d$ auraient la structure des entiers θ^2 et ξ^2 du Théorème 3.1. Ceci explique pourquoi nous supposons D impair (et d impair).

Une application du théorème de Degert nous donne η_2 et ϵ_2. Posons

$$\lambda^2 = \theta^2\xi^2/d^2 = (D^2/d)^2 - 4.$$

Comme

$$\left(\frac{D^2 + 2d}{d}, \frac{D^2 - 2d}{d}\right) = \left(\frac{D^2}{d} + 2, 4\right) = 1,$$

alors λ^2 est sans facteur carré, de sorte que l'unité fondamentale de $F_2 = \mathbf{Q}(\lambda)$ est

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ si } (D, d) = (3, 3), \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{D^2}{d} + \lambda\right) = \dfrac{D^2 + \theta\xi}{2d} = \dfrac{(\theta + \xi)^2}{4d} \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{4.1}$$

LEMME 4.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 4.1,

(i) $\sqrt{2d} \notin L_4$,

(ii) $\sqrt{d} \in L_4 \Leftrightarrow d = 1$ *ou* $(D, d) = (3, 3)$,

(iii) $\sqrt{2} \notin L_4$.

Démonstration. Comme dans les autres chapitres.

Démonstration du Théorème 4.1. Le cas où $(D, d) = (3, 3)$ est facile. Soit donc $(D, d) \neq (3, 3)$. Nous avons $\sqrt{\eta_2\epsilon_2} \in L_4$. De plus, si $d = 1$, alors $\sqrt{\delta_2} \in L_4$; dans le cas contraire, $\sqrt{\delta_2} \notin L_4$. Le lemme précédent nous permet de dire que η_2, ϵ_2, $\epsilon_2\delta_2$ et $\eta_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4. Finalement, si $d = 1$, alors $\sqrt{\eta_2\epsilon_2\delta_2} \in L_4$; dans le cas contraire, $\sqrt{\eta_2\epsilon_2\delta_2} \notin L_4$.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Frei, *Fundamental systems of units in biquadratic parametric number fields*, submitted for publication.

2. T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. *10* (1956), 65–85.

3. S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Körper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo *5* (1943), 383–406.

4. H. J. Stender, *Lösbare Gleichungen $ax^n - by^n = c$ und Grundeinheiten für einige algebraische Zahlkörper vom Grade $n = 3, 4, 6$*, J. reine angew. Math. *290* (1977), 24–62.

5. H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo *13* (1966), 201–209.

Université Laval,
Québec, P.Q.