Compositio Mathematica **125:** 283–325, 2001.



# Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique $\leqslant 2$

*Galois cohomology of quasi-split groups over fields of cohomological dimension $\leqslant 2$*

PHILIPPE GILLE*
*Mathématiques, Bât. 425, UMR 8628 du C.N.R.S, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France. e-mail: gille@math.u-psud.fr*

Received: 11 March 1999; accepted: 14 October 1999)

**Abstract.** Let $k$ be a perfect field with cohomological dimension $\leqslant 2$. Serre's conjecture II claims that the Galois cohomology set $H^1(k, G)$ is trivial for any simply connected semi-simple algebraic $G/k$ and this conjecture is known for groups of type ${}^1A_n$ after Merkurjev–Suslin and for classical groups and groups of type $F_4$ and $G_2$ after Bayer–Parimala. For any maximal torus $T$ of $G/k$, we study the map $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ using an induction process on the type of the groups, and it yields conjecture II for all quasi-split simply connected absolutely almost $k$-simple groups with type distinct from $E_8$. We also have partial results for $E_8$ and for some twisted forms of simply connected quasi-split groups. In particular, this method gives a new proof of Hasse principle for quasi-split groups over number fields including the $E_8$-case, which is based on the Galois cohomology of maximal tori of such groups.

**Mathematical Subject Classifications (2000).** 11E72, 20G10, 20G30.

**Key words.** Galois cohomology, semisimple groups, Bruhat–Tits theory, Hasse principle.

Soit $k$ un corps, $k_s$ une clôture séparable de $k$ et $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de $k$. Dans son livre 'Cohomologie galoisienne', Serre a formulé la conjecture suivante:

CONJECTURE II [Se1, Se2]. *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque $k$-simple. On note $S(G)$ l'ensemble de ses entiers de torsion. Pour tout premier $p \in S(G)$, on fait l'hypothèse suivante:*

(a) *si $p$ est inversible dans $k$, $cd_p(k) \leqslant 2$,*
(b) *si $\mathrm{car}(k) = p$, pour toute extension séparable $k'/k$, le groupe de cohomologie $H^3_p(k')$ de Kato (voir ci–dessous) est nul.*

*Alors $H^1(k, G) = 1$.*

* Ce travail a été supporté par le réseau européen TMR "Géométrie arithmétique".

Cette conjecture a été démontrée par Merkurjev–Suslin pour les groupes de type ${}^1A_n$ [Su1] et Bayer–Parimala pour les groupes classiques, de type $F_4$ et $G_2$, dans le cas d'un corps parfait [BP]. Dans cet article, nous nous intéressons à la conjecture pour les groupes exceptionnels $D_4$ (avec trialité), $E_6$, $E_7$ et $E_8$, et notre résultat principal est le théorème suivant.

THÉORÈME (th. 4, § III.3). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe et quasi-déployé satisfaisant les hypothèses de la conjecture II. Supposons que l'on soit dans un des cas suivants*

(1) *$G$ n'est pas de type $E_8$,*
(2) *le groupe $G$ est de type $E_8$ et $\mathcal{G}$ est un $p$-groupe ($p$ premier).*

*Alors $H^1(k, G) = 1$.*

Chernousov a indépendamment démontré le théorème principal (sur un corps parfait) avec des arguments très proches de ceux utilisés dans la preuve du principe de Hasse [Ch4]. Notre méthode est toute autre et repose sur le théorème suivant qui donne, sous les hypothèses de la conjecture II, des informations sur l'image de l'application naturelle $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ pour certains $k$-tores maximaux $T/k$ de $G/k$.

THÉORÈME (th. 7, § III.3). *Soient $k$ un corps, $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, $T/k$ un $k$-tore maximal de $G$ déployé par une extension cyclique de degré premier. On suppose que $G/k$ satisfait les hypothèses de la conjecture II. Alors l'application naturelle $i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ est nulle.*

La preuve de ce théorème utilise la théorie de Bruhat–Tits et les invariants de Rost. Ensuite, on peut appliquer les résultats classiques sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires, i.e. le théorème de Steinberg et les résultats de Harder sur le principe de Hasse [H1].

Le théorème ci-dessus permet aussi de donner dans la section V (indépendante des sections III et IV) une preuve très simple et quasi-uniforme du principe de Hasse pour les groupes quasi-déployés définis sur un corps de nombres, qui en particulier ne diabolise pas les groupes de type $E_8$.

## 0. Notations et rappels

Pour tout groupe abélien $A$ et pour tout entier $N$, on note ${}_nA$ (resp. $A/n$) le noyau (resp. le conoyau) la multiplication $A \xrightarrow{\times n} A$.

**0.1** Soit $X$ une variété algébrique intègre définie sur $k$. On note $X(k)$ l'ensemble des $k$–points rationnels de $X$. Si $L/k$ est une extension de corps, on note $X_L = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(L)$ l'extension des scalaires de $X$ à $L$ et $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. On dit que

$X$ est $k$-rationnelle si $X$ est $k$-birationnelle à un espace affine. Soit $Y$ une variété algébrique définie sur $L$ et supposons que l'extension $L/k$ est finie. On note alors $R_{L/k}Y$ la restriction des scalaires, à la Weil, de $L$ à $k$ de $Y$ (cf. [BLR] p. 191). On note $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}(k[t])$ le groupe additif. Si $G/k$ est un groupe algébrique linéaire connexe, on note $G_{réd}$ le plus grand quotient réductif de $G$ et $G_{tor}$ le plus grand quotient torique de $G$ (appelé tore coradical dans [SGA3]).

**0.2.** *Groupes de types multiplicatifs.* On note $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(k[t, 1/t])$ le tore standard. Soit $M$ un $k$-groupe de type multiplicatif (cf. [SGA3], exp. X). On dit que $M$ est un $k$-tore (resp. est fini) si $\hat{M}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre (resp. fini). On note $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{k-gr}(M, \mathbb{G}_m)$ le module galoisien des caractères de $M$. Si $\chi \in \hat{M}(k_s)$, on note $k_\chi/k$ l'extension galoisienne finie minimale telle que $\chi \in \hat{M}(k_\chi)$. On définit ensuite l'extension galoisienne finie $k_M/k$ comme le composé des extensions $k_\chi$ pour $\chi$ parcourant $\hat{M}(k_s)$ et on note $\Gamma(M) = \mathrm{Gal}(k_M/k)$. Si $\Gamma(M) = 1$ (i.e. $\hat{M}$ est un module galoisien avec action triviale), on dit que $M$ est déployé. Ainsi $k_M/k$ est l'extension minimale déployant $M$. Pour toute extension séparable finie $L/k$, le $k$-groupe $R_{L/k}(M)$ est de type multiplicatif et on note $R^1_{L/k}(M)$ le noyau de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}(M) \to M$. On dit qu'un tore $T$ est *quasi-trivial* si $T$ est un produit direct de facteurs $R_{L/k}\mathbb{G}_m$. On dit qu'un tore $T$ est *inversible* s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial.

**0.3.** *Types, $*$-action et algèbres de Tits.* Dans cet article, nous utilisons continuellement la classification des groupes semi-simples sur $k$ [T1] que l'on suppose connue du lecteur. Rappelons toutefois que si $G/k$ est un groupe semi-simple absolument presque $k$-simple, on peut lui associer un diagramme de Dynkin $\Delta$ muni d'une action $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ (l'action $*$), définie à conjugaison près par un élément de $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Selon que l'on tient compte ou non de l'action $*$, on dit que $\Delta$ (resp. $\Delta$ muni de l'action $*$) est le type de $G$ (resp. le type quasi-déployé de $G$).

On note $\mu$ le centre de $G$, qui est un $k$-groupe de type multiplicatif et $G_{ad}$ le groupe adjoint de $G$. A tout caractère $\chi \in \hat{\mu}(k_s)$, la théorie des représentations linéaires permet d'associer une algèbre simple centrale $A_\chi/k_\chi$. Les algèbres $(D_\chi/k_\chi)_{\chi \in \hat{\mu}(k_s)}$ sont appelées les algèbres de Tits de $G$ [T3, MPW, M3]. Selon la terminologie introduite par Tits [T4], on dit que $G$ est une forme fortement interne si l'action $*$ est triviale et si les algèbres de Tits de $G$ sont déployées.

**0.4.** *Sous-groupes maximaux associés à une racine simple* (cf. [T4], § 1.7). Soit $G$ un groupe semi-simple déployé, simple et épinglé, ce qui est la donnée suivante [C2]:

- un $k$-tore maximal déployé $T \subset G$,
- un système de racines réduit irréductible $\Phi = \Phi(T, G) \subset \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ muni d'une base $\Delta$ définissant $\Phi^+$,

– une famille de morphismes $(U_\alpha : \mathbb{G}_a \to G)_{\alpha\in\Phi}$ et un sous-groupe de Borel $B$ de $G$, tels que si l'on ordonne arbitrairement $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1,\dots,q}$, le produit sur $G$ induit un isomorphisme

$$T \times \prod_{i=1,\dots q} \mathbb{G}_a \xrightarrow{id\times \prod_{i=1,\dots,q} U_{\alpha_i}} B.$$

On note $\alpha_0$ l'opposé de la racine maximale et $\mathbf{\Delta} = \Delta \cup \{\alpha_0\}$ le diagramme de Dynkin complété de $\Delta$ (cf. [Bou], § VI). Alors à toute racine $\alpha \in \Delta$, on peut associer le sous-groupe $H_\alpha$ de $G$ engendré par $T$, $U_{\pm\beta}$ ($\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$) et $U_{\pm\alpha_0}$. Le groupe $H_\alpha$ est un groupe semi-simple de même rang que $G$ et dont le diagramme de Dynkin s'identifie à $\mathbf{\Delta} \setminus \{\alpha\}$.

**0.5.** *Relation d'ordre sur les diagrammes de Dynkin, entiers de torsion.* On introduit la catégorie $\mathcal{D}_k$ des graphes finis non-orientés munis d'une action de $\mathcal{G}$. Si $L/k$ est une extension séparable finie de corps, on a une application naturelle de restriction $\mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_L$ où $\mathrm{Gal}(L.k_s/L)$ agit via $\mathrm{Gal}(k_s/k)$. On introduit sur $\mathcal{D}_k$ l'ordre partiel suivant. On dit que $\Delta < \Delta'$ s'il existe un plongement de graphes $\mathcal{G}$-équivariant $\Delta \hookrightarrow \Delta'$. On a par exemple $A_4 \times A_4 < \tilde{E}_8$, où $\tilde{E}_8$ désigne le diagramme de Dynkin étendu de type $E_8$.

On rappelle que Serre a défini pour chaque diagramme de Dynkin irréductible $\Delta$ un ensemble fini de nombres premiers $S(\Delta)$, appelés les entiers de torsion de $\Delta$ [Se2]. Pour chaque type, ces entiers sont les suivants :

– $S(A_n) = \{2,\ \text{diviseurs premiers de}\ \ n+1\}$;
– $S(B_n) = S(C_n) = S(G_2) = \{2\}$;
– $S(D_n) = \{2\}\ \ (n \neq 4)$;
– $S(D_4) = S(E_6) = S(E_7) = \{2, 3\}$;
– $S(E_8) = \{2, 3, 5\}$.

On peut étendre cette définition au cas non irréductible en posant $S(\cup_i\Delta_i) = \cup_i S(\Delta_i)$. Enfin, si $G/k$ est un groupe semi-simple de type $\Delta$, on pose $S(G) = S(\Delta)$.

**0.6.** *Cohomologie.* On travaille essentiellement avec la cohomologie galoisienne [Se1] et nous notons $H^i(k,\ )$ les objets de cohomologie correspondants. En particulier, on note $Br(k) = H^2(k, k_s^\times)$ le groupe de Brauer de $k$. Si $D/k$ est une algèbre simple centrale, on note $[D]$ sa classe dans $Br(k)$ et on définit l'exposant de $D$ comme l'ordre du groupe fini engendré par $[D]$ dans $Br(k)$. D'après Wedderburn, on sait qu'il existe une algèbre à divisions $T/k$, défini à isomorphisme près, tel que $D \approx M_n(T)$. On définit alors l'indice de $D$ par $\mathrm{Ind}_k(D) = \sqrt{\dim_k(T)}$. Cependant, nous travaillons aussi avec la cohomologie étale (resp. plate) pour laquelle nous notons $H^i_{ét}(X,\ )$ (resp. $H^i_{fppf}(X,\ )$) les objets de cohomologie (cf. [Mi]).

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

# I. Préliminaires

## I.1. CORPS DE DIMENSION 1 ET 2

**(a)** *Dimension d'un corps.* Prenons les notations de [Se2] p. 21-22. Soit $F$ un corps de caractéristique $p$, $p > 0$. Soit $\Omega_F$ le $F$-espace vectoriel de la $\mathbb{Z}$-algèbre $F$. Si $i$ est un entier, $i \geqslant 0$, on pose $\Omega_F^i = \bigwedge^i \Omega_F$ et la différentiation extérieure $d$ applique $\Omega_F^i$ dans $\Omega_F^{i-1}$. Il existe une application additive $p$-linéaire $\gamma : \Omega_F^i \to \Omega_F^i / d\Omega_F^{i-1}$ et une seule, telle que $\gamma(x\omega) = x^p w$ pour toute forme différentielle logarithmique $\omega = dy_1/y_1 \wedge \cdots \wedge dy_i/y_i$. L'opérateur $\omega$ est l'inverse de l'opérateur de Cartier. On pose

$$H_p^{i+1}(F) = Coker\Big(\gamma - 1 : \Omega_F^i \to \Omega_F^i / d\Omega_F^{i-1}\Big). \tag{I.1.1}$$

On note $H_{dec}^{i+1}(F)$ l'*ensemble* des éléments décomposables de $H_p^{i+1}(F)$, i.e s'écrivant $xdy_1/y_1 \wedge \cdots \wedge dy_i/y_i$ modulo $d\Omega_F^{i-1}$ avec $x, y_1, \ldots, y_i \in F^\times$. Soit $F$ un corps. On définit la dimension séparable $\dim_p^{sep}(F)$ selon

(1) Si $\mathrm{car}(F) \neq l$, $\dim_l^{sep}(F) = cd_l(F)$,
(2) Si $p = \mathrm{car}(F)$, $\dim_p^{sep}(F) = \mathrm{Inf}\{r \geqslant 0 \mid H_p^{r+1}(F') = 0 \ \forall F'/F$ separable finie$\}$.

Si $\mathrm{car}(F) = 0$, pour tout entier $q \geqslant 0$, on peut considèrer le faisceau galoisien $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)$. Si $F$ est de caractéristique positive $p$, la théorie de Kato et de Bloch–Kato [K, BK] produit l'objet $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q) = W_n\Omega_{F,log}^q[-q]$, qui est un complexe de faisceaux galoisiens concentré en degré $q$. Soit $m = p^n r$ avec $(p, r) = 1$, on définit le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_p(2) \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}(q)$, et par limite inductive, on a défini le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)$ dans cette situation. On pose alors

$$H^{q+1}(F) = H^{q+1}\big(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)\big) \ \ (q \geqslant 0). \tag{I/1/2}$$

Soit maintenant $K$ un corps complet pour une valuation discrète de rang 1, d'anneau de valuation $O$ et de corps résiduel $F$. On suppose que $\mathrm{car}(F) = \mathrm{car}(K)$ et ainsi le morphisme $O \to F$ est scindé, produisant ainsi une application $H^{q+1}(F) \to H^{q+1}(K)$ qui ne dépend pas du scindage choisi. On note $K_{nr}$ une clôture non ramifiée de $K$. On note alors $H_{nr}^{q+1}(K) = \mathrm{Ker}\big(H^{q+1}(K) \to H^{q+1}(K_{nr})\big)$. Kato [K] a défini une application de résidu $\partial_K : H_{nr}^{q+1}(K) \to H^q(F)$ de sorte que pour $q \geqslant 1$ l'on a une suite exacte

$$0 \to H^{q+1}(F) \to H_{nr}^{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_K} H^q(F) \to 0, \tag{I.1.3}$$

scindée par le choix d'une uniformisante. Izhboldin [I] a montré que ces applications

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

de résidus locales induisent la suite exacte de localisation (I.1.4)

$$0 \longrightarrow H^{q+1}(k) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big[H^{q+1}(k(t)) \to H^{q+1}(k_s(t))\big] \xrightarrow{\oplus \partial_M} \oplus H^q(k(M)) \xrightarrow{\oplus N_{k(M)/k}} H^q(k) \longrightarrow 0,$$

où $M$ parcourt les points fermés de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$.

**(B)** *Groupes de normes.* Soient $X/k$ une variété et $v$ un $k$-groupe de type multiplicatif. Pour tout $\gamma \in H^2_{fppf}(k, v)$, on définit le groupe de normes $N^{sep}_{X,\gamma}(k)$ de $X$ et $\gamma$ comme le sous-groupe de $k^\times$ engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour les extensions finies séparables de corps $L/k$ satisfaisant $X(L) \neq \emptyset$ et $\gamma_L = 0 \in H^2_{fppf}(L, v)$. Si $\gamma = 0$, le groupe $N^{sep}_{X,\gamma}(k)$ n'est pas autre chose que le groupe de normes séparable $N^{sep}_X(k)$ de la variété $X$ considéré dans [Gi2].

PROPOSITION 1. *Soient $v$ un $k$-groupe de type multiplicatif fini, $X/k$ une variété et $p$ un nombre premier. On suppose que* $\dim^{sep}_p(k) \leqslant 2$ *et que pour toute extension finie $k'/k$, on a $N^{sep}_X(k') = k'^\times \ mod \ k'^{\times p}$. Alors*

$$N^{sep}_{X,\gamma}(k) = k^\times \ mod \ k^{\times p}.$$

*Démonstration.* On désigne par $\mathcal{N}_X(k, v)$ l'assertion suivante

$$\mathcal{N}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, v) : N^{sep}_{X,\gamma}(k') = k'^\times \ mod \ k'^{\times p}, \quad \forall k'/k \text{ separable finie}, \quad \forall \gamma \in H^2_{fppf}(k', v).$$

LEMME 1. *Les hypothèses sont celles de la proposition 1.*

(a) *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de $k$-groupes finis de types multiplicatifs. Alors*

$$\mathcal{N}_X(k, A) \ \text{et} \ \mathcal{N}_X(k, C) \Longrightarrow \mathcal{N}_X(k, B).$$

(b) *Soient $p$ un nombre premier, $\mathcal{G}_p$ un $p$-Sylow (profini) de $\mathcal{G}$ et $L/k$ l'extension associée. Soit $v$ un $k$-groupe fini de type multiplicatif $p$-primaire. Alors*

$$\mathcal{N}_X(L, v_L) \Longrightarrow \mathcal{N}_X(k, v).$$

*Démonstration du lemme.* (a) Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte de $k$-groupes finis de types multiplicatifs. Pour montrer l'assertion $\mathcal{N}_X(k, B)$, on peut supposer $k' = k$. Soit $\beta \in H^2_{fppf}(k, B)$. On va montrer que $N^{sep}_{X,\gamma}(k).k^{\times p} = k^\times$. Soit $x \in k^\times$. Notons $p_* : H^2_{fppf}(k, B) \to H^2_{fppf}(k, C)$. Par hypothèse, on a $N^{sep}_{X,p_*(\beta)}(k).k^{\times p} = k^\times$. Par suite, sans perte de généralité, on peut supposer que $x = N_{k'/k}(x')$, $x' \in k'^\times$, où $k'/k$ est une extension séparable finie tuant $p_*(\gamma)$ et satisfaisant $X(k') \neq \emptyset$. La suite exacte

$$H^2_{fppf}(k', A) \xrightarrow{i_*} H^2_{fppf}(k', B) \xrightarrow{i_*} H^2_{fppf}(k', C)$$

montre que $\beta_{k'} = i_*(\alpha)$ avec $\alpha \in H^2_{fppf}(k', A)$. Or $N^{sep}_{X,\alpha}(k').k'^{\times p} = k'^\times$, donc

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

$x' \in N^{sep}_{X,\alpha}(k').k'^{\times p} \subset N^{sep}_{X,\beta}(k').k'^{\times p}$. Donc $x \in N_{k'/k}\big(N^{sep}_{X,\beta}(k')\big).k^{\times p} \subset N^{sep}_{X,\gamma}(k).k^{\times p}$. Le (b) est un exercice de restriction–corestriction laissé au lecteur. □

On peut maintenant démontrer la proposition 1. Le (a) du lemme nous permet de nous ramener à un groupe fini $v/k$ qui est $p$-primaire pour un nombre premier $p$ et le $b$) du lemme nous permet de nous ramener au cas où $\mathcal{G}$ est un pro-$p$ groupe. On sait que la correspondance $v \to \hat{v}$ induit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $k$-groupes finis $p$-primaires de type multiplicatif et la catégorie des $\mathcal{G}$-modules finis $p$-primaires ([SGA3], exp. 106). Soit $v$ un $k$-groupe fini $p$-primaire de type multiplicatif. Comme le $\mathcal{G}$-module $\hat{v}$ est discret, fini et $p$-primaire, il admet une suite de compositions dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([Se1], §4.1). Par dualité, pour tout $k$-groupe fini de type multiplicatif $v$, il existe une suite de $k$-groupes $(v_i)_{i=0,\dots,n}$ et des suites exactes

$$1 \to \mu_p \to v_i \to v_{i+1} \to 1 \qquad (i = 0, \dots, n-1)$$

avec $v_0 = v$ et $v_n$. Le (a) du lemme nous ramène à prouver l'assertion $\mathcal{N}_X(k, v)$ pour le groupe $\mu_p$. D'après le théorème 90 de Hilbert, on a $H^2_{fppf}(k, \mu_p) =_p Br(k)$. Soit $\gamma \in H^2_{fppf}(k, \mu_p)$. La classe $\gamma$ est représentée par une algèbre simple centrale $D/k$ dont on note $Y$ la variété de Severi–Brauer. On a alors $N^{sep}_{X,\gamma}(k) = N^{sep}_{X\times_k Y}(k^\times)$. D'après Merkurjev–Suslin ([MS] et [Gi2], §V.1 dans le cas de caractéristique positive), on a $N^{sep}_Y(k) = k^\times$. Le même raisonnement que dans la preuve du (a) conduit à $N^{sep}_{X,\gamma}(k) = k^\times \ mod \ k^{\times p}$. □

## I.2. GROUPES QUASI-DÉPLOYÉS, ENTIERS DE TORSION ET THÉORÈME DE STEINBERG (CONJECTURE I).

Rappelons un corollaire important au théorème de Steinberg sur les classes de conjugaisons rationnelles.

THÉORÈME 1 ([St]). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé. Alors pour tout élément $\gamma = [z] \in H^1(k, G)$, et pour tout tore maximal $T$ de ${}_zG$ il existe un plongement $\rho : T \hookrightarrow G$ tel que $\gamma$ appartienne à l'image de $H^1(k, T) \overset{\rho_*}{\to} H^1(k, G)$.* □

La terminologie 'entiers de torsion' pour $G$ se justifie par le lemme suivant, qui est bien connu.

LEMME 2 (cf. [Se2] lemme 1). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple absolument presque $k$-simple. Soit $T \subset G$ un $k$-tore maximal de $G$. Alors, les groupes $H^1(k, T)$ et $H^1(k, \hat{T})$ sont annulés par un produit d'éléments de $S(G)$.*

Joignant ce lemme au théorème 1, et sachant que $H^1(k, T)\{p\} = 0$ pour tout $k$-tore défini sur un corps $k$ satisfaisant $\dim^{sep}_p(k) \leqslant 1$, on en déduit le

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 2 (Steinberg, Conjecture I, [BoS] § 8.6 dans le cas non parfait). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple absolument presque $k$-simple. On suppose que* $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 1$ *pour tout premier* $p \in S(G)$*. Alors* $H^1(k, G) = 1$.

Mentionnons que le théorème de Steinberg se généralise de la facon suivante.

THÉORÈME 3 (Kottwitz [Ko]). *On suppose $k$ parfait. Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé.*

(a) *Si $G$ est simplement connexe, alors toute classe de conjugaison rationnelle contient un élément de $G(k)$.*
(b) *On suppose* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soit $x \in G(k_s)$ un élément semi-simple tel que le stablisateur $G_x$ de $x$ (pour l'action de $G$ sur lui-même par conjugaison) soit connexe. Alors, si la classe de conjugaison de $x$ est rationnelle, elle contient un élément de $G(k)$.* □

Exactement de même que pour le théorème de Steinberg, ceci entraîne le

COROLLAIRE 1. *On suppose* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soient $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé, et $z \in Z^1(k, G)$ un cocycle.*

(a) *Soit $\xi \in_z G(k)$. Alors il existe $\xi_0 \in G(k)$ $\overline{k}$-conjugué à $\xi$ de sorte que $[z]$ appartienne à l'image de $H^1(k, Z_G(\xi_0)) \to H^1(k, G)$.*
(b) *Soit $S \subset_z G(k)$ un $k$-sous tore de $G$. Alors il existe un plongement $\rho : S \hookrightarrow G$ de sorte que $[z]$ appartienne à l'image de $H^1(k, Z_G(S)) \xrightarrow{\rho_*} H^1(k, G)$.* □

Les entiers de torsion apparaissent également lorsque l'on s'intéresse à des corps dont le groupe de Galois absolu est un $p$-groupe. Nous donnons ici une forme générale à une remarque de Rost sur les groupes de type $E_6$ ([MPW,II], §8).

LEMME 3. *Soient $G_0/k$ un groupe semi-simple de Chevalley, $B_0/k$ un sous-groupe de Borel déployé de $G_0/k$ et $T_0/k$ un tore maximal déployé de $B_0/k$. Soit $H_0/k$ un sous-groupe (lisse) de $G_0/k$ satisfaisant $T_0 \subset H_0 \subset G_0$. On note* $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0, H_0)$ *le sous-groupe du groupe fini* $\mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0)$ *des automorphismes extérieurs de $G_0$ laissant stable $H_0$. Soit $p$ un nombre premier. On suppose que le groupe de Galois absolu $\mathcal{G}$ de $k$ est un $p$-groupe profini et que $p$ ne divise pas $[N_{G_0}(T_0)/T_0 : N_{H_0}(T_0)/T_0]$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \Gamma)$ et notons ${}^{\varphi}G_0$ (resp. ${}^{\varphi}H_0$) le groupe tordu par $\varphi$.*

(a) *L'application naturelle*

$$H^1(k, {}^{\varphi}H_0) \to H^1(k, {}^{\varphi}G_0)$$

*est surjective.*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(b) *On suppose $H_0$ connexe. Soit $T$ un $k$-tore maximal de ${}^{\varphi}G_0$. Alors $T$ est conjugué par un élément de ${}^{\varphi}G_0(k)$ à un $k$-tore maximal de ${}^{\varphi}H_0$.* □

Une autre conséquence du théorème de Steinberg est le lemme suivant.

LEMME 4. *Soient $G_0/k$ un groupe semi-simple de Chevalley, presque simple, $B_0/k$ un sous-groupe de Borel déployé de $G_0/k$ et $T_0/k$ un tore maximal déployé de $B_0/k$. On note $W_0 = N_{G_0}(T_0)/T_0$ le groupe de Weyl, $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_0, B_0, T_0)$ le sous-groupe du groupe fini des automorphismes extérieurs de $G_0$. Le groupe $\Gamma$ agit sur $W_0$ et on forme le produit semi-direct $W_0 \rtimes \Gamma$, muni du morphisme canonique $\pi : W_0 \rtimes \Gamma \to \Gamma$. Soit $p$ un nombre premier impair. On choisit un $p$-sous-groupe de Sylow $\Gamma^{(p)}$ (resp. $W_0^{(p)}$) de $\Gamma$ (resp. $W_0$) de sorte que $\Gamma^{(p)}$ agisse sur $W_0^{(p)}$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, W_0^{(p)} \rtimes \Gamma^{(p)})$. Alors il existe un plongement ${}^{f}T_0 \longrightarrow {}^{\pi_* f}G_0$.*

*Remarque 1.* Le tore ${}^{f}T_0$ est le tore tordu par l'homorphisme $f : \mathcal{G} \to W_0 \rtimes \Gamma$. L'extension galoisienne minimale déployant ${}^{f}T_0$ est donnée par $f$.

*Démonstration.* La classe de l'extension de groupes

$$1 \to T_0(F) \to N_{G_0}(T_0)(F) \to W_0 \to 1$$

est de 2-torsion (cf. [T2]). Par suite, il existe un relèvement $s : W_0^{(p)} \to N_{G_0}(T_0)(F)$. Celui-ci se prolonge en un relèvement

$$s : W_0^{(p)} \rtimes \Gamma_0^{(p)} \to N_{G_0 \rtimes)}\Gamma(T_0)(F) = N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma$$

du morphisme $N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma \to W_0 \rtimes \Gamma$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, W_0^{(p)} \rtimes \Gamma^{(p)})$. Alors l'élément $s_* f \in \mathrm{Hom}_c\big(\mathcal{G}, N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma\big)$ définit un cocycle $z \in Z^1\big(\mathcal{G}, G_0(\tilde{F}) \rtimes \Gamma\big)$ de sorte que ${}^{f}T$ est un sous-tore maximal du groupe ${}_{z}G_0$. Or la forme quasi-déployée de $G_0$ est ${}^{\pi_* f}G_0$. Le théorème de Steinberg montre qu'il existe un plongement ${}^{f}T_0 \to {}^{\pi_* f}G_0$. □

Terminons cette section par un lemme facile.

LEMME 5. (a) *Soit $G$ un groupe semi-simple simplement connexe qui est une forme interne de sa forme déployée. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique de $G$, et $Z$ un sous-groupe de Levi de $G$, dont on note $DZ$ son groupe dérivé. Alors la condition $H^1(k, DZ) = 1$ entrâine la nullité de l'application $H^1(k, P) \to H^1(k, G)$.*

(b) *Soit $G$ un groupe semi-simple simplement connexe qui est une forme interne de sa forme déployée et soit $f : G \to G'$ une isogénie centrale de noyau $\mu$. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique de $G$ et $P' = f(P)$, et $Z$ un sous-groupe de Levi de $G$. On suppose que $H^1(k, H) = 1$ pour toute forme interne de $H$ de $DZ$. Alors* *l'application* $H^1(k, P') \to H^1(k, G')$ *est constante sur les fibres de l'application composée* $H^1(k, P') \to H^1(k, G') \xrightarrow{\delta^2} H^2_{fppf}(k, \mu)$.

*Démonstration.* (a) Comme le radical unipotent de $P$ est déployé, on sait que l'on a une bijection $H^1(k, Z) \approx H^1(k, P)$, (cf. [SGA3], exp. XXVI, Cor 2.3). On considère le $k$-tore $S$ et la suite exacte $1 \to DZ \to Z \to S \to 1$. Si $G$ est une forme interne de sa forme déployée, alors $S$ est déployé et le théorème de Hilbert 90 montre que l'application $H^1(k, DZ) \to H^1(k, Z)$ est surjective. Le (b) est laissé en exercice. $\square$

### I.3. RAPPELS SUR LA $R$-ÉQUIVALENCE SUR LES TORES [CTS1,V].

Soit $X/k$ une variété algébrique. On note $\mathcal{O}$ l'anneau semi-local de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ aux points 0 et 1. La $R$-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de $X$ engendrée par la relation élémentaire suivante: deux points $x$ et $y$ de $X(k)$ sont dits directement $R$-équivalents s'il existe $\phi \in X(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Comme me l'a fait remarquer Bruno Kahn, cette définition peut s'étendre aux foncteurs contravariants de la catégorie $Sch/k$ des $k$-schémas dans les ensembles. Soit

$$F : Sch/k \to \mathcal{E}ns \tag{I.3.1}$$

un tel foncteur. Deux points $x$ et $y$ de $F(k)$ sont dits directement $R$-équivalents s'il existe $\phi \in F(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. La $R$-équivalence sur l'ensemble $F(k)$ est alors la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire. Un cas intéressant est le cas où $F$ est un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abstraits. Dans ce cas, l'ensemble des éléments $R$-équivalents à $1 \in F(k)$ est un groupe que l'on note $RF(k)$ et $F(k)/R \approx F(k)/RF(k)$. De plus, si $k$ est infini, on sait que la relation élémentaire est une relation d'équivalence. Suivant la terminologie introduite par Merkurjev pour les groupes algébriques linéaires, on dira qu'un foncteur $F$ est $R$-trivial si $F(K)/R = 1$ pour toute extension de corps $K/k$.

Soit $T/k$ un tore. Dans [CTS1], Colliot–Thélène et Sansuc ont calculé le groupe $T(k)/R$ de la facon suivante. On note $\hat{T} = \mathrm{Hom}_{gr}(T, \mathbb{G}_m)$ (resp. $\hat{T}^0$) le module galoisien des caractères (cocaractères) de $T$. Rappelons qu'un tore $S/k$ est dit flasque si $H^1(L, \hat{S}^0) = 0$ pour toute extension finie séparable de corps $L/k$. Le tore $T/k$ admet une résolution flasque

$$1 \to S \to E \to T \to 1, \tag{I.3.2}$$

où $E/k$ est un $k$-tore quasi-trivial et $S/k$ un tore flasque. Alors l'application de bord $\delta : T(k) \to H^1(k, S)$ produit un isomorphisme $T(k)/R \approx H^1(k, S)$. De plus, on sait que si le tore $T/k$ est déployé par une extension galoisienne métacyclique (i.e. les sous-groupes de Sylow du groupe de Galois sont cycliques), alors $T(k)/R = 1$. Un point essentiel dans cette théorie est la caractérisation des $k$-tores $R$-triviaux, i.e. satisfaisant $T(L)/R = 1$ pour toute extension $L/k$. Un $k$-tore est

$R$-trivial si et seulement s'il admet une résolution $1 \to T_1 \to T_2 \to T \to 1$ où les $T_i$ sont des tores inversibles, i.e. facteurs directs de tores quasi-triviaux. En d'autres termes, la condition "$T$ R-trivial" dépend uniquement du module galoisien $\hat{T}$.

Soit maintenant $M/k$ un groupe de type multiplicatif. Alors $X \to H^1_{fppf}(X, M)$ définit un foncteur contravariant de $Sch/k$ dans la catégorie des groupes abéliens. On peut donc définir les groupes $H^1_{fppf}(k, M)/R$ et le sous-groupe $RH^1_{fppf}(k, M) \subset H^1_{fppf}(k, M)$. D'après la proposition 1.3 de [CTS2], on sait que $M/k$ admet une résolution flasque (d'un autre type que le précédent)

$$1 \to M \to S \to E \to 1, \tag{I.3.3}$$

où $E/k$ est un tore quasi-trivial et $S/k$ un tore flasque. Une démonstration analogue à celle du théorème principal de [CTS1] montre que le morphisme naturel $H^1_{fppf}(k, M) \to H^1(k, S)$ induit un isomorphisme $H^1_{fppf}(k, M)/R \approx H^1(k, S)$. En particulier, si le groupe de type multiplicatif $M/k$ est déployé par une extension galoisienne métacyclique, alors $H^1_{fppf}(k, M)/R = 1$. Si $T$ est un $k$-tore, on note $T^D$ le tore dual de $T$, i.e. le tore défini par $\hat{T^D} = \hat{T}^0$.

LEMME 6. (a) *Soit $T/k$ un tore de rang* 1 *ou* 2*. Alors $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$.*

(b) *Soient $T, T'/k$ des $k$-tores et soit $E$ un $k$-tore quasi-trivial. Si $T'$ est une extension de $T$ par $E$ (resp. de $E$ par $T$), alors on a un isomorphisme naturel $T'(k)/R \approx T(k)/R$ (resp. $H^1(k, T)/R \approx H^1(k, T')/R$).*

(c) *Soit $T/k$ un tore. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$T$ est R-trivial,*

(ii) *le foncteur $H^1(., T^D)$ est R-trivial.*

*Démonstration.* (a) Si le tore $T/k$ est de rang 1, il est déployé par une extension quadratique séparable, donc $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$. Les classes d'isomorphismes de $k$-tores de dimension 2 sont classifiées par l'ensemble $H^1(k, GL_2(\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, GL_2(\mathbb{Z}))/\sim$, l'ensemble des homomorphismes de groupe de $\mathcal{G}$ dans $GL_2(\mathbb{Z})$ modulo conjugaison. Soit $T/k$ un tore de rang 2. On peut supposer que $T/k$ correspond à un homomorphisme $f : \mathcal{G} \to W \subset GL_2(\mathbb{Z})$ où $W$ est le sous-groupe standard d'ordre 12 de $GL_2(\mathbb{Z})$. Par un argument de transfert, on peut supposer que $\mathrm{Im}(f)$ est un 2-groupe ou un 3-groupe. Si c'est un 3-groupe, l'image $\mathrm{Im}(f)$ est cyclique d'ordre 3 et alors $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$. Si $\mathrm{Im}(f)$ est un 2-groupe, le seul cas à considérer est le cas où $\mathrm{Im}(f) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ est le sous-groupe diagonal de $GL_2(\mathbb{Z})$. Alors $T/k$ est le produit de deux tores de rang 1, d'où $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$ (on sait même que $T/k$ est une variété $k$-rationnelle d'après le §4.9 de [V]).

Le (b) est un exercice et on passe. au (c) On rappelle qu'un tore $I/k$ est dit inversible s'il est facteur direct d'un module quasi-trivial. Soit $T/k$ un $k$-tore. D'après la proposition 7.4 de [CTS2], on sait que $T$ (resp. $H^1(., T^D)$) est $R$-trivial si et seulement si il existe une suite exacte de $k$-tores $1 \to I_1 \to I_2 \to T \to 1$ (resp. $1 \to T^D \to J_1 \to J_2 \to 1$) avec $I_1, I_2$ inversibles (resp. $J_1, J_2$ inversibles). Par dualité, les deux conditions précédentes ne font qu'une, d'où l'on conclut que $T$ est $R$-trivial si et seulement si le foncteur $H^1(., T^D)$ est $R$-trivial. $\square$

De nombreux exemples de tores sont étudiés du point de vue de la $R$-équivalence dans [CTS1]. Le lemme précédent permet de donner un exemple simple de tore $T/k$ tel que $H^1(., T)$ n'est pas $R$-trivial.

LEMME 7. *Soient $n$ un entier et $A_1/k$, $A_2/k$ deux algèbres étales de dimension $n$. On considère le monomorphisme de tores $f : \mathbb{G}_m \to R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m$ donné par $f(x) = (x, x)$ et le $k$-tore $T = Coker(f) = \big(R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m\big)/\mathbb{G}_m$. Alors $H^1(k, T) = \mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(A_1) \oplus Br(A_2)\big)$ et:*

(a) *Si $n = 2$, $H^1(., T)$ est $R$-trivial.*
(b) *Si $n$ est un nombre premier impair et si $A_1$ et $A_2$ sont des extensions de corps cycliques linéairement disjointes, alors $H^1(., T)$ n'est pas $R$-trivial.*

*Démonstration.* La suite exacte $1 \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{f} R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m \to T \to 1$ donne immédiatement $H^1(k, T) = \mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(A_1) \oplus Br(A_2)\big)$. Ensuite, on observe que le caractère $g : R_{k_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{k_2/k}\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ donné par $g(x_1, x_2) = N_{A_1/k}(x_1)N_{A_2/k}(x_2)^{-1}$ induit un caractère $g : T \to \mathbb{G}_m$. On note alors

$$T_1 = \mathrm{Ker}(T \xrightarrow{g} \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ker}\Big[\big(R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m\big)/\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m\Big].$$

On a $H^1(k, T_1)/R \approx H^1(k, T)/R$ et l'on constate alors que

SOUS-LEMME 7′. *Les modules galoisiens $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_1^0$ sont isomorphes.* $\square$

On est donc ramené suivant le lemme 6 à étudier $T_1(k)/R$. On considère le tore $T_2 = \mathrm{Ker}\big(R_{k_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{k_2/k}\mathbb{G}_m \xrightarrow{g} \mathbb{G}_m\big)$. Comme $T_2$ est une extension de $T_1$ par $\mathbb{G}_m$, on a $T_1(k)/R \approx T_2(k)/R$ où $T_2$ est défini par les équations $N_{A_1/k}(x_1) \times N_{A_2/k}(x_2) = 1$. Il n'est pas difficile de voir que

$$T_2(k)/R = \big(N_{A_1/k}(A_1^\times) \cap N_{A_2/k}(A_2^\times)\big)/k^{\times n}.N_{A_1 \otimes_k A_2/k}\big((A_1 \otimes_k A_2)^\times\big).$$

Si $p = 2$, on sait que $T_2(k)/R = 1$ ([KLST], lemme 1.2), et si $n = p$ est impair, on sait d'après Merkurjev ([M1], Cor. 2.9) que si $A_1$ et $A_2$ sont des extension cycliques de premier $p$ disjointes, alors il existe une extension $E/k$ telle que $T_2(E)/R \neq 1$. $\square$

### 1.4. ANNULATION DE CLASSES DE $H^i(k(t))$ PAR CHANGEMENT DE BASE

Rappelons la question suivante de Serre ([Se1], question 6.2 p. 124) posée originellement en caractéristique nulle.

(I.4.1) *Soit* $\alpha \in Br(k(t))$ *tel qu'il existe* $t_0 \in \mathbb{P}^1(k)$ *satisfaisant* $\alpha(t_0) = 0$. *Existe-t-il une fonction rationnelle* $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ *non constante et un point* $t_0' \in \mathbb{P}^1(k)$ *satisfaisant* $f^*(\alpha) = 0$ *et* $f(t_0') = t_0$*?*

Dans le cas de ${}_2Br(k(t))$, on sait d'après Mestre que cette question a une réponse positive si $\alpha$ a quatre pôles (comptés avec multiplicités) [Me]. De facon analogue, pour $q \geqslant 2$, on peut poser la question suivante.

(I.4.2) *Soit* $\alpha \in \mathrm{Ker}\big(H^q(k(t)) \to H^q(k_s(t))\big)$. *Soient* $t_0, t_1$ *des points fermés de* $\mathbb{P}^1(k)$ *qui ne sont pas des pôles de* $\alpha$. *Existe-t-il une fonction rationnelle* $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ *non constante et des points* $t_0', t_1'$ *de* $\mathbb{P}^1(k)$ *satisfaisant* $f^*(\alpha) \in H^q(k)$, $f(t_0') = t_0$ *et* $f(t_1') = t_1$*?*

En fait, nous sommes intéréssés ici (cf. Proposition 2, § II.3) par le cas d'un corps de dimension cohomologique 2 pour $q = 3$ (et alors $H^3(k) = 0$) et nous sommes encouragés par le cas facile des corps locaux et globaux de caractéristique 0.

LEMME 8. *On suppose que* $k$ *est un corps local ou global imaginaire pur de caractéristique nulle. Alors la question (I.4.2) a une réponse affirmative pour* $q = 3$. *De façon précise, si la classe* $\alpha \in H^3(k(t))$ *d'ordre* $n$ *n'a pas de pôles en* 0 *et à l'infini, il existe un entier* $m$ *tel que le changement de base* $t = f(t') = (t')^{n^m}$ *tue la classe* $\alpha$.

*Démonstration.* Par dévissage, on peut supposer que $\alpha \in {}_lH^3(k(t))$ pour un premier $l$ et un argument de transfert montre que l'on peut supposer que $k$ contient une racine primitive $l$-ième de l'unité $\zeta$.

*Premier cas : k local:* On note $\Sigma = \{t_1, \ldots, t_s\}$ l'ensemble des pôles de $\alpha$. Il existe un entier $m$ tel que

$$t_i \notin \big(k(t_i)^\times\big)^{l^m} \qquad (i = 1, .., s). \tag{$*$}$$

Nous affirmons que le changement de base $t = f(t') = (t')^{l^m}$ tue la classe $\alpha$. Observons tout d'abord que $f$ est non-ramifié en $\Sigma$. On note $k_0 = k(\mu_{l^m})$ et $l^{m_0} = [k_0 : k]$.

SOUS-LEMME 8′. *Pour* $i = 1, .., s$*, on a*

$$f^{-1}(t_i) = k_{i,1} \times k_{i,2} \times \cdots \times k_{i,r_i},$$

*où* $k_{i,j}/k(t_i)$ *est une extension de corps satisfaisant* $[k_{i,j} : k(t_i)] \in l\mathbb{Z}$ *pour* $j = 1, \ldots, r_i$.

En effet, la condition $(*)$ ci-dessus entraîne tout d'abord que $k(t_i) \not\subseteq k_{i,j}$. Ensuite, comme l'extension $k_0(t')/k_0(t)$ est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$, il existe une extension galoisienne $L_i/k_0$ cyclique de degré $l^{m_i}$ telle que

$$f^{-1}(t_i) \otimes_k k_0 = (L_i)^{l^{m-m_i}},$$

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

d'où un plongement $k_{i,j} \subset L_i$. En considérant les inclusions de corps $k \subset k(t_i) \subset k_{i,j} \subset L_i$, on conclut que $[k_{i,j} : k(t_i)]$ divise $[L_i : k] = [L_i : k_0][k_0 : k] = l^{m_i+m_0}$ donc $[k_{i,j} : k(t_i)] \in l\mathbb{Z}$. Le sous-lemme est démontré. Puisque $H^3(k) = 0$, on a le diagramme de restrictions (*loc. cit.* §3)

$$\begin{array}{ccc}
{}_lH^3(k(t)) & \xrightarrow{\sim} & \oplus_{M\in\mathbb{A}^1}\, {}_lBr(k(M)) \\
{\scriptstyle f^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_M^*} \\
{}_lH^3(k(t')) & \xrightarrow{\sim} & \oplus_{M'\in\mathbb{A}^1}\, {}_lBr(k(M')),
\end{array}$$

où $f_M^*$ est la restriction ${}_lBr(k(M)) \to {}_lBr\big(f^{-1}(k(M))\big)$ aux points non ramifiés de $f$. D'après le sous-lemme, le corps de classes local montre donc que le morphisme $f_{t_i}^* : \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = {}_lBr(k(t_i)) \to {}_lBr\big(f^{-1}(k(t_i))\big)$ est nul, ainsi la classe $f^*\alpha$ a tous ses résidus nuls et est donc nulle.

*Second cas : k global.* On note $\Omega_f$ l'ensemble des places finies de $k$ et $k_v$ le complété de $k$ à la place $v$. La suite exacte de localisation ci-dessus et la théorie du corps de classes global montre que le morphisme $H^3(k(t)) \to \prod_{v\in\Omega_f} H^3(k_v(t))$ donne lieu à un morphisme injectif

$$H^3(k(t)) \hookrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega_f} H^3(k_v(t)).$$

On note $\{v_1, \ldots, v_r\}$ l'ensemble des places où $\alpha_v \neq 0$. On choisit un entier $m$ tel que le changement de base $t = f(t) = (t')^{l^m}$ tue $\alpha_{v_j}$ pour $j = 1, \ldots, r$. L'injection ci-dessus montre que le changement de base $t = (t')^{l^m}$ tue la classe $\alpha$, i.e. $f^*\alpha = 0$. □

## II. Étude de l'application $\mathbf{H^1(k, T) \to H^1(k, G)}$

Soient $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple et $i : T/k \hookrightarrow G$ un $k$-tore maximal $G$; on note $G_{ad}$ le groupe adjoint de $G$ et $\pi : G \to G_{ad}$ l'isogénie naturelle.

### II.1. NOYAUX STABLES

La difficulté principale que nous souhaitons contourner réside dans le fait que l'application $i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ dépend a priori du plongement $i$, même si son image n'en dépend pas; en particulier, le noyau $\mathrm{Ker}(i_*)$ n'est pas en général un sous-groupe de $H^1(k, T)$. Pour les applications que nous avons en vue, il est commode de considérer plutôt le composé

$$H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{\pi_*} H^1(k, G_{ad}).$$

Il est bien connu que les $G(k)$-classes de conjugaison de plongements de $T$ dans $G$

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

sont décrites par les ${}^gT = gTg^{-1} \hookrightarrow G$ où $g$ parcourt l'ensemble des éléments de $G(k_s)$ tels que $g^{-1\,s}g \in T(k_s)$ pour tout $s \in \mathcal{G}$. On définit alors le "noyau stable" $\mathrm{Ker}_s(i_*)$, i.e. l'intersection des noyaux des applications composées $H^1(k, T) \to H^1(k, {}^gT) \to H^1(k, G)$ et on sait ([T5], § 3.3) que $\mathrm{Ker}_s(i_*) + \mathrm{Ker}(i_*) \subset \mathrm{Ker}(i_*)$, et donc que le groupe engendré par $\mathrm{Ker}_s(i_*)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(i_*)$. De même, on définit le noyau stable $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ comme l'intersection des noyaux des applications composées $H^1(k, T) \to H^1(k, {}^gT) \to H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$. On note $i_{ad} : T_{ad} \hookrightarrow G_{ad}$ l'image du tore $T$ dans $G_{ad}$. Puisque $\mathrm{Hom}_{k-gr}(T, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k-gr}(T_{ad}, G_{ad})$, notant $\pi_* : H^1(k, T) \to H^1(k, T_{ad})$, on a

$$\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*) = \pi_*^{-1}\big(\mathrm{Ker}_s(i_{ad,*})\big) \subset H^1(k, T),$$

d'où immédiatement le

LEMME 9. $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*) + \mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*) \subset \mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

En particulier, le sous-groupe de $H^1(k, T)$ engendré par $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

## II.2. INVARIANTS DE ROST

On rappelle que l'on dispose de l'invariant de Rost $r_{k,G} : H^1(k, G) \to H^3(k)$ [R1, R2, Se2, EKLV, Gi2]. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'application composée

$$\psi_k : H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{r_{k,G}} H^3(k), \tag{II.1.1}$$

qui n'est pas en général un homomorphisme de groupes. Soit $1 \to T \to S \to E \to 1$ une résolution flasque de $T$, on note $\delta : E(k) \to H^1(k, T)$. Le tore quasi-trivial $E$ se décompose en $E = \prod_i E_i = \prod_i R_{k_i/k}(\mathbb{G}_m)$ où les $k_i/k$ sont des extensions séparables de corps. On considère le composé

$$\psi_i : k_i^\times = E_i(k) \to E(k) \to H^1(k, G) \to H^3(k),$$

LEMME 10. *Soit $i$ tel que $k_i = k$. Alors il existe $\beta_i \in H^2(k)$ tel que pour tout $y \in k^\times = E_i(k)$, on a*

$$\psi_i(y) = \beta_i \cup y.$$

*Démonstration.* On considère l'application composée

$$\psi_{i,k(t)} : k(t)^\times = E(k(t)) \to H^1(k(t), T) \to H^1(k(t), G) \xrightarrow{r_{k(t),G}} H^3(k(t)),$$

qui est à valeurs dans $\mathrm{Ker}\big(H^3(k(t)) \to H^3(k_s(t))\big)$ puisque $H^1(k_s(t), T) = 0$ d'après le théorème de Hilbert 90 et on note $c = \psi_{i,k(t)}(t)$ dans $H^3(k(t))$. La suite exacte de localisation (cf. I.1.4)

$$0 \longrightarrow H^3(k) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big[H^3(k(t)) \to H^3(k_s(t))\big] \stackrel{\oplus \partial_M}{\longrightarrow} \oplus_{M \in \mathbb{A}^1_k} H^2(k(M)) \longrightarrow 0,$$

et le fait que les pôles potentiels de $c$ sont 0 et $\infty$ montre que si l'on pose $\beta = \partial_0(c)$ dans $H^2(k) = Br(k)$, on a $c = \beta \cup (t)$ dans $H^3(k(t))$. Suivant [Gi2, th. 2], on peut spécialiser cette égalité en $y \in k^\times$, d'où la formule $\psi_i(y) = \beta \cup y$ dans $H^3(k)$. □

## II.3. MISE EN PLACE DE L'INDUCTION SUR LES TYPES

(a) *Où l'on utilise la théorie de Bruhat–Tits.* On suppose de plus dans ce paragraphe que $G/k$ est quasi-déployé, on note $G_{ad}/k$ le groupe adjoint de $G$ et $\pi : G \to G_{ad}$ la projection naturelle. On considère l'application

$$H^1(\tilde{K}/K, G) \stackrel{r_K}{\longrightarrow} H^3_{nr}(K) \stackrel{\partial_K}{\longrightarrow} Br(F), \tag{II.2.1}$$

où le résidu $\partial_K$ est défini en (16.1.3). La théorie de Bruhat–Tits permet de comprendre l'objet $H^1(\tilde{K}/K, G)$ (cf. [BrT2], Cor. 3.15). On note $B$ un sous-groupe de Borel de $G/k$, $\mathbf{B}/\operatorname{Spec}(O)$ le sous-groupe d'Iwahori standard, i.e. tel que $\mathbf{B}(O) = sp^{-1}(B(F))$ où $sp$ désigne la spécialisation $sp : G(O) \to G(F)$. Notons $P_0 = G(\tilde{O})$, $P_1, \ldots, P_r$ les $K$-sous-groupes parahoriques de $G$ contenant le sous-groupe d'Iwahori $\mathbf{B}$ et $\mathfrak{P}_i$ les $O$-schémas en groupe associés. On note $\overline{\mathfrak{P}}_i/F$ la fibre spéciale de $\mathfrak{P}_i$ et $M_i = \overline{\mathfrak{P}}_{i,red}$. Pour $i = 0, .., r$, on note $H^1(F, M_i)_{an}$ les classes $[z]$ telles que le groupe tordu ${}_zM_i$ ne possède pas de $F$-sous-groupes paraboliques propres (cela est bien défini). Le lemme de Hensel induit la bijection suivante $H^1(O, \mathfrak{P}_i) \approx H^1(F, M_i)$. Composant l'inverse de l'application précédente et l'application naturelle $H^1(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), P_i) \to H^1(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), G(\tilde{K}))$, on obtient une bijection

$$\coprod_{i=0,\ldots,r} H^1(F, M_i)_{an} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} H^1(\tilde{K}/K, G). \tag{II.2.2}$$

La bijection ci-dessus est appelée la décomposition de Bruhat–Tits; elle nous permet d'établir le lemme-clef suivant.

LEMME 11. *On suppose que pour tout $\Delta' \in \mathcal{D}_F$, $\Delta' < \mathbf{\Delta}$, $\Delta'$ non isomorphe à $\Delta$, et pour tout sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé $H/F$ de diagramme de Dynkin $\Delta'$ (muni de l'action de* $\mathrm{Gal}(F.k_s/F)$*), on a $H^1(F, H) = 1$. Alors*

$$\pi_*\left[\mathrm{Ker}\Big[H^1(\tilde{K}/K, G) \stackrel{\partial_K \circ r_K}{\longrightarrow} Br(F)\Big]\right] \subset \mathrm{Im}\Big[H^1_{\acute{e}t}(O, G_{ad}) \to H^1(\tilde{K}/K, G_{ad})\Big].$$

*Démonstration.* Soit $\gamma \in H^1(\tilde{K}/K, G)$ appartenant au noyau de l'application $\partial_K \circ r_K$. Il existe donc un $i$ tel que $\gamma$ est l'image par la décomposition de Bruhat–Tits

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

de $\gamma' \in H^1(F, M_i)$. On peut de plus supposer que $\mathfrak{P}_i$ est un sous-groupe parahorique maximal de $G$.

*Premier cas : $\mathfrak{P}_i$ est spécial, i.e. le diagramme de Dynkin de $M_i$ est isomorphe à $\Delta$.* Alors $\pi_*\big(\mathfrak{P}_i(\tilde{O})\big)$ est conjugué à $\pi_*\big(\mathfrak{P}_0(\tilde{O})\big) = G_{ad}(\tilde{O})$, ce qui implique $\pi_*\gamma \in \mathrm{Im}[H^1_{ét}(O, G_{ad}) \to H^1(\tilde{K}/K, G_{ad})]$.

*Second cas. $\mathfrak{P}_i$ n'est pas spécial.* On applique alors le théorème 4 de [Gi2, § IV.2]. On dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to M_i' \to M_i \to 1$$

de groupes réductifs dont on note $\delta : H^1(F, M_i) \to Br(F)$ l'application de bord associée. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\tilde{K}/K, G(\tilde{K})) & \leftarrow & H^1_{ét}(O, \mathfrak{P}_i) & \xrightarrow{\sim} & H^1(F, M_i) \\ \downarrow{\scriptstyle r_K} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ H^3_{nr}(K) & & \xrightarrow{\partial_K} & & Br(F), \end{array}$$

qui implique que $\gamma' \in \mathrm{Im}\big(H^1(F, M_i') \to H^1(F, M_i)\big)$. Or suivant le théorème 3′ de [Gi2, §IV.2], on a une décomposition $M_i' = DM_i' \times S_i$ où $DM_i'$ est un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé dont le diagramme de Dynkin est un sous-diagramme de $\mathbf{\Delta}$ non isomorphe à $\Delta$ et $S_i$ un $F$-tore inversible. Il résulte de l'hypothèse d'induction que $H^1(F, M_i') = H^1(F, DM_i') \times H^1(F, S_i) = 1$, donc $\gamma' = 1$, et a fortiori $\gamma = 1$ et $\pi^*(\gamma) = 1$. □

(b) *La proposition principale*

La proposition ci-dessous a pour objet de donner des condition suffisantes pour que l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ soit nulle, du moins sur le sous-groupe $RH^1(k, T)$.

PROPOSITION 2. *Soient $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, $T/k$ un $k$-tore maximal de $G$. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 2$ pour tout premier $p \in S(G)$.*

(a) *On note $X/k$ la variété des sous-groupe de Borel de $G$, $\Delta$ le diagramme de Dynkin de $G$ et $\mathbf{\Delta}$ le diagramme de Dynkin complété de $\Delta$. On fait les deux hypothèses suivantes:*

(A) *Pour toute extension séparable finie $k'/k$ et pour tout diagramme de Dynkin $\Delta' \in \mathcal{D}_{k'}$, $\Delta' < \mathbf{\Delta}$, $\Delta'$ non isomorphe à $\Delta$, si $H/k'$ désigne le sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé de diagramme de Dynkin $\Delta'$ (muni de l'action de $\mathrm{Gal}(k'.k_s)$), on a $H^1(k', H) = 1$,*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(B) *Pour toute extension séparable finie $k'/k$, on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$ (condition automatiquement satisfaite si $G$ est quasi-déployé).*

*Soient $1 \to T \to \prod_{i\in I} R_{k_i/k}\mathbb{G}_m \to S \to 1$ une résolution flasque de $T$, $I_0 = \{i \in I \mid k_i = k\}$ et $\delta : \prod_i k_i^{\times} \to H^1(k, T)$ l'application de bord. Alors l'application naturelle $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $\delta\big(\prod_{i\in I_0} k^{\times}\big)$. En particulier, si $T$ est déployé par une extension cyclique de degré premier, l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale.*

(b) *On suppose $G$ quasi-déployé et que toute classe de* $\mathrm{Ker}\big(H^3(k(t)) \to H^3(k_s(t))\big)$ *est annulable par changement de base à double point base (cf. 16.1.4). Alors l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $RH^1(k, T)$.*

*Remarque 2.* Si le groupe $G/k$ est quasi-déployé, il est bien connu que l'application $\pi_* : H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ a un noyau trivial. Dans ce cas, les conclusions de la proposition sont plus fortes, i.e l'application $i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ est triviale sur $RH^1(k, T)$. La condition d'annulabilité de l'assertion *b*) n'est connue que pour les corps de nombres imaginaires purs.

Avant de démontrer cette proposition qui constitue le coeur de l'article, arrêtons-nous brièvement sur l'hypothèse **B** relative au groupe de normes séparable de la variété des sous-groupes de Borel de $G$. Le lemme ci-dessous donne une condition suffisante pour que l'hypothèse **B** soit satisfaite.

LEMME 12. *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe. On note $G^{qd}/k$ la forme quasi-déployée de $G$. Soit $X$ la variété des sous-groupes de Borel de $G/k$. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 2$ pour tout $p \in S(G)$. On suppose $H^1(k', G^{qd}) = 1$ pour toute extension séparable finie $k'/k$. Alors pour toute extension séparable finie $k'/k$, on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$.*

*Démonstration.* D'après le résultat principal de [T5], on sait qu'il existe un entier $d$ dont les facteurs premiers appartiennent à $S(G)$ et une extension séparable de corps $L/k$ qui déploie $G$ et dont le degré divise $d$. Par suite, le groupe $k'^{\times}/N_X^{sep}(k')$ est annulé par $d$ et il suffit de voir que $N_X^{sep}(k').k'^{\times p} = k'^{\times}$ pour tout $p \in S(G)$. On note $\mu$ le centre de $G^{qd}$ et $G_{ad}^{qd}$ le groupe adjoint de $G^{qd}$. A la $k$-forme $G$ de $G^{qd}$ correspond une classe $\gamma \in H^1(k, G_{ad}^{qd})$, qui est triviale si et seulement si le groupe $G$ est quasi-déployé. L'hypothèse montre que l'application de bord

$$H^1(k', G_{ad}^{qd}) \xrightarrow{\beta} H^2_{fppf}(k', \mu)$$

a un noyau trivial pour toute extension séparable finie $k'/k$. Ainsi $N_X^{sep}(k') \cdot k'^{\times p} = N_{\beta(\gamma)}^{sep}(k') \cdot k'^{\times p} = k'^{\times}$ d'après la proposition 1 (§ I.1). $\square$

*Démonstration de la proposition 2.* Il est tout d'abord clair que l'on peut supposer $k$ infini. On note $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ de noyau $\mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*)$ et

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

on considère le "noyau stable" $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$. D'après le lemme 8, on sait que le groupe engendré par $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

(a) On considère l'application $\delta : \prod_{i \in I_0} k^\times \to H^1(k, T)$. Pour montrer que $\delta\big(\prod_{i \in I_0} k^\times\big) \subset \mathrm{Ker}(\pi_* \circ i_*)$, il suffit de montrer que $\delta\big(\prod_{i \in I_0} k^\times\big) \subset \mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$; celà peut se vérifier sur chaque facteur de $k^\times$. Sans perte de généralité, on peut donc travailler sur un seul facteur $\mathbb{G}_m$ et supposer que $\delta(k^\times)$ est $l$-primaire pour un premier $l \in S(G)$. On considère le composé

$$\psi : k^\times \xrightarrow{\delta} H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{r_{k,G}} H^3(k),$$

et d'après le lemme 9, il existe $\beta \in H^2(k) = Br(k)$ tel que $\psi(y) = \beta \cup y$. Sous chacune des hypothèses **A** ou **B**, la proposition 1 entraîne

$$N_{X,\beta}(k).k^{\times l} = k^\times.$$

On est donc ramené à voir que l'application $i_* \circ \delta : L^\times \to H^1(k, G)$ est nulle pour toute extension de corps $L/k$ satisfaisant $\beta_L = 1$ et $X(L) \neq \emptyset$. Soient $L/k$ une telle extension et $y \in L^\times$. On veut montrer que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)(y) = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$. On considère le polynôme $P(t) = t^N + y$, où $N = [k_T : k]$.

LEMME 13. $P(t) \in \mathrm{Ker}\Big[k(t)^\times \xrightarrow{\pi_* \circ i_* \circ \delta} H^1(k(t), G_{ad})\Big]$.

On remarque tout d'abord que comme la classe $P(t)$ est régulière en 0, le lemme entraîne par spécialisation que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\big(y\big) = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$; de plus celà est vrai pour tout plongement de $T$ dans $G$ donc $\delta\big(y\big)$ appartient au noyau stable $\mathrm{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$. Montrons maintenant le lemme en notant $\gamma = (\pi_* \circ i_* \circ \delta)\big(P(t)\big) \in H^1(k(t), G_{ad})$ et en établissant tout d'abord que $\psi_{k(t)}(P(t)) = 0$ dans $H^3(k(t))$. Cela provient de la formule de projection puisque l'on a

$$\psi(P(t)) = \beta \cup N_{L/k}(t^N + y')] = \mathrm{Cor}_k^L[\beta_L \cup (t^N + y)] = 0,$$

puique $\beta_L = 0$. La classe $\delta\big(P(t)\big)$ de $H^1(k(t), T)$ est régulière à l'infini, puisque $N.H^1(k, \hat{T}^0) = 0$ et de plus comme $P(t)$ est unitaire, l'image de $\delta\big((P(t)\big)$ dans $H^1(k((1/t)), T)$ est nulle. Les pôles de $\delta\big((P(t)\big)$ sont contenus dans l'ensemble fini de points fermés $\Sigma = \{t \mid N_{L/k}(t^N + y) = 0\}$. Par suite, la classe $\gamma$ de $H^1(k_s(t)/k(t), G_{ad})$ est régulière sur $\mathbb{P}^1_k \setminus \Sigma$. Pour tout $M \in \Sigma$, on note $\hat{k}_M$ le complété de $k(t)$ en $M$, et sachant que $k(M)$ quasi-déploie $G$, le lemme 11 s'applique et donne l'inclusion

$$\begin{aligned} &\pi_*\Big[\mathrm{Ker}\Big[H^1(\hat{k}_M \otimes_k k_s/\hat{k}_M, G) \xrightarrow{\partial_M \circ r} Br(k(M))\Big]\Big] \\ &\qquad \subset \quad \mathrm{Im}\Big[H^1_{\acute{e}t}(\hat{O}_M, G_{ad}) \to H^1(\hat{k}_M \otimes_k k_s/\hat{k}_M, G_{ad})\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\psi(P(t)) = 0$ dans $H^3(k(t))$, il résulte que $\gamma$ est régulière en $M$, donc sur toute la droite projective $\mathbb{P}^1_k$. D'après un lemme de Harder ([H2], lemme 4.1.3), la classe

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

$\gamma$ provient donc d'une classe globale $\alpha \in H^1_{ét}(\mathbb{P}^1, G_{ad})$. Or, on sait que la fibre générique de $\alpha$ est constante ([H3, RgRm], cf. [Gi1], th. I.2.1), donc $\gamma \in \mathrm{Im}\big[H^1(k, G_{ad}) \to H^1(k(t), G_{ad})\big]$. On peut évaluer cette classe à l'infini, et on trouve $\gamma = 1$ dans $H^1(k, G)$, puisque l'image de $\delta(P(t))$ est nulle dans $H^1(k((\frac{1}{t})), T)$ et donc a fortiori dans $H^1(k((\frac{1}{t})), G_{ad})$.

On se place maintenant dans le cas particulier où $T$ est déployé par une extension cyclique de degré premier $L/k$. Alors, on peut choisir $E = \prod_i E_i$ tel que $E = \mathbb{G}_m$ ou $R_{L/k}\mathbb{G}_m$. Vu que $H^1(L, T) = 0$ et que la norme $N_{L/k} : (L \otimes_k L)^\times \to L^\times$ est surjective, le bord $\delta : E(k) \to H^1(k, T)$ est nul sur les facteurs $R_{L/k}\mathbb{G}_m$, et l'assertion démontrée précédemment montre que l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G_{ad})$ est nulle.

(b) Soit $1 \to T \to S \to E \to 1$ une résolution flasque de $T$ et $\delta : E(k) \to H^1(k, T)$. On a $\delta(E(k)) = H^1(k, T)$. On considère le composé $\psi : E(k) \to H^1(k, T) \to H^1(k, G) \to H^3(k)$. Soit $y \in E(k)$ et notons $\alpha = \psi\left(\frac{t+y}{t+1}\right)$ dans $\mathrm{Ker}\big(H^3(k(t)) \to H^3(k_s(t))\big)$. Alors $\alpha$ est régulière en 0 et à l'infini. D'après l'hypothèse d'annulabilité appliquée au symbole $\alpha$, il existe une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ telle que $f^*\alpha = 0$, $f(0) = 0$ et $f(\infty) = \infty$. Par suite, $\psi\left(\frac{f(t)+y}{f(t)+1}\right) = 0$ dans $H^3(k(t))$. Le m\tildeême raisonnement qu'au lemme 13 assure que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\left(\frac{f(t)+y}{f(t)+1}\right)$ est une classe constante de $H^1(k(t), G_{ad})$ et l'évaluation à l'infini montre que cette classe est triviale, i.e. $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\left(\frac{f(t)+y}{f(t)+1}\right) = 1$ dans $H^1(k(t), G_{ad})$. On spécialise maintenant cette égalité en 0 et il vient $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\big(1 + y\big) = 1$. Ceci montre que l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $RH^1(k, T)$.

## III. Le cas quasi-déployé

Le but de cette section est de démontrer le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 4. *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe, quasi-déployé. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 2$ pour tout $p \in S(G)$. Supposons que l'on soit dans un des cas suivants*

(1) *le groupe $G$ ne contient pas de facteur de type $E_8$;*
(2) *le groupe de Galois $\mathcal{G}$ est un $p$-groupe ($p$ premier);*

*alors $H^1(k, G) = 1$.*

### III.1. EXTENSIONS QUADRATIQUES ET CYCLIQUES D'ORDRE 3

La proposition 2 du §2.2 se prête bien aux applications sur la cohomologie galoisienne d'une extension quadratique grace au lemme bien connu suivant.

LEMME 14 (cf. [PR] lemme 6.17′ p. 383). *Soient $G$ un groupe réductif sur un corps $k$ et $L/k$ une extension quadratique séparable. On suppose que le groupe $G_L$ admet un $L$-parabolique $P$, dont la classe de conjugaison est auto-opposée. Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Alors, il existe un $k$-tore $S$ de $G$, tel que $Z_G(S) \times_k L$ soit un*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

*$L$-sous-groupe de Levi d'un conjugué de $P_L$ et un $k$-tore maximal $T/k \subset Z_G(S)$ tel que*

$$\gamma \in \mathrm{Im}\big(H^1(L/k, T) \to H^1(L/k, G)\big).$$

□

*Remarque 3.* La classe de conjugaison des sous-groupes de Borel est auto-opposée, donc le lemme vaut toujours si $P$ est un sous-groupe de Borel. De plus, le lemme avec $\gamma = 1$ montre en particulier que le groupe $G$ possède un $k$-tore $S$, tel que $Z_G(S) \times_k L$ soit un $L$-sous-groupe de Levi d'un conjugué de $P_L$.

La combinaison de la proposition 2 (§ 26.2) et du lemme 14 entraînent le

COROLLAIRE 2. *Soit $L/k$ une extension quadratique séparable. Soit $G/k$ un groupe satisfaisant les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.*

(a) *Supposons $G_L$ déployé. Alors l'application*

$$H^1(L/k, G) \to H^1(L/k, G_{ad})$$

*est nulle.*

(b) *On suppose que $k$ est un corps de nombres imaginaire pur, que $G$ est quasi-déployé et $G_L$ est quasi-déployé de type ${}^3D_4$. Alors $H^1(L/k, G) = 1$.*

*Démonstration.* (a) Soit $\gamma \in H^(L/k, G)$. Le lemme 14 indique qu'il existe un $k$-tore maximal $T/k$ de $G/k$ tel que $\gamma$ provienne de $H^1(k, T)$ et tel que $T_L$ soit inclus dans un sous-groupe de Borel $B_L$ de $G_L$. Le tore $T_L$ est déployé et la proposition 2.a entraîne alors $\gamma_{ad} = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$.

(b) Soit $\gamma \in H(L/k, G)$. Suivant le lemme 14, il existe un $k$-tore maximal $T/k$ de $G/k$ tel que $\gamma$ provienne de $H^1(k, T)$ et tel que $T_L$ soit inclus dans un sous-groupe de Borel $B_L$ de $G_L$, qui est de type ${}^3D_4$. Par suite, le tore $T$ est déployé par une extension métacylique, d'où $H^1(k, T)/R = 0$ et la proposition 2.b. entraîne la nullité de l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$, d'où $\gamma = 1$. □

Passons aux extensions cycliques de degré 3 avec le lemme suivant, dû à Harder.

LEMME 15 ([H1, III], lemme 3.24 et § 3.4) *Soit $L/k$ une extension cyclique de degré 3. Soit $G/k$ un groupe semi-simple absolument presque $k$-simple de type $D_4$ (resp. $E_6$). Si $G_L$ est déployé, alors le groupe $G$ admet un sous-groupe réductif $H$ de type $A_2$ (resp. $D_4$) contenant un $k$-tore maximal $T/k$ de $G/k$ déployé par $L/k$.* □

Le corollaire suivant résulte immédiatement du lemme précédent, du théorème de Steinberg (cf. § I) et de la proposition 2.

COROLLAIRE 3. *Soit $L/k$ une extension cyclique de degré 3. Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé presque $k$-simple de type $D_4$ ou de type $E_6$. On suppose*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

*que $G/k$ satisfait les hypothèses de la proposition 2. Soit $[z] \in H^1(k, G)$ tel que le groupe tordu ${}_zG_L$ est déployé. Alors $[z] = 1$.* □

III.2. INDUCTION SUR LES TYPES

Rappelons le théorème 'd'annulation' suivant, dû à Tits.

THÉORÈME 5 ([T5]). *On suppose* $\mathrm{car}(k) \neq 2$ *et* $\mathrm{car}(k) \neq 3$.

(a) *Si tout élément de $k$ est un carré, tout $k$-groupe de type $B_n$, $C_n$, $D_n$ $(n \neq 4)$, $D_4$ non trialitaire, ou $G_2$ est déployé.*
(b) *Si tout élément de $k$ est une puissance sixième, tout $k$-groupe de type $D_4$, $F_4$, ou $E_7$ est déployé.* □

Remarquons que le cas de $E_8$ fait défaut dans ce théorème, exprimant ainsi une difficulté supplémentaire pour ce cas. Il n'est pas difficile d'étendre ce résultat au cas des caractéristiques 2 et 3.

THÉORÈME 5′. (a) *Tout $k$-groupe de type $B_n$, $C_n$, $D_n$ $(n \neq 4)$, $D_4$ non trialitaire, ou $G_2$ est déployé par une tour d'extensions quadratiques séparables.*
(b) *Tout $k$-groupe de type $D_4$, $F_4$, ou $E_7$ est déployé par une tour d'extensions galoisiennes de degrés 2 ou 3.* □

Rappelons aussi le lemme suivant de Tits, qui intervient dans la preuve du théorème 5.

LEMME 16 ([T6], lemme 1). *Soit $G/k$ une forme fortement interne de type $X = F_4$ $E_6$, $E_7$. Alors $G$ contient un sous-groupe semi-simple $H$ respectivement de type $A_2 \times A_2$, $F_4$, $E_6$. De plus, si $X = F_4$, chacun des deux facteurs de type $A_2$ d'un tel sous-groupe $H$ est défini sur $k$ et si $X = E_7$, $H$ est fortement intérieur sur toute extension sur lequel il est intérieur.* □

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires à la preuve du théorème 4. Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé, le corps $k$ satisfaisant les hypothèses de la conjecture II. On note $G_0$ la forme déployée du groupe $G$, parfois désignée uniquement par son type. La démonstration procède par induction sur les types en utilisant la proposition 2 du §II.2 et ses corollaires sur les extensions quadratiques et cycliques d'ordre 3. Remarquons tout d'abord que les cas ${}^1A_n$ et $C_n$ sont réglés indépendamment des hypothèses faites sur le corps (cf. [Se1], §III.1).

*Groupes de type ${}^2A_n$.* Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé de type ${}^2A_n$ associé à l'extension quadratique séparable $L/k$. Comme $G_L$ est déployé de type

$A_n$, on a $H^1(L/k, G) = H^1(k, G)$ et le corollaire 2.a (§III.1) montre l'assertion par récurrence sur $n \geqslant 2$.

*Groupes de type $B_n$ (resp. $D_n$).* Si $G_0$ désigne le groupe de Chevalley de type $B_n$ (resp. $D_n$), le théorème 5′ ci-dessus montre qu'il suffit de montrer que $H^1(L/k, G_0) = 1$ pour toute extension quadratique séparable $L/k$. Le corollaire 2.a montre alors l'assertion par récurrence sur $n \geqslant 2$.

*Groupes de type ${}^2D_n$.* Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé de type ${}^2D_n$ associé à l'extension quadratique séparable $L/k$. Comme $G_L$ est déployé de type $D_n$, on a $H^1(L/k, G) = H^1(k, G)$ d'après le cas précédent. Le corollaire 2.a montre alors l'assertion par récurrence sur $n \geqslant 2$.

*Groupes de type ${}^3D_4$.* Ce cas est traité avec le corollaire 3 du §III.1.

*Groupes de type ${}^6D_4$.* Soit $G/k$ de type ${}^6D_4$; on note $L/k$ l'extension cubique associée à $G$, d'extension discriminant $k'/k$ et de clôture galoisienne $L' = L.k'$. Le cas précédent implique $H^1(k'/k, G) = H^1(k, G)$. On considère le sous-groupe maximal $H = \big(SL_2 \times R_{L/k}SL_2\big)/\mu_2$ de $G$ ($\mu_2$ étant plongé diagonalement), et le $k$-tore maximal $T_0 = \big(\mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m\big)/\mu_2$, qui est le centralisateur d'un $k$-tore maximal déployé de $G$. On va montrer que l'application $H^1(k, H) \to H^1(k, G)$ est surjective. Soit $\gamma \in H^1(k'/k, G)$. Le lemme 14 entraîne l'existence d'un $k$-tore $T/k$ tel que $\gamma$ provienne de $H^1(k, T)$ et tel qu'il existe un sous-groupe de Borel $B_{k'}$ de $G_{k'}$ satisfaisant $T/k = B_{k'} \cap {}^{\sigma}B_{k'}$. Comme $\sigma$ transforme les racines positives de $T_{k'}$ en racines négatives, un coup d'oeil sur le système de racines $D_4$ ($w_0 = -1$, cf. [Bou]) montre que $\sigma$ agit sur $T_{k'}$ par $t \to t^{-1}$. Par suite, $T \xrightarrow{\sim} R^1_{k'/k}(T_0)$ est plongeable dans $H$, et comme l'image de l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ ne dépend pas du plongement $T \hookrightarrow G$ et que $H^1(k', T) = 0$, on a $\gamma \in \mathrm{Im}\big(H^1(k'/k, H) \to H^1(k, G)\big)$. Il suffit donc de montrer que l'application $H^1(k'/k, H) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale. Le bord $\delta : H^1(k'/k, H) \to Br(k'/k) = k^\times/N_{k'/k}(k'^\times)$ est une bijection. Le plongement diagonal $SL_2 \to SL_2 \times R_{L/k}SL_2$ induit un plongement $PGL_2 \to H$ de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, PGL_2) & \xrightarrow{\delta} & {}_2Br(k) \\ \downarrow & & \| \\ H^1(k, H) & \longrightarrow & {}_2Br(k). \end{array}$$

commute. On considère le $k$-tore $S = R_{k'/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ de $PGL_2$. Alors $H^1(k, S) = Br(k'/k)$ et le comosé $\delta : H^1(k, S) \to H^1(k'/k, PGL_2) \to Br(k'/k)$ est l'identité. La proposition 2(a) montre alors que le composé

$$k^\times \to k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) = H^1(k'/k, S) \to H^1(k'/k, T) \to H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$$

est nul, ce qui termine ce cas.

*Groupes de type $F_4$.* C'est un cas intéressant, puisque l'on dispose de deux démonstrations distinctes, l'une passant par les invariants de Rost (cf. [BP], [Se2] et [Gi2] § 5.4 en caractéristique positive) et une autre s'appuyant sur le cas $D_4$ que l'on va donner ici. On note $G_0 = F_4$, $T_0$ un $k$-tore maximal déployé et $B_0$ un sous-groupe de Borel de $G_0$. Suivant [A, §14], il existe un sous-groupe déployé $H_0$ semi-simple simplement connexe de type $D_4$ tel que $B_0 \cap H_0$ est un sous-groupe de Borel de $H_0$. On sait que $N_{G_0}(H_0) = H_0 \rtimes \mathrm{Aut}(H_0, B_0 \cap H_0) = H_0 \rtimes S_3$ et $N_{H_0 \rtimes S_3}(T_0) = N_{G_0}(T_0)$. Comme l'application $H^1(k, N_{G_0}(T_0)) \to H^1(k, G_0)$ est surjective, l'application $H^1(k, H_0 \rtimes S_3) \to H^1(k, G_0)$ est aussi surjective. Or le cas des groupes quasi-déployés de type $D_4$ traité précédemment montre que $H^1(k, H_0 \rtimes S_3) \xrightarrow{\sim} H^1(k, S_3)$ et qu'ainsi tout groupe de type $F_4$ contient un sous-groupe quasi-déployé de type $D_4$ et est donc isotrope. On est donc ramené à des groupes plus petits et l'induction sur les types donne $H^1(k, F_4) = 1$.

*Groupes de type $E_6$.* Suivant le lemme 16 (§ III.2), on sait que toute forme fortement interne d'un groupe de type $E_6$ contient un sous-groupe de type $F_4$, et est donc de rang relatif supérieur ou égal à 4. Par suite, si $E_6$ désigne le groupe de Chevalley simplement connexe de type $E_6$, on sait que toute classe de $H^1(k, E_6)$ provient d'un groupe simplement connexe déployé de type $A_1 \times A_1$ ou $A_2$, donc est triviale.

*Groupes de type ${}^2E_6$.* Exactement comme ${}^2D_n$.

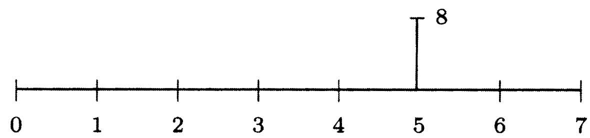
*Groupes de type $E_7$.* D'après le corollaire 2(a), il est loisible de supposer que $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Soit $[z] \in H^1(k, E_7)$ et $G$ le groupe tordu par le cocycle $z$. D'apr'es le lemme 5, on peut supposer le groupe $G$ anisotrope. Suivant le lemme 16, toute forme fortement interne d'un groupe de type $E_7$ contient un sous-groupe $H$ de type $E_6$. Le groupe $H$ est une forme interne et la seconde assertion du lemme 16 dit que $H$ est une forme fortement interne, donc déployée d'après le cas de $E_6$ traité précédemment. Le groupe $G$ est donc isotrope, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

*Groupes de type $E_8$.* On suppose que $\mathcal{G}$ est un pro $p$-groupe. Si $p \notin S(E_8)$, le théorème 2 du § I.2 montre que $H^1(k, G) = 1$. Supposons tout d'abord que $p = 2$. Il suffit alors de montrer que $H^1(L/k, E_8)$ pour toute extension quadratique séparable $L/k$, ce qui résulte du corollaire 2.a (§ III.1). Supposons maintenant $p = 3$. On considère le sous-groupe semi-simple $H_0$ associé à la racine $\alpha_2$ du

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

diagramme de Dynkin (cf. § 0.4)

$E_8$




Le groupe $H_0$ est de type $E_6 \times A_2$ et si $E_6/k$ désigne le groupe de Chevalley simplement connexe de type $E_6$, on a $H_0 \approx (E_6 \times SL_3)/\mu_3$ où $\mu_3$ se plonge diagonalement dans $E_6 \times SL_3$. On peut appliquer le lemme 3 (§II.2) et ainsi l'application $H^1(k, H_0) \to H^1(k, G_0)$ est surjective. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_3 \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & E_6 \times SL_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_3 \times \mu_3 \arrow[r] & E_6 \times SL_3 \arrow[r] & E_6/\mu_3 \times PGL_3 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

induisant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, H_0) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & {}_3Br(k) \arrow[d, "\Delta_*"'] \\
H^1(k, E_6/\mu_3) \times H^1(k, PGL_3) \arrow[r] & {}_3Br(k) \times {}_3Br(k).
\end{tikzcd}$$

Soit $[z] \in H^1(k, H_0)$. Le diagramme indique que $\delta([z])$ provient de $H^1(k, PGL_3)$ et est donc la classe d'une algèbre cyclique. Par suite, il existe une extension cyclique $L/k$ d'ordre 3 tuant $\partial([z])$. D'après les cas précédents, on sait que le noyau de $H^1(L, H_0) \to {}_3Br(L)$ est trivial, ainsi l'extension $L/k$ tue $[z]$. Le groupe semi-simple ${}_zH_0$ est donc déployé par $L/k$ et d'après le lemme 15 (§ 36.1), on sait qu'il admet un $k$-tore maximal $T/k$ déployé par $L/k$. Le théorème de Steinberg montre l'existence d'un plongement $T \hookrightarrow H_0$ tel que $[z]$ appartienne à l'image de de $H^1(k, T) \to H^1(k, H_0)$. Comme $T/k$ est un $k$-tore maximal de $G_0/k$, la proposition 2 (§ 26.2) conclut que l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G_0)$ est nulle et l'image de $[z]$ dans $H^1(k, G_0)$ est donc triviale.

Le cas le plus intéressant est $p = 5$ pour lequel on dispose de deux démonstrations, la démonstration originale étant celle de Chernousov [Ch2] (cf. [Gi2] th. 10 en caractéristique positive). On considère le sous-groupe semi-simple $H_0$ associé à la racine $\alpha_4$ du diagramme de Dynkin de type $E_8$ ci-dessus. On sait que $H_0 = SL_5 \times SL_5/\mu$ où $\mu = \mathrm{Ker}\Big(\mu_5 \overset{(\times 1, \times 2)}{\longrightarrow} \mu_5 \times \mu_5\Big) \approx \mu_5$ d'après le § 1.7 de [T4]. Le groupe de Weyl de $H_0$ est donc le produit semi-direct de $S_5 \times S_5$ par $\mathbb{Z}/2$ et le lemme 3 du § 1.2 montre que l'application $H^1(k, H_0) \to H^1(k, G_0)$ est surjective.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_5 & \longrightarrow & SL_5 \times SL_5 & \longrightarrow & H_0 & \longrightarrow & 1 \\ & & {\scriptstyle (\times 1, \times 2)}\downarrow & & \| & & {\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mu_5 \times \mu_5 & \longrightarrow & SL_5 \times SL_5 & \longrightarrow & PGL_5 \times PGL_5 & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

induisant (puisque $H^1(k, SL_5 \times SL_5) = 1$) le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(k, H_0) & \xrightarrow{\delta} & {}_5Br(k) \\ & & {\scriptstyle \lambda^*}\downarrow & & {\scriptstyle (\times 1, \times 2)}\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^1(k, PGL_5) \times H^1(k, PGL_5) & \xrightarrow{\delta'} & {}_5Br(k) \times {}_5 Br(k). \end{array}$$

Soit $[z] \in H^1(k, H_0)$. Le diagramme indique que $\partial([z])$ provient de $H^1(k, PGL_5)$ et est donc la classe d'une algèbre cyclique $D/k$. Par suite, il existe une extension cyclique $L/k$ d'ordre 5 tuant $\partial([z])$ et telle que le tore $R_{L/k}(\mathbb{G}_m) \times R_{L/k}(\mathbb{G}_m)$ soit un tore maximal de ${}_{\lambda_*(z)}(PGL_5 \times PGL_5)$. Alors le tore $T = \lambda^{-1}\big(R_{L/k}(\mathbb{G}_m) \times R_{L/k}(\mathbb{G}_m)\big)$ est un sous-tore maximal de ${}_zH_0$. Le théorème de Steinberg montre l'existence d'un plongement $T \hookrightarrow H_0$ tel que $[z]$ appartienne à l'image de de $H^1(k, T) \to H^1(k, H_0)$. Comme $T/k$ est un $k$-tore maximal de $G_0/k$ déployé par l'extension cyclique $L/k$, la proposition 2 (§ II.2) conclut que l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G_0)$ est nulle et ainsi l'image de $[z]$ dans $H^1(k, G_0)$ est triviale.

*Remarque 4.* La démonstration du cas de type $E_8$ montre en fait un peu plus. Si $k$ satisfait les hypothèses de la conjecture 26 et si $H_0$ désigne le sous-groupe maximal de $E_8$ de type $E_6 \times A_2$, on sait d'après Wedderburn que toute algèbre simple centrale de degré 3 est cyclique. La démonstration ci-dessus montre alors que l'application $H^1(k, H_0) \to H^1(k, E_8)$ est triviale.

### III.4. CONSÉQUENCES SUR LES ISOGÉNIES

Le théorème 4 (début du § III) et un travail précédent [Gi1] permettent d'obtenir sans difficulté le

THÉORÈME 6. *Soit $G'/k \to G/k$ une isogénie spéciale de groupes réductifs de noyau le k-groupe de type multiplicatif $\mu$, i.e. $G'$ est le produit direct d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore quasi-trivial. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 2$ pour tout $p \in S(G)$. Soit $X$ la variété des sous-groupes de Borel de $G/k$.*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(a) $N_X^{sep}(k) = k^\times$.

(b) *L'application caractéristique* $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ *est surjective, et on a une suite exacte naturelle de groupes*

$$G'(k)/R \to G(k)/R \to H^1_{fppf}(k, \mu)/R \to 1.$$

*Démonstration.* On peut supposer que $G$ est simplement connexe, de groupe fondamental $\mu$. On note $G^{qd}$ la forme quasi-déployée de $G$. On sait qu'il existe une famille d'extensions séparables $(k_i)_{i=1,\dots,r}$ et des groupes semi-simples simplement connexes quasi-déployés $G_i/k_i$ respectivement absolument presque $k_i$-simple tels que $G^{qd} = \prod_i R_{k_i/k} G_i$. Par un argument de transfert, il est loisible de supposer que $\mathcal{G}$ est un $p$-groupe pour $p \in S(G)$. On déduit du théorème 4 (§III) et du lemme de Schapiro que $H^1(k, G^{qd}) = \prod_i H^1(k_i, G_i) = 1$. Le lemme 12 (§II.2) montre alors que $N_X^{sep}(k) = k^\times$.

(b) On commence par établir l'énoncé suivant.

LEMME 17 (i) *La restriction de l'application caractéristique* $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ *à* $RG(k)$ *induit une surjection* $RG(k) \to RH^1_{fppf}(k, \mu)$.

(ii) *L'application caractéristique* $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ *est surjective.*

*Preuve du lemme.* (i) Soient $1 \to \mu \to S \to E \to 1$ une résolution flasque de $\mu$ et $\delta : E(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ l'application de bord associée. On note $C_\lambda(k) \subset H^1_{fppf}(k, \mu)$ (resp. $RC_\lambda(k) \subset H^1_{fppf}(k, \mu)$ ) l'image par l'application caractéristique de $G(k)$ (resp. $RG(k)$). On a $\delta(E(k)) = RH^1_{fppf}(k, \mu)$ (cf. §I.3) et il suffit de montrer que $\delta(E(k)) \subset RC_\lambda(k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = R_{L/k}\mathbb{G}_m$ pour une extension finie séparable de corps $L/k$.

*1er cas.* $L = k$ et $E = \mathbb{G}_m$ Suivant la proposition 36.2.5 de [Gi1], on a

$$\delta\big(N_X^{sep}(k)\big) \subset RC_\lambda(k) \subset RH^1_{fppf}(k, \mu).$$

D'après le *a*), on a donc $\delta(k^\times) \subset RC_\lambda(k)$.

*2nd cas.* $E = R_{L/k}\mathbb{G}_m$ *avec* $L/k$ *finie séparable.* Il existe une algèbre étale $A/L$ telle que $E \otimes_L k = \mathbb{G}_{m,L} \times R_{A/L}\mathbb{G}_m$. Considérons le diagramme commutatif de corestrictions

$$\begin{array}{ccc} E(L) = L^\times \times A^\times & \xrightarrow{\delta_L} & H^1_{fppf}(L, \mu) \\ {\scriptstyle N_{L/k}}\big\downarrow & & {\scriptstyle N_{L/k}}\big\downarrow \\ E(k) = L^\times & \xrightarrow{\delta_k} & H^1_{fppf}(k, \mu). \end{array}$$

La norme $N_{L/k} : E(L) \to E(k)$ induit l'identité sur le premier facteur $L^\times$. Le premier cas appliqué au corps $L$ et à $\mathbb{G}_{m,L}$ implique que $\delta_L(L^\times) \subset R(L, C_\lambda)$. Le théorème 26.3.2 de [Gi1] montre que $\delta(E(k)) \subset N_{L/k}\big(RC_\lambda(L)\big) \subset RC_\lambda(k)$.

(ii) Montrons tout d'abord la surjectivité de l'application caractéristique $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ dans le cas où $G$ est semi-simple. Une chasse au diagramme laissée au lecteur permet de se ramener au cas où $G$ est adjoint et $\mu$ est le groupe fondamental de $G$. Utilisant la clasification de tels groupes et le lemme de Schapiro, on peut supposer que $G$ est absolument simple. La table (cf. [PR] p. 332) montre que $\mu/k$ de $G/k$ est déployé par une extension métacyclique, donc $H^1_{fppf}(k, \mu)/R = 1$ et le $i)$ montre que l'application $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ est surjective.

Dans le cas général, $G'$ n'étant plus supposé semi-simple et $G$ n'étant plus supposé adjoint, il existe un $k$-tore quasi-trivial $E'/k$ tel que $G' = DG' \times E'$ où $DG'$ est semi-simple simplement connexe. On a $\mu \subset DG' \times E'$ et on note $B$ (resp. $C$) l'image de $\mu$ par la projection $DG' \times E' \to DG'$ (resp. $DG' \times E' \to E'$). Comme $DG'$ est semi-simple simplement connexe, l'application $H^1(k, B) \to H^1(k, DG')$ est triviale. Arguant du théorème 90 de Hilbert, on sait de plus que l'application $H^1(k, C) \to H^1(k, E') = 1$ est triviale; il résulte que l'application $H^1_{fppf}(k, \mu) \to H^1(k, G')$ est triviale, i.e. l'application caractéristique $G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ est surjective. Le lemme est démontré et entraîne avec la proposition II.1.3 de [Gi1] l'exactitude de la suite

$$G'(k)/R \to G(k)/R \to H^1_{fppf}(k, \mu)/R \to 1. \qquad \square$$

*Remarque* 5. Il est à noter que le (c) était déjà connu pour les groupes de type $D_4$ [Ga1] et que l'assertion (b) généralise le théorème 36.3.1 de [Gi1] du cas d'un corps global imaginaire pur au cas d'un corps de dimension cohomologique $\leqslant 2$.

Si $G/k$ est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque $k$-simple, de diagramme de Dynkin $\Delta$ et de diagramme de Dynkin complété $\mathbf{\Delta}$, et satisfaisant les hypothèses de la conjecture 26, on observe les trois faits suivants:

(1) Suivant le théorème 4 (§ III), l'hypothèse **A** de la proposition 2 (§ II.2) est satisfaite, i.e pour toute extension séparable finie $k'/k$ et pour tout diagramme de Dynkin $\Delta' \in \mathcal{D}_{k'}$, $\Delta' < \mathbf{\Delta}$, $\Delta' \neq \Delta$, si $H/k'$ désigne le sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé de diagramme de Dynkin $\Delta'$ (muni de l'action de $\mathrm{Gal}(k'.k_s)$), on a $H^1(k', H) = 1$;
(2) l'hypothèse **B** de la proposition 2 est satisfaite, i.e. pour toute extension séparable finie $k'/k$, on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$ ($X$ est la variété des sous-groupes de Borel de $G$);
(3) l'application $H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ est injective suivant le $b)$ du théorème 6.

L'application de la proposition 2 et d'un argument de torsion implique alors le théorème annoncé dans l'introduction.

THÉORÈME 7. *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, $T/k$ un $k$-tore maximal de $G$ déployé par une extension cyclique de degré*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

*premier. On suppose que* $\dim_p^{sep}(k) \leqslant 2$ *pour tout premier* $p \in S(G)$*. Alors l'application naturelle* $i_* : H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ *est nulle.* □

## IV. Résultats partiels pour des groupes tordus

La proposition 2 montre qu'il est naturel détudier les $k$-tores maximaux $T$ des groupes semi-simples simplement connexes du point de vue de l'invariant $H^1(k, T)/R$.

### IV.1. TORES MAXIMAUX

La proposition ci-dessous montre que les applications directes de la proposition 2 sont très limitées puisque le groupe $H^1(k, T)/R$ est non trivial en général pour tous les types exceptés ${}^1A_n$, $C_n$ et $G_2$. Nous n'avons pas cherché à réaliser de facon effective ces contre-exemples en dimension cohomologique 2 (i.e. avec $cd(k) \leqslant 2$ et $H^1(k, T)/R \neq 1$), mais il est probable qu'il est possible de le faire. Nous discuterons cependant en détail le cas particulier important des corps de nombres dans la dernière partie.

PROPOSITION 3. *Soit* $G/k$ *un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque simple. On note* $X$ *le type quasi-déployé de* $G$*.*

(a) *Si* $X = {}^1A_n, C_n$ *ou* $G_2$*, alors pour tout k-tore maximal* $T/k$ *de* $G$*, on a* $H^1(k, T)/R = 1$.
(b) *Soit p un nombre premier. Dans les cas suivants*
- $p = 2$ *et* $X = {}^2A_3 = {}^2D_3$, $B_n$ $(n \geqslant 3)$, ${}^1D_n$ $(n \geqslant 4)$, $F_4$, $E_6$, $E_7$, $E_8$,
- $p = 3$ *et* $X = {}^3D_4, F_4, {}^1E_6, E_7, E_8$,
- $p = 5$ *et* $X = E_8$,

*il existe un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé* $G/\mathbb{Q}$ *absolument presque simple de type* $X$*, un* $\mathbb{Q}$*-tore maximal* $T$ *de* $G$*, et une extension de corps* $E/\mathbb{Q}$ *telle que* $\big(H^1(E, T)/R\big)\{p\} \neq 1$.

Enonçons sans démonstration le lemme facile suivant qui permet, dans le cas d'un groupe déployé, d'être ramené au cas d'un tore maximal $T$ non inclus dans un sous-groupe parabolique propre de $G$.

LEMME 18. (a) *Soit* $1 \to G \to G' \to S \to 1$ *une suite exacte de k-groupes réductifs, où S est un k-tore. Soit* $\mathcal{T}$ *(resp.* $\mathcal{T}'$*) la variété des tores maximaux de G (resp.* $G'$*). Alors la trace induit un isomorphisme naturel* $\mathcal{T}' \approx \mathcal{T}$.

(b) *Soit G un groupe semi-simple quasi-déployé absolument presque k-simple, et* $H \subset G$ *un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. On suppose que le centre réductif de H est un k-tore déployé (ce qui est toujours le cas si G est lui-même déployé). Soit S un k-tore maximal du groupe semi-simple simplement* *connexe DH et T le k-tore maximal de H (donc de G) associé par le a). Alors on a un isomorphisme* $H^1(k,S)/R \approx H^1(k,T)/R$.

*Démonstration.* Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe déployé de type $A_n, C_n$ ou $G_2$ et $T/k$ un $k$-tore maximal de $G/k$. Si $X = A_n$, alors $G = SL_{n+1}$ et il existe une algèbre étale $A/k$ de rang $n+1$ telle que $T = R^1_{A/k}\mathbb{G}_m = \mathrm{Ker}(R_{A/k}\mathbb{G}_m \xrightarrow{N_{A/k}} \mathbb{G}_m)$. Suivant le théorème 90 de Hilbert, on a $H^1(k,T) = k^\times/N_{A/k}(A^\times)$, d'où $H^1(k,T)/R = 1$.

Soit $T$ un $k$-tore maxinal du groupe semi-simple simplement connexe de type $C_n$. D'après la descrition du groupe des poids (cf. [Bou]), il est aisé de voir qu'il existe des $k$-algèbres étales $L \subset E$ satisfaisant $[E:k] = n$ et $[L:k] = 2n$ et telles que $T = R_{E/k}\big(R^1_{L/E}\mathbb{G}_m\big)$. On a donc $H^1(k,T) = \mathrm{Ker}(Br(E) \to Br(L)) \approx E^\times/N_{L/E}(L^\times)$. Il résulte que $H^1(k,T)/R = 1$. Le cas de $G_2$ est réglé par le lemme 6 du §I.3.

(b) On pose $k = \mathbb{Q}$.

$p = 2$. On commence par le cas de ${}^2A_3$. Soit $L/k$ une extension quadratique séparable et $G/k$ le groupe quasi-déployé de type ${}^2A_3$ associé à $L/k$. Soit $M/k = k_1 \times k_2$ l'algèbre étale produit de deux extensions biquadratiques telle que l'algèbre étale $k_1.k_2.L$ soit un corps. Alors le tore $T = \mathrm{Ker}\big(R_{L/k}R^1_{M/k}\mathbb{G}_m \xrightarrow{N_{L/k}} R^1_{M/k}\mathbb{G}_m\big)$ est un $k$-tore maximal de $G$. Nous prétendons que le foncteur $H^1(.,T)$ n'est pas $R$-trivial. Pour cela, on considère le tore dual $T^D$ de $T$, i.e. défini par $\hat{T}^D = \hat{T}^0$, et d'après le lemme 6.c, il suffit de voir que $T^D$ n'est pas $R$-trivial. Le tore $T^D$ est décrit par la suite exacte

$$1 \to R_{M/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \to R_{L/k}\Big(R_{M\otimes_k/L}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m\Big) \to T^D \to 1.$$

Comme $H^1\big(k, R_{M/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m\big) = \mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(M)\big) = \mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(k_1) \oplus Br(k_2)\big)$, on obtient une surjection

$$T^D(k) \to \mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(k_1) \oplus Br(k_2) \oplus Br(L)\big) \to 0,$$

et on sait d'après [ELTV, § 3, § 5], que le second objet n'est pas pas paramétrisable rationnellement. Il résulte que $T^D$ n'est pas $R$-trivial.

Passons au type $B_3$ déployé dont le groupe de Chevalley simplement connexe est le groupe déployé $\mathrm{Spin}_7$. On dispose d'un plongement naturel $\mathrm{Spin}_6 \to \mathrm{Spin}_7$ et l'unique automorphisme extérieur de $Spin_6$ se prolonge en un automorphisme intérieur de $Spin_7$. En d'autres mots, le plongement $\mathrm{Spin}_6 \to \mathrm{Spin}_7$ se prolonge en $\mathrm{Aut}(\mathrm{Spin}_6) \to \mathrm{Spin}_7$. On déduit de cette remarque que le tore $T$ étudié précédemment est un sous-tore du groupe déployé $\mathrm{Spin}_7$, et l'assertion est donc démontrée dans ce cas.

Pour le type $D_4$, on considère la suite exacte $1 \to \mu_2 \to \mathrm{Spin}_8 \to SO_8 \to 1$. Soit $L/k$ une extension quadratique $k_1, k_2/k$ deux extensions quadratiques telles que $k_1 \cdot k_2 \cdot L$ est un corps. On pose $M = k_1 \times k_2$. Le tore $R_{M/k}\big(R^1_{M.L/M}\mathbb{G}_m\big)$ est un $k$-tore maximal de $SO_8$. Prenant son image inverse par l'isogénie $\mathrm{Spin}_8 \to SO_8$,

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

on obtient un tore maximal $T$ de $\mathrm{Spin}_8$ s'inscrivant dans une suite exacte $1 \to \mu_2 \to T \to R_{M/k}\big(R^1_{M.L/M}\mathbb{G}_m\big) \to 1$. La suite exacte longue de cohomologie galoisienne donne

$$\cdots \to k^\times/k^{\times 2} \to H^1(k,T) \to L^\times/N_{L.M}\big((LM)^\times\big) \to_2 Br(k).$$

Faisant l'identification $L^\times/N_{L.M}\big((LM)^\times\big) \xrightarrow{\sim} Br(M.L/M)$, il n'est pas difficile de voir que la flèche de bord $Br(M.L/M) \to Br(k)$ est la corestriction de $M$ à $k$. On a donc une surjection

$$H^1(k,T) \to \mathrm{Ker}\Big(L^\times/N_{L.M}\big((LM)^\times\big) \xrightarrow{N_{M/k}} k^\times/N_{L/k}(L^\times)\Big) \to 0.$$

Le terme de droite est déjà apparu dans l'étude du type ${}^2A_3$ et on sait que l'on ne peut pas le paramétrer rationnellement. Il résulte que le foncteur $H^1(.,T)$ n'est pas $R$-trivial.

Pour les autres types $F_4$, $E_6, \dots$ , l'assertion résulte du lemme 18.b.

$p = 3$. Commencons par le cas de $F_4$. Alors $F_4$ possède un sous-groupe maximal de type $A_2 \times A_2$ qui est isomorphe à $SL_3 \times SL_3/\mu_3$ où $\mu_3$ est le sous-groupe diagonal du centre $\mu_3 \times \mu_3$ de $SL_3 \times SL_3$. Soient $k_1/k$ et $k_2/k$ deux extensions cycliques d'ordre 3. Alors le quotient $T/k$ du tore $R^1_{k_1/k}\mathbb{G}_m \times R^1_{k_1/k}\mathbb{G}_m$ par le sous-groupe $\mu_3$ diagonal est un $k$-tore maximal de $H$, donc de $F_4$. Le groupe $H^1(k,T)$ s'obtient par la suite exacte

$$\begin{aligned} &k^\times/k^{\times 3} \to k^\times/N_{k_1/k}(k_1^\times) \times k^\times/N_{k_2/k}(k_2^\times) \to H^1(k,T) \to \\ &\quad H^2(k,\mu_3) \to H^2(k_1/k,\mathbb{G}_m) \oplus H^2(k_2/k,\mathbb{G}_m). \end{aligned}$$

On tombe donc sur l'objet $\mathrm{Ker}\big(Br(k) \to Br(k_1) \oplus Br(k_2)\big)$ qui n'est pas $R$-trivial suivant le lemme 6 (§ I.3). Le tore précédent est aussi le tore maximal d'un groupe quasi-déployé de type ${}^3D_4$, ce qui traite aussi ce cas. Pour le type $E_6$, on considère le sous-groupe maximal de $H$ de type $(A_2)^3$ et isomorphe à $(SL_3)^3/\mu_3$ où $\mu_3$ est le sous-groupe diagonal du centre $(\mu_3)^3$ de $(SL_3)^3$. Un argument similaire montre alors qu'il existe un exemple de $k$-tore de $E_6$ tel que la partie 3-primaire de $H^1(k,T)/R$ soit non triviale. Le lemme 18 règle le cas des types $E_7$ et $E_8$.

$p = 5$. Pour $E_8$, on considère le sous-groupe maximal de type $A_4 \times A_4$ et la preuve est exactement analogue à celle produite pour $F_4$ et pour $p = 3$. □

### IV.2. GROUPES DE TYPE $D_4$, $E_6$ ET $E_7$

Dans cette section, nous donnons des applications du théorème 7 du §III.3 aux groupes exceptionnels de type $D_4$, $E_6$ et $E_7$, dont les algèbres de Tits n'ont pas d'index trop grands.

THÉORÈME 8 (type $D_4$). *On suppose* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe de type ${}^{3,6}D_4$. On note $L/k$ l'extension étale cubique associée*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

*à la forme quasi-déployée de G. On suppose que $cd_2(k) \leqslant 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leqslant 2$. Si l'algèbre d'Allen de G est d'indice 2, alors $H^1(k, G) = 1$ et le groupe G admet un sous-groupe parabolique de type* $\{1, 3, 4\}$.

*Démonstration.* On note $D/L$ l'algèbre d'Allen de $G$, que l'on suppose d'indice 2. Selon [Ga2], il existe une forme interne de $G$ (i.e. avec même algèbre d'Allen) qui soit isotrope de type $\{1, 3, 4\}$. On peut donc supposer $G$ isotrope et il suffit de voir que $H^1(k, G) = 1$. En particulier, ce groupe $G$ possède un sous-groupe maximal $H = \big(SL_2 \times R_{L/k}SL(D)\big)/\mu_2$, isotrope de type $A_1^4$. D'après la proposition 43.9 p. 555 de [KMRS], prop. 43.9, on sait que $D$ est semblable à une algèbre de quaternions $(a, b)$ avec $a \in k^\times$ et $b \in L^\times$. On note $k' = k(\sqrt{a})$ et $\sigma$ le générateur de $\mathrm{Gal}(k'/k)$. Comme le groupe $G_{k'}$ est quasi-déployé, on a $H^1(k'/k, G) = H^1(k, G)$ d'après le théorème 4 (§36). On va montrer que $H^1(k'/k, H) \to H^1(k, G)$ est surjectif. Le groupe $H$ admet le le $k$-tore maximal

$$T_1 = R^1_{k'/k}[(\mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m)/\mu_2] \xrightarrow{\sim} R^1_{k'/k}(\mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m)/\mu_2.$$

Soit $\gamma \in H^1(k'/k, G)$. Le lemme 14 entraîne l'existence d'un $k$-tore $T/k$ tel que $\gamma$ provienne de $H^1(k'/k, T)$ et tel qu'il existe un sous-groupe de Borel $B_{k'}$ de $G_{k'}$ satisfaisant $T/k = B_{k'} \cap {}^\sigma B_{k'}$; $\sigma$ agit sur $T_{k'}$ par $t \to t^{-1}$. Par suite, on a $T \xrightarrow{\sim} T_1$ et $T$ est plongeable dans le sous-groupe maximal $H$. Comme $H^1(k', T) = 0$ et comme l'image de l'application $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ ne dépend pas du plongement $T \hookrightarrow G$, on a $\gamma \in \mathrm{Im}\big(H^1(k'/k, H) \to H^1(k, G)\big)$. Le bord $\delta : H^1(k'/k, H) \to Br(k'/k) = k^\times/N_{k'/k}(k'^\times)$ est injectif. Il suffit donc de montrer que $\delta[\mathrm{Ker}(H^1(k'/k, H) \to H^1(k, G))]$ se surjecte sur $k^\times/N_{k'/k}(k'^\times)$. Le plongement diagonal $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m$ induit un plongement $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m/\mu_2 \hookrightarrow \big(\mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m\big)/\mu_2$, d'où un plongement

$$R^1_{k'/k}\mathbb{G}_m \hookrightarrow T_1.$$

Une chasse au diagramme laissée au lecteur montre que le composé

$$\begin{aligned} k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) = H^1\big(k'/k, R^1_{k'/k}\mathbb{G}_m)\big) \to H^1(k'/k, T_1) \to \\ \to H^1(k, H) \xrightarrow{\delta} Br(k'/k) = k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) \end{aligned}$$

est l'identité; la proposition 2.a. montre alors que le composé

$$\begin{aligned} k^\times \to k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) = H^1\big(k'/k, R^1_{k'/k}\mathbb{G}_m)\big) \to H^1(k'/k, T_1) \\ \to H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad}) \end{aligned}$$

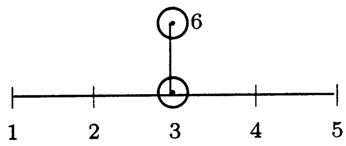
est nul, ce qui achève la démonstration, vu que $H^1(k, G)$ s'injecte dans $H^1(k, G_{ad})$ d'après le théorème 6. □

THÉORÈME 9 (type $E_6$). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe de type $E_6$. On suppose que* $\dim_2^{sep}(k) \leqslant 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leqslant 2$.

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(a) *Si $G/k$ est de type ${}^1E_6$, et si l'algèbre de Tits de $G$ est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, si l'algèbre de Tits de $G$ est d'indice 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et $G/k$ admet un sous-groupe parabolique de type* $\{1, 2, 4, 5\}$

$E_6$




(b) *Si $G/k$ est de type ${}^2E_6$ et si l'algèbre de Tits de $G$ est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et $G/k$ admet un sous-groupe parabolique de type* $\{1, 2, 4, 5\}$.

*Démonstration.* Le théorème 4 (§III) permet de supposer que l'algèbre de Tits $D$ de $G$ est d'indice 3. Si $G$ est une forme interne, on sait suivant le § 6.4.5 de [T3] qu'il existe une $k$-forme $G_1$ de $E_6$ d'algèbre de Tits $D$ et ayant un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que le même argument utilisant des sous-groupes de type $A_2 \times A_2 \times A_2$ montre que l'assertion précédente vaut aussi si $G$ est une forme externe. Il existe donc une $k$-forme $G_1$ de $E_6$ d'algèbre de Tits $D$ et ayant un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Il suffit donc de montrer que $H^1(k, G_1) = 1$, puisque $G$ est une $k$-forme fortement interne de $G_1$. On peut donc supposer dans la suite que $G$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$.

*Type* ${}^1E_6$. D'après un théorème de Wedderburn (cf. [KMRT], th. 19.2), on sait que toute algèbre simple centrale de degré 3 est une algèbre cyclique; il existe donc une extension cyclique $k'/k$ de degré 3 déployant $D$ et on a $H^1(k, G) = H^1(k'/k, G)$. Soit $[z] \in H^1(k'/k, G)$. Le groupe ${}_zG_{k'}$ est déployé. Le lemme 14 (§III.1) indique que ${}_zG$ possède un sous-groupe réductif $H$ de type $D_4$ déployé par $L/k$. Le groupe $DH$ est semi-simple de type $D_4$ et son invariant d'Allen est trivial. Le théorème 4 (§ III) implique que $DH$ est quasi-déployé et ainsi $H$ et à fortiori ${}_zG$ sont isotropes. Comme $\mathrm{Ind}_k(D) = 3$, la théorie de la réduction de l'indice ([MPW, II], table 8.A) jointe à la liste des types possibles [T1] montre que ${}_zG$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Le lemme 5.b (§ I.1) entraîne que $\gamma$ s'envoie sur 1 par $H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ et le théorème 6.b (§ III.3) permet de conclure que $\gamma = 1$.

*Type* ${}^2E_6$. On note $L/k$ l'extension quadratique associée à la forme quasi-déployée de $G$. Le cas précédent implique que $H^1(k, G_1) = H^1(L/k, G)$ et que $G_L$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Le lemme 14 (§ III.1) donne un $k$-tore $S$ de rang 2 déployé par $L/k$ de $G$, un tore maximal $T/k \subset Z_G(S)$ tel que $\gamma \in \mathrm{Im}\big(H^1(L/k, T) \to H^1(L/k, G)\big)$ de sorte que $DZ_G(S)$ soit un groupe simplement connexe de type $A_2 \times A_2$. Remarquons tout de suite que $DZ_G(S)$ est une forme externe et que le groupe $Gal(L/k)$ permute les deux facteurs de type $A_2$. En effet, supposons que $DZ_G(S)$ soit une forme interne. Alors

$DZ_G(S)$ est déployé par le produit $M/k = F_1.F_2$ de deux extensions galoisiennes de degré 3 et ainsi le groupe $G_M$ contient un groupe déployé de type $A_2 \times A_2$, ce qui n'est pas possible, vu que $G_M$ n'est pas une forme interne. Le groupe $DZ_G(S)$ est donc une forme externe, qui est déployée par $L/k$, il s'ensuit qu'il existe une algèbre simple centrale $A/L$ de degré 3 telle que $DZ_G(S) = R_{L/k}\big(SL_1(A)\big)$. Le lemme suivant n'est pas difficile à établir.

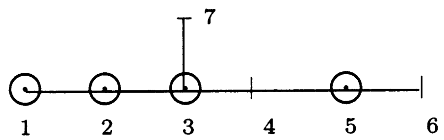
LEMME 19. *Soient $G_0/k$ le groupe de Chevalley simplement connexe de type $E_6$, et $S_0$ un tore déployé de rang 2 tel que $Z_{G_0}(S_0)$ soit un sous-groupe de Levi du groupe parabolique de type* $\{1, 2, 4, 5\}$. *Alors* $Z_{G_0}(S_0) = DZ_{G_0}(S_0) \times S_0$ *(Ind. utiliser le sous-groupe maximal de type $A_2 \times A_2 \times A_2$).* □

Il s'ensuit que $Z_G(S) = DZ_G(S) \times S$ et que $T = (DZ_G(S) \cap T) \times S$. Puisque $S \xrightarrow{\sim} R^1_{L/k}\mathbb{G}_m$, la proposition 2.a montre que l'application $H^1(k(DZ_G(S) \cap T)) \times H^1(k, S) \to H^1(k, G)$ est $H^1(k, S)$-équivariante. Il résulte donc que $\gamma$ provient de $H^1(k, DZ_G(S)) = 1$, puisque $DZ_G(S)$ est un groupe simplement connexe de type $A_2 \times A_2$. On conclut que $\gamma = 1$. □

THÉORÈME 10 (type $E_7$). *Soit $G/k$ un groupe semi-simple simplement connexe de type $E_7$. On suppose que* $\dim_2^{sep}(k) \leqslant 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leqslant 2$. *On note $D/k$ l'algèbre de Tits de $G$.*

(a) *Si* $\mathrm{Ind}_k(D) = 1$ *ou* 2, *alors* $H^1(k, G) = 1$. *De plus, $G/k$ admet un sous-groupe parabolique de type* $\{4, 6, 7\}$

$E_7$




(b) *Si* $\mathrm{Ind}_k(D) = 4$, *alors* $H^1(k, G) = 1$. *De plus, $G/k$ admet un sous-groupe parabolique de type* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

*Démonstration.* Soit donc $G/k$ un groupe simplement connexe de type $E_7$ d'algèbre de Tits $D$. Si $\mathrm{Ind}_k(D) = 1$, alors $G$ est déployé d'après le théorème 4 (§ III) et $H^1(k, G) = 1$.

(a) $\mathrm{Ind}_k(D) = 2$ Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, alors $D/k$ est une algèbre de quaternions et il existe une extension quadratique séparable $k'/k$ déployant $k'$. Si $\mathrm{car}(k) = 2$, alors $D/k$ est une algèbre notée $[a, b)$ (i.e. de présentation $X^2 - X = a$, $Y^2 = b$, $YXY^{-1} = X + 1$) et l'extension quadratique séparable $k' = k[x]/x^2 + x + a$ déploie $D$. Le groupe $G_{k'}$ est donc déployé et admet un sous-groupe parabolique de type $\{6\}$. Le lemme 14 (pa III.1) montre que le groupe $G/k$ possède un sous-groupe simplement connexe $H$ de type $E_6$ déployé par $k'/k$. Ainsi $H$ est une forme fortement interne de sa forme quasi-déployée et le théorème 4 assure que $H$ est quasi-déployé. Par suite $H$ et a fortiori $G$ sont trois fois isotropes (i.e. contiennent un $k$-tore déployé de rang 3) et la liste des diagrammes de Dynkin possibles [T1] établit que $G$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$. Le lemme 5.b (§ I.1) entraîne alors que l'application $H^1(k, G) \to H^1(k, G_{ad})$ est triviale et le théorème 6.b (§II.3) permet de conclure que $H^1(k, G) = 1$.

(b) $\mathrm{Ind}_k(D) = 4$ Puisque $D/k$ est d'indice 4 et d'exposant 2, un théorème d'Albert (cf. [KMRT], th. 16.1 p. 233) montre que si $\mathrm{car}(k) \neq 2$ (resp. $\mathrm{car}(k) \neq 2$), alors $D$ est une algèbre de biquaternions (resp. une algèbre $[a, b) \otimes_k [a', b')$). Par suite, il existe une extension quadratique séparable $k'/k$ satisfaisant $\mathrm{Ind}_{k'}(D) \leqslant 2$. Ainsi, le groupe $G_{k'}$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$. Le même argument qu'au (a) montre que $G$ a un sous-groupe $H$ semi-simple simplement connexe de type $A_3 \times A_1$ qui est déployé par l'extension $k'/k$. Notons $H_1 \subset H$ le facteur de type $A_3$. Le même argument (i.e. le lemme 14) montre que $H_1$ possède un sous-groupe $H_2$ de type $A_2$, qui est déployé par $k'/k$. Alors l'algèbre de Tits de $H_2$ est déployée et le théorème 4 montre que $H_2$ est quasi-déployé, donc a fortiori isotrope. Par suite, le groupe $G$ est isotrope et selon la table 8B p. 63 de [MPW], on sait que l'hypothèse $\mathrm{Ind}_k(D) = 4$ force $G$ à posséder un sous-groupe parabolique de type $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. De même qu'au *a*), on montre que $H^1(k, G) = 1$. □

## IV.3. DISCUSSION SUR LE TYPE $E_8$

THÉORÈME 11. *On suppose* $car(k) = 0$ *et* $cd_p(k) \leqslant 2$ *pour* $p = 2, 3, 5$. *Pour toute extension cyclique* $L/k$ *de degré* 2, 3 *ou* 5, *on a* $H^1(L/k, E_8) = 1$.

Il est intéressant d'isoler de la démonstration du théorème le lemme suivant.

LEMME 20. *On suppose* $car(k) = 0$. *On note* $H_0$ *le sous-groupe maximal déployé de* $E_8$ *de type* $E_6 \times A_2$. *Soit* $L/k$ *une extension cyclique de degré 3. On suppose que* $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. *Alors*

$$H^1(L/k, E_8)_{an} \subset \mathrm{Im}\big(H^1(k, H_0) \to H^1(k, E_8)\big)$$

*(*$H^1(L/k, E_8)_{an}$ *désigne le sous-ensemble des classes de cohomologie anisotropes, i.e. les classes* $[z]$ *telles que le groupe tordu* ${}_zE_8$ *soit anisotrope).*

*Démonstration du lemme 20.* On note $\sigma$ un générateur de $\mathrm{Gal}(L/k)$. Soit $z \in Z^1(k, E_8)_{an}$ et $G = {}_zE_8$ le groupe tordu. Soit $P_L$ un $L$-parabolique de $G_L$ de type $E_7$ et

$$C = P_L \cap \sigma(P_L) \cap \sigma^2(P_L) \subset G_L.$$

Le groupe $C_L$ est défini sur $k$ et suivant le lemme 6.32 de [PR], on sait que

$\dim_k(C) \geqslant 77$. Nous allons montrer que $C_L$ est un sous-groupe de Levi d'un $L$-sous-groupe parabolique de $G$ inclus dans $P_L$. En effet, soit $Q_L$ un $L$-sous-groupe parabolique de $G$ contenant $C_L$ et contenu dans $P_L$ que l'on suppose minimal pour cette propriété. Alors $C = Q_L \cap \sigma(Q_L) \cap \sigma^2(Q_L)$. Par minimalité de $Q_L$, on a $Q_L = R_u(Q_L).(Q_L \cap \sigma(Q_L))$, donc $Q_L$ et $\sigma(Q_L)$ son opposés ([BoT], prop. 4. 10); le groupe $M_L := Q_L \cap \sigma(Q_L)$ est donc un sous-groupe de Levi de $Q_L$ contenant $C_L$. De plus, $C_L = M_L \cap \sigma^2(Q_L)$ est un $L$-parabolique de $M_L$. Si $C_L \neq M_L$, alors le radical unipotent $R_u(C)_L$ est un groupe déployé non trivial, donc $R_u(C)$ est aussi déployé, ce qui contredit l'anisotropie de $G$. Il résulte que $C_L$ est un sous-groupe de Levi de $Q_L$. Le groupe $C$ est donc réductif, et son diagramme de Dynkin absolu est un sous-diagramme de $E_7$. Un examen facile des cas possibles sous les hypothèses $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $dim_k(C) \geqslant 77$ entraîne alors que $C$ est de type $E_6$. Le groupe $H := Z_G(C).C$ est semi-simple de type $E_6 \times A_2$. Soit $T/k$ un $k$-tore maximal de $H$. Alors le systèmes de racines $\Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$ de type $E_8$ admet le sous-système $\Phi(H_{k_s}, T_{k_s})$ de type $E_6 \times A_2$. Comme tous les sous-systèmes $E_6 \times A_2$ du système de racines $E_8$ sont conjugués par le groupe de Weyl, il résulte que le groupe $H_{k_s}$ est conjugué (par un élement de $G(k_s)$) au sous-groupe standard $H_{0,k_s}$ de type $E_6 \times A_2$. D'après le lemme 1 de [Se1, §III.12], ceci entraîne

$$[z] \in \mathrm{Im}\big(H^1(k, N_{E_8}(H_0)) \to H^1(k, E_8)\big).$$

On a une injection $N_{E_8}(H_0)/H_0 \to \mathrm{Aut}(H_0)/H_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc le groupe $N_{E_8}(H_0)/H_0$ est 2-primaire et l'hypothèse $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ entraîne $H^1(k, N_{E_8}(H_0)/H_0) = 1$. Il résulte que $[z] \in \mathrm{Im}\big(H^1(k, H_0) \to H^1(k, E_8)\big)$. □

*Démonstration du théorème 11.* Le cas $p = 2$ a déjà été fait dans la section III.1.

$p = 3$. On veut montrer que $H^1(L/k, E_8) = 1$. Le cas $p = 2$ nous permet de supposer que $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Soit $[z] \in H^1(L/k, E_8)$ et $G$ le groupe tordu par $z$. Si $G$ est isotrope, on sait que $G$ est déployé et donc $[z] = 1$. Supposons donc $G$ anisotrope. Le lemme 20 ci-dessus indique que toute classe de $H^1(L/k, E_8)_{an}$ provient du sous-groupe maximal déployé $H_0$ de type $E_6 \times A_2$ et la remarque 4 du § III.2 conclut que $H^1(L/k, E_8) = 1$.

$p = 5$. Les cas $p = 2$ et $p = 3$ nous permettent de supposer que $k$ ne possède pas d'extension propre de degré $2^\alpha 3^\beta$. Soit $L/k$ une extension cyclique de degré 5. Soit $[z] \in H^1(L/k, E_8)$ et $G$ le groupe tordu par $z$. On suppose $G$ anisotrope et on veut montrer que $G$ possède un $k$-tore maximal déployé par $L/k$, ce qui est suffisant pour voir que $[z] = 1$ d'après les théorèmes 1 et 7. Suivant un théorème de Chernousov ([Ch1], cf. [T5] th. 3) on sait que $G$ admet un sous-groupe semi-simple $H$ de type $A_4$ déployé par $L/k$. Le groupe $H$ est isogène à $SL(D)$ pour une algèbre simple centrale cyclique $D$ d'indice 5 déployée par $L/k$. Il existe donc un tore $S/k$ de rang 4 de $H$ déployé par $L/k$. Le groupe $DZ_G(S)$ est un groupe semi-simple simplement connexe anisotrope de rang $\leqslant 4$, qui est déployé par $L/k$. Si $DZ_G(S) = 1$, alors

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

$Z_G(S)$ est un $k$-tore maximal de $G$ déployé par $L/k$. Si $DZ_G(S) \neq 1$, le type $A_4$ est la seule possibilité pour $DZ_G(S)$; le même raisonnement que précédemment fournit un tore $S'/k$ de rang 4 déployé par $L/k$ et le tore composé $T = S.S'$ est un $k$-tore maximal de $G$ déployé par $L/k$. □

Ce résultat met en évidence l'absence de ''théorème d'annulation'' pour le type $E_8$ (cf. th. 5, § III.2) qui ramènerait le problème à une question d'extensions cycliques.

## V. Principe de Hasse

(a) Soit $k$ un corps global et $G/k$ un groupe semi-simple. Kunyavskiĭ et Skorobogatov [KS] ont montré que si l'approximation faible vaut pour les $k$-tores maximaux de $G$ *sans effet* (i.e. dont l'extension déployante a le même groupe de Galois que le tore générique de $G$), alors l'approximation faible vaut pour $G$. Cela s'applique aux groupes presque simples pour lesquels Klyachko [Kl] a démontré que l'approximation faible vaut pour les $k$-tores maximaux de $G$ *non affectes*. Nous nous proposons de montrer ici comment l'etude de l'arithmétique des tores maximaux d'un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé $G$ permet d'établir le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous $G$.

THÉORÈME 12. *Soit $k$ un corps de nombres et $(k_v)_{v\in\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de $G$. Soit $G/k$ un groupe semi-simple quasi-déployé simplement connexe et absolument presque simple. Alors l'application $H^1(k, G) \longrightarrow \prod_{v\in\infty} H^1(k_v, G)$ est bijective.*

Rappelons que le principe de Hasse est connu pour tout groupe simplement connexe d'après Kneser [Kn], Harder [H1] et Chernousov [Ch1]. La preuve du théorème 12 repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 4. *Soit $G/k$ comme dans le théorème 12 et $v$ une place de $k$.*

(a) *Pour tout $k_v$-tore maximal $T$ de $G_{k_v}$, le groupe fini $H^1(k_v, T)/R$ est 2-primaire.*
(b) *Il existe une extension abélienne 2-primaire $L/k$ et un $L$-tore maximal $T/L$ de $G_L$ tel que $H^1(L, T)/R$ est 2-primaire.*

Le (b) utilise un argument de Harder [H1], à savoir l'approximation faible sur la variété des tores maximaux de $G$. Sur un corps local non archimédien, on peut exprimer simplement le défaut $H^1(k, T)/R$.

LEMME 21. *Soient $k$ un corps local non archimédien et $T/k$ un tore d'extension déployante $k_T$ de groupe de Galois $\Gamma(T) = \mathrm{Gal}(k_T/k)$.*

(a) $H^1(k, T)/R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\big(\bigoplus_{\sigma\in\Gamma(T)} H^{-1}(\langle\sigma\rangle, \hat{T}^0) \longrightarrow H^{-1}(\Gamma(T), \hat{T}^0)\big)$.

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(b) *On suppose qu'il existe* $\sigma \in \Gamma(T)$ *satisfaisant* $(\hat{T}^0)^{\Gamma(T)} = (\hat{T}^0)^{\langle\sigma\rangle}$. *Alors* $H^1(k, T)/R = 0$.

*Démonstration.* (a) On considère une résolution flasque $1 \to T \to S \to E \to 1$, avec $S$ flasque et $E$ quasi-trivial. Suivant le § I.3, on a $H^1(k, T)/R \approx H^1(k, S)$ et d'après Tate, on a un isomorphisme de groupes finis $H^1(k, S) \approx H^1(k, \hat{S})^D$, où $D$ désigne le dual de Pontryagin. On note $\Gamma = \Gamma(T)$. On voit facilement que la suite exacte de $\Gamma$-modules $0 \to \hat{E} \to \hat{S} \to \hat{T} \to 0$ induit un isomorphisme

$$H^1(k, \hat{S}) = H^1(\Gamma, \hat{S}) \xrightarrow{\sim} X^1_\omega(\Gamma, \hat{T}),$$

où $X^1_\omega(\Gamma, \hat{T}) = \mathrm{Ker}[H^1(\Gamma, \hat{T}) \to \bigoplus_{\sigma\in\Gamma} H^1(\langle\sigma\rangle, \hat{T})]$. Par dualité (cf. [CH], ch. XII, §6), on a

$$H^1(\Gamma, \hat{S})^D \approx \mathrm{Coker}\Big(\bigoplus_{\sigma\in\Gamma} H^{-1}(\langle\sigma\rangle, \hat{T}^0) \longrightarrow H^{-1}(\Gamma, \hat{T}^0)\Big).$$

(b) Par définition, on a

$$H^{-1}(\Gamma, \hat{T}^0) = \mathrm{Ker}\Big(\hat{T}^0 \xrightarrow{Cor_1^\Gamma} (\hat{T}^0)^\Gamma\Big)\Big/ I_\Gamma \hat{T}^0.$$

On suppose qu'il existe $\sigma \in \Gamma$ satisfaisant $(\hat{T}^0)^\Gamma = (\hat{T}^0)^{\langle\sigma\rangle}$. Alors, comme $\hat{T}^0$ est sans torsion, on a $\mathrm{Ker}\Big(\hat{T}^0 \xrightarrow{Cor_1^{\langle\sigma\rangle}} (\hat{T}^0)^{\langle\sigma\rangle}\Big) = \mathrm{Ker}\Big(\hat{T}^0 \xrightarrow{Cor_1^\Gamma} (\hat{T}^0)^\Gamma\Big)$ et ainsi $H^1(k, T)/R = 0$ suivant le (a).

*Démonstration de la proposition 4.* (a) Tout d'abord, observons que par un argument de transfert, on peut supposer que $\mathcal{G}$ est un $p$-groupe pour $p \in S(G) \setminus \{2\}$. Le théorème de Steinberg permet ensuite de supposer que $G$ est déployé ou de type ${}^3D_4$. Pour les groupes classiques et de type $G_2$, l'assertion résulte alors immédiatement du lemme 2 du §I.2. Le lemme 18 permet de traiter uniquement les cas d'un tore d'un groupe quasi-déployé de type ${}^3D_4$, $F_4$ et $E_8$. Pour ces trois cas, le critère (b) du lemme précédent permet de conclure que $H^1(k_v, T)/R$ est 2-primaire.

(b) On note $\Gamma$ le groupe de Galois de l'extension déployant le tore générique de $G$ et $\Gamma^{(p)}$ un $p$-groupe de Sylow de $\Gamma$ de $G$ pour tout premier $p \in S(G) \setminus \{2\}$. On fixe un tel $p$ et une place $v$ de $k$ au dessus de $p$. D'après Demuskin [D], si $[k_v : \mathbb{Q}_p]$ est assez grand, on sait que $k_v$ possède une extension galoisienne de groupe $\Gamma^{(p)}$. Par approximation faible, il existe donc une extension $L/k$ abélienne 2-primaire, des places $w_p$ de $L$ et des extensions galoisiennes $L'_{w_p}/L_{w_p}$ de groupe de Galois $\Gamma^{(p)}$ ($p \in S(G)$). Comme le groupe $G_{L_{w_p}}$ est quasi-déployé, le lemme 4 montre l'existence d'un $L_{w_p}$-tore $T_p$ de $G_{L_{w_p}}$ dont le groupe de Galois associé est isomorphe à $\Gamma^{(p)}$. Or, suivant un théorème de Chevalley [C1] (cf. [SGA3, exp. XIV]), la variété des tores de $G_L$ est rationnelle, donc satisfait à l'approximation faible. Ainsi, il existe un $L$-tore $T$ de $G_L$ tel que $T_{L_{w_p}} \approx T_p$. En particulier, le groupe de Galois associé à $T/L$ est

$\Gamma$. On choisit une résolution flasque $1 \to T \to S \to E \to 1$ de $T$. D'après le $a$), on a $\mathrm{III}^1(k, S)\{l\} = H^1(k, S)\{l\}$ pour tout premier $l \neq 2$. Or d'après Tate (cf. [PR] §6.3), le groupe fini $S(G)$-primaire $X^1(k, S)$ est isomorphe au dual de Pontryagin du noyau du morphisme

$$H^2(\Gamma, \hat{S}) \to \prod_w H^2(\Gamma_w, \hat{S}),$$

où $\Gamma_w$ désigne le groupe de décomposition en $w$ de l'extension $L_T/L$ associé à $T$. On conclut en observant que ce groupe est 2-primaire par construction, puisque les groupes de Sylow de $\Gamma$ sont représentés par des groupes de décomposition. □

*Démonstration du théorème 12.* Soit $G/k$ un groupe quasi-déployé comme dans l'énoncé. Tout d'abord, rappelons que la surjectivité de $H^1(k, G) \to \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, G)$ résulte d'une démonstration uniforme de Kneser–Harder (cf. [H1] lemme 1.12). De plus, Chernousov a récemment donné une preuve uniforme de l'injectivité de l'application $H^1(k(\sqrt{-1})/k, G) \to \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, G)$ [Ch3]. Par suite, on peut supposer que $k$ est un corps imaginaire pur et il nous faut montrer $H^1(k, G) = 1$.

*1er cas: les groupes déployés ou quasi-déployés de type* ${}^3D_4$. On procède par induction sur les types en étendant l'assertion $H^1(k, G) = 1$ à toutes les extensions finies de $k$. Soit $\gamma = [z] \in H^1(k, G)$. Soit $T$ un $k$-tore maximal de ${}_zG$. Le théorème de Steinberg donne un plongement $\rho : T \hookrightarrow G$ tel que $\gamma = \rho^*(\beta) \in \mathrm{Im}\big(H^1(k, T) \quad H^1(k, G)\big)$. Le groupe $H^1(k, T)/R$ est un 2-groupe d'après la proposition 4 et la théorie du corps de classes assure l'existence d'une extension abélienne 2-primaire $k'/k$ telle que la restriction $H^1(k, T)/R \to H^1(k', T)/R$ est nulle. La proposition 2.b du §II.2 et le lemme 8 du §I.4 indiquent que $\gamma' = \gamma_{k'} = 1 \in H^1(k', G)$. Mais le corollaire 2 ($a$ et $b$, §III.1) implique $H^1(k'/k, G) = 1$, donc $\gamma = 1$.

*2nd cas: le cas général.* Avec la même induction sur les types, on remarque qu'il existe une extension quadratique $L/k$ telle que $G/L$ soit déployé ou quasi-déployé de type ${}^3D_4$. Le corollaire 2 montre immédiatement le théorème. □

(b) *Corps dont l'extension abélienne maximale est de dimension cohomologique 1.* Le corps $k = \mathbb{C}((t))(u)$ ressemble aux corps $p$-adiques du point de vue de la cohomologie galoisienne car le corps $k' = \mathbb{C}((t^{-\infty}))(u)$ satisfait $cd\big(k'\big) \leqslant 1$ et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'/k)$ est pro-cyclique. En particulier, sur un tel corps, toutes les algèbres simples centrales sont cycliques.

THÉORÈME 13. *Soit $k$ un corps parfait. On suppose qu'il existe une extension galoisienne $k'/k$ de groupe de Galois (pro)-cyclique satisfaisant $cd\big(k'\big) \leqslant 1$.*

https://doi.org/10.1023/A:1002473132282 Published online by Cambridge University Press

(a) *Alors pour tout groupe semi-simple simplement connexe $G/k$ sans facteurs de type $E_8$, on a $H^1(k, G) = 1$*
(b) *Si $car(k) = 0$, alors $H^1(k, E_8) = 1$.*

En particulier, pour le corps $\mathbb{C}((t))(u)$, la conjecture II vaut; cela répond à une question de Yves Laszlo.

*Démonstration.* Remarquons que la condition sur $k$ entraîne $cd(k) \leqslant 2$. Pour les groupes classiques, de type $G_2$ et $F_4$, cela est un cas particulier de [BP]. On peut évidemment supposer que $G/k$ est absolument presque $k$-simple de type $X$. Les cas de $X = E_6, E_7$ sont réglés par les théorèmes 9 et 10 du IV.3. On discute les cas de $D_4$ trialitaires et $E_8$.

*Cas $D_4$.* Si $car(k) \neq 2$, le théorème 8 s'applique. Si $car(k) = 2$, l'algèbre d'Allen de $G$ est déployée, et le théorème 4 montre que $H^1(k, G) = 1$.

*Cas $E_8$.* L'hypothèse $cd(k') \leqslant 1$ jointe au théorème de Steinberg implique que toute $k$-forme de $E_8$ est déployée par une extension cyclique de degré $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$. Le théorème 11 implique $H^1(k, G) = 1$. □

## Remerciements

Cet article a été écrit lors d'un séjour à l'Université de Cambridge pendant le semestre "Arithmétique et Géométrie" organisé à l'institut Newton. Je tiens à remercier l'ensemble du département de Mathématiques pour son accueil et plus spécialement Ján Nekovář.

Les remarques de Volodia Chernousov et de Jean-Louis Colliot-Thélène m'ont permis d'éclaircir quelques points obscurs d'une version préliminaire de cet article. Je les remercie chaleureusement tous les deux.

## Bibliographie

[A] Adams, J. F.: *Lectures on Exceptional Lie Groups*, Chicago Lectures in Mathematics, 1996.

[B] Bayer, E. and Parimal, R.: Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension $\leqslant 2$, *Invent Math.* **122** (1995), 195–229.

[BK] Bloch, S. and Kato, K.: p-adic étale cohomology, *Pub. Math. IHES* **66** (1986), 107–152.

[BoS] Borel, A. and Springer, T. A.: Rationality properties of linear algebraic groups II, *Tôhoku Math. J.* **20** (19??), 443–497.

[BoT] Borel, A. and Tits, J.: Groupes réductifs, *Pub. Math. IHES* **27** (1965), 55–152.

[BLR] Bosch, S., Lütkebohmert, W. and Raynaud, M.: *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **21** Springer, Berlin, 1990.

[Bou] Bourbaki, N.: *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. IV, V and VI, Masson, 1981.

[BrT1] Bruhat, F. and Tits, J.: Groupes réductifs sur un corps local II, *Publ. Math. IHES* **60** (1984).

[BrT2] Bruhat, F. and Tits, J.: Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671–698.

[CH] Cartan, H. and Eilenberg, S.: *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[C1[ Chevalley, C.: On algebraic group varieties, *J. Math. Soc. Japan* **6** (1954), 303–324.

[C2] Chevalley, C.: Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. J.* **7** (1955), 14–66.

[Ch1] Chernousov, V. I.: The Hasse principle for groups of type $E_8$, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **306** (1989), 1059–1063 (in Russian), and *Math. USSR-Izv.* **34** (1990), 409–423 (in English).

[Ch2] Chernousov, V.: Remark on the Serre mod-5 invariant for groups of type $E_8$. *Math. Zametki* **56**, No. 1 (1994), 116–121; English translation: *Math. Notes* **56**, (1) (1994), 730–733.

[Ch3] Chernousov, V.: An alternative proof of Scheiderer's theorem on Hasse principle for principal homogeneous spaces, *Documenta Math.* **3** (1998), 135–148.

[Ch4] Chernousov, V., Letter, 5 December 1998.

[ChM] Chernousov, V. and Merkurjev, A. S.: *R*-equivalence and special unitary groups, *J. Algebra* **209** (1998), 175–198.

[CTS1] Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: La *R*-équivalence sur les tores, *Ann. Sci. ENS* **10** (1977), 175–230.

[CTS2] Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications, *J. Algebra.* **106** (1987), 148–205.

[EKLV] Esnault, H., Kahn, B., Levine, M. and Viehweg, E.: The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles, *J. Amer. Math. Soc.* **11**, (1) (1998), 73–118.

[ELTW] Elman, R., Lam, T. Y., Tignol, J.-P. and Wadsworth, A.: Witt ring and Brauer groups under multiquadratic extensions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 1119-1170.

[Ga1] Garibaldi, S., Trialitarian groups and Hasse principle, *Manuscripta Math.* **98** (1999), 97–114.

[Ga2] Garibaldi, S.: Isotropic trialitarian algebraic groups, *J. Algebra* **210** (1998), 385–418.

[Gi1] Gille, P.: La *R*-équivalence sur les groupes réductifs définis sur un corps global, *Publ. Math. IHES* **86** (1998), 199–235.

[Gi2] Gille, P.: Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive, *K-Theory* **21** (1) (2000), 57–100.

[GD] Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: Eléménts de géométrie algébrique IV, *Publ. Math. IHES* **20** (1964), **24** (1965), **32** (1967).

[H1] Harder, G.: Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen I, *Math. Zeit.* **90** (1965), 404–428; II *Math. Zeit.* **92** (1966), 396–415; III *J. Reine Angew. Math.* **274/5** (1975), 125–138.

[H2] Harder, G.: Halbeinfach Gruppenschemata über Dedekindringen, *Invent. Math.* **4** (1967), 165–191.

[H3] Harder, G.: Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven, *Invent. Math.* **6** (1968), 107–149.

[I] Izhboldin, O.: On the cohomology groups of the field of rational functions, *Coll. Math. St.-Petersburg, Ser. 2*, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* (2) 1974, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1996, pp. 21–44.

[K] Kato, K.: Galois cohomology of complete discrete valuation fields, dans *Lecture Notes in Math.* **967** Springer, New York, 1982, pp. 215–238.

[K1] Klyackho, A. A.: Tori without affect in semisimple algebraic groups, *Arithmetic and Geometry of Manifolds*, Interuniv. Collect. Sci. Works, Kujbyshev (1989), 67–78.

[Kn] Kneser, M.: Lectures on Galois cohomology of classical groups, *Lectures on Math.* 47, Bombay, 1969.

[Ko] Kottwitz, R.: Rational conjugacy classes in reductive groups, *Duke Math. J.* **49** (1982), 785–807.

[KS] Kunyavskiĭ, B. E. and Skorobogatov, A. N.: Weak approximation in algebraic groups and homogeneous spaces, *Contempo. Math.* **131** (3) (1992), 447–451.

[KLST] Knus, M.-A., Lam, T.-Y., Schapiro, D. B. and Tignol, J.-P.: Discriminants of involutions on biquaternion algebras, dans *Proc. Sympos. Pure Math O*, 58, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 279–304.

[KMRT] Knus, M.-A., Merkurjev, A.-S., Rost, M. and Tignol, J.-P.: The Book of Involutions, *AMS* **44** 1998.

[M1] Merkurjev, A.-S.: Certain $\mathcal{K}$-cohomology groups of Severi–Brauer varieties, *Proc. Sympos. Pure Math O*, 58, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1995, pp. 319–331.

[M2] Merkurjev, A.-S.: Maximal indices of Tits Algebras, *Doc. Math. J. DMV* **1** (1996), 215–228.

[MPW] Merkurjev, A. S., Panin, I. A. and Wadsworth, A.: Index reduction formulas for twisted flag varieties, I, *K-Theory* **10** (6) (1996), 517–596; II, *K-Theory* **12** (2) (1998), 108–196.

[MS] Merkurjev, A.-S. and Suslin, A.-A.: $\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi–Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982), 1011-1046; English translation: *Math. USSR Izv.* **21** (1983), 307–340.

[Me] Mestre, J.-F.: Annulation par changement de variable d'élements de ${}_2Br(k(x))$ ayant quatre pôles, *C.R. Acad. Sci. Paris* **319** (1994).

[Mi] Milne, J. S.: *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.

[PR] Platonov, V.-P. and Rapinchuk, A.-S.: *Algebraic Groups and Number Theory* (English translation), Academic Press, New York, 1994.

[RgRm] Raghunathan, M. S. and Ramanathan, A.: Principal bundles on the affine line, *Proc. Indian Acad. Sci.* **93** (1984), 137–144.

[R1] Rost, M.: A mod 3-invariant for exceptional Jordan algebras, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** (1991), 823–827.

[R2] Rost, M.: Cohomological Invariants, in preparation.

[Sa] Sansuc, J.-J.: Groupe de Brauer et arithmétique des groups algébriques sur un corps de nombres, *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), 13–81.

[Se1] Serre, J.-P.: *Cohomologie galoisienne,* 5ième édn, Lectures Notes in Math. 5, Springer, New York, 1994.

[Se2] Serre, J.-P.: Cohomologie galoisienne: Progrès et problèmes, *Séminaire Bourbaki,* 783 (1993–94); *Astérisque* **227** (1995).

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'IHES., 1963–1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151–153, Springer, New York 1970.

[St] Steinberg, R.: Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. IHES* **25** (1965), 281–312.

[Su1] Suslin, A. A.: Algebraic $K$-theory and the norm-residue homomorphism, *J. Soviet. Math.* **30** (1985), 2556–2611.

[Su2] Suslin, A. A.: $K$-theory and $\mathcal{K}$-cohomology of certain group varieties. *Adv. in Soviet. Math.,* 4, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1991, pp. 53–74.

[T1] Tits, J.: Classification of algebraic semisimple groups, *Proc. Sympos. Pure Math* (1966), 33-62.

[T2] Tits, J.: Normalisateurs de tores I, *J. Algebra* **4** (1966), 96–116.
[T3] Tits, J.: Représentations linéaires irréducibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. Reine Angew Math.* **247** (1971), 196–220.
[T4] Tits, J.: Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, *J. Algebra* **131** (1990), 648–677.
[T5] Tits, J.: *Résumé des cours du Collège de France 1991–92*, Annuaire du Collège de France.
[T6] Tits, J.: Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1131–1138.
[V] Voskresenskiĭ, V. E.: Algebraic groups and their birational invariants, *Trans. Math. Monogr.* 179, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.