NOTE SUR L'ENSEMBLE D'ADHÉRENCE FINE DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ définie par

$$f^n + a_1(z)f^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \tag{1}$$

où cette équation est irréductible dans $|z| < \infty$. R_f est la surface de Riemann définie par $f(z)$ comme surface de recouvrement de $|z| < \infty$. Elle appartient à O_G. L'ensemble d'adhérence fine $\tilde{C}_f(\infty)$ de $f(z)$ en ∞ est défini comme suivant:

$$\tilde{C}_f(\infty) = \bigcap_{v \in V} \overline{f(v')}$$

où $V = \{v;$ voisinage fin de $\infty\}$, v' est l'ensemble le plus grand de R_f dont la projection $\pi(v') = v$.

Dans [6], on a trouvé que 1) $\tilde{C}_f(\infty)$ est total ou bien 2) il contient au plus n éléments et dans ce cas $f(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard, de Nevanlinna et de Borel; de plus si $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas ∞, chaque $a_i(z)$ admet une limite fine finie en ∞. On a supposé que $f(z)$ ne soit pas algébrique.

On considère dans cette note une relation entre la dimension harmonique de R_f et le nombre d'éléments de $\tilde{C}_f(\infty)$ dans le cas où il n'est pas total.

2. Lemmes.

A) D'abord, on considère le cas où R_f admet un seul élément-frontière au sens de Kerékjártó-Stoïlow.

Soit Ω un bout de R_f tel que sa frontière est compacte et analytique, $P_\Omega = \{h;$ harmonique positive dans Ω et nulle continûment sur la frontière de $\Omega\}$. La dimension harmonique $H(\Omega)$ de Ω est le nombre minimum d'éléments de P_Ω qui génèrent P_Ω, qui est finie ou $+\infty$.

Received October 27, 1967.

LEMME 1.

Soit Ω' un bout de R_f comme Ω. Alors $H(\Omega) = H(\Omega')$ ([2]).

On dit que le nombre commun est la dimension harmonique de R_f et on l'écrit par $H(R_f)$, qui est au plus n ([2]).

λ et μ opérateurs (voir [3]).

Soit F une surface de Riemann n'appartenant pas à O_P, D un domaine de F tel que chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, $P_F = \{w;$ harmonique positive sur $F\}$ et $P_D = \{u;$ harmonique positive dans D et nulle continûment sur la frontière de $D\}$. Pour u de P_D, on met $u^* = u$ dans D et $=0$ dans $F - D$ et $Q_D = \{u; u^* \leqq w$ où w est un élément quelconque de $P_F\}$.

On définit

$$\lambda_D(w) = \sup\ u \text{ où } u \in P_D \text{ tel que } u \leqq w,$$

qui est harmonique non-négative dans D;

$$\mu_D(u) = \inf\ s \text{ où } s \geqq u^* \text{ où } s \text{ est surharmonique sur } F,$$

qui est la fonction harmonique majorante la plus petite de u sur F.

LEMME 2.

λ_D et μ_D sont additifs ([4]).

LEMME 3.

Pour u de Q_D, $\mu_D(u)$ est minimale dans P_F si et seulement si u est minmale dans P_D([3]).

LEMME 4.

Soit w minimale dans P_F. Si $\lambda_D(w)$ est positive, elle est minimale dans P_D ([4]).

LEMME 5.

Soient D_1 et D_2 deux domaines sur F comme D. Si $D_1 \cap D_2 = \phi$, alors la fonction harmonique minorante la plus grande de $min\{\mu_{D_1}(u_1), \mu_{D_2}(u_2)\}$ est 0, *quand $u_i \in Q_{D_i}$, $i = 1, 2$* ([3]).

LEMME 6.

Soit E un ensemble fermé, effilé en ∞ tel que $\mathscr{C}E$ est connexe, chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques et π la

https://doi.org/10.1017/S0027763000026763 Published online by Cambridge University Press

projection de R_f *sur le* z*-plan. Si* $H(R_f) = k(\leqq n)$, *le nombre des composants connexes de* $\Omega_0 - \pi^{-1}(E)$ *est au plus* k, *où* Ω_0 *est un bout de* R_f *comme* Ω *tel que* $\pi(\Omega_0) = (|z| > r_0)$ *et* $(|z| = r_0) \cap E = \phi$.*⁾

Démonstration.

Il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $r_n \nearrow \infty$, $(|z| = r_n) \cap E = \phi$ pour tout n et $r_0 < r_1$ ([1]). On prend Ω_n un bout de R_f tel que $\pi(\Omega_n) = (|z| > r_n)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Supposons qu'il existe plus de $k+1$ domaines $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l$ $(l \geqq k+1)$ dans $\Omega_0 - \pi^{-1}(E)$.

Soit $g(\zeta, z)$ la fonction de Green de $(|z| > r_0) - E$, alors

$$\limsup_{z \to \infty} g(\zeta, z) = \varepsilon > 0$$

parce que E est effilé en ∞, par conséquent il existe une suite $\{z_n\}$ telle que $z_n \to \infty$ et $g(\zeta, z_n) \to \varepsilon$ quand n tend vers ∞.

Soit $G(q, p)$ la fonction de Green de ω où $\omega = \omega_1$ ou $\omega_2, \cdots$ ou ω_l. Grâce au principe de Lindelöf, on a

$$g(\zeta, \pi(p)) = \sum_{\substack{\pi(q)=\zeta \\ q \in \omega}} n(q) G(q, p), \quad P \in \omega,$$

parce que $\sum_{\pi(q)=\zeta} n(q) \leqq n$, où $n(q)$ est l'ordre de multiplicité de π en q.

L'inégalité

$$\limsup_{\substack{P \to \beta \\ P \in \omega}} G(q, p) > 0, \tag{2}$$

est vraie où β signifie la frontière idéale de R_f au sens de Kerékjártó-Stoïlow, parce que, pour $P_n \in \omega$ tel que $\pi(P_n) = z_n$,

$$0 < \limsup_{n \to \infty} g(\zeta, \pi(p_n)) \leqq \sum_{\substack{\pi(q)=\zeta \\ q \in \omega}} n(q) \limsup_{n \to \infty} G(q, p_n),$$

de sorte que l'on a l'assertion (2).

Soit $G_0(q, p)$ la fonction de Green de Ω_0. Alors on a

$$G_0(q, p) \geqq G(q, p)$$

pour tout p de ω, en particulier, si on prend $p = p_n$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} G(q, p_n) \text{ existe et est positive}$$

*⁾ Le fait qu'il existe un tel r_0 arbitrairement grand est grâce au [1].

et

$$\lim_{n\to\infty} G_0(q, p_n) \text{ existe}$$

quand n tend vers ∞, on a

$$G_0(q) \equiv \lim_{n\to\infty} G_0(q, p_n) \geqq \lim_{n\to\infty} G(q, p_n) \equiv G(q)\,. \tag{3}$$

D'après um théorème de Harnack, $G_0(q, p_n)$ et $G(q, p_n)$ tendent vers $G_0(q)$ et $G(q)$ uniformément au sens large respectivement, par conséquent, $G_0(q)$ et $G(q)$ sont élément de P_{Ω_0} et de P_ω respectivement et l'inégalité (3) est valable pour tout q de ω. En considérant que $H(R_f) = k$, on peut écrire

$$G_0(q) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot h_i(q)$$

où $h_i(q)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ sont minimales dans P_{Ω_0} et au moins un coefficient de c_i ne réduit pas à 0. D'après le Lemme 2,

$$\lambda_\omega(G_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_\omega(h_i) \geqq G \geqq 0$$

et $G \not\equiv 0$, par conséquent il existe un i_0 tel que $c_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_\omega(h_{i_0}) \not\equiv 0$. D'après le Lemme 4, $\lambda_\omega(h_{i_0}) \equiv U$ est minimale dans P_ω et appartient à Q_ω, et puis grâce au Lemme 3, $\mu_\omega(U)$ est minimale dans P_{Ω_0}, qui est égale à h_{i_0}.

Le fait précédent est applicable pour tout ω_i, en conséquence pour tout i, $\mu_{\omega_i}(U_i)$ est minimale dans P_{Ω_0}. Pour $i \neq j$, il n'y a pas de relation proportionnelle entre $\mu_{\omega_i}(U_i)$ et $\mu_{\omega_j}(U_j)$ d'après le Lemme 5. Cela veut dire qu'il y a l fonctions minimales dans P_{Ω_0}. Ce fait est contraire à l'hypothèse, c'est-à-dire il existe au plus composants connexes dans $\Omega_0 - \pi^{-1}(E)$.

B) Ensuite, on considère le cas où R_f admet $(1 <)\, m\, (\leqq n)$ éléments-frontière au sens de Kerékjártó-Stoïlow.

Il existe un nombre positif M_0 tel que la partie R_f^0 de R_f sur $(|z| > M_0)$ se compose de m domaines connexes:

$$R_f^0 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_0^i,\ \Omega_0^i\text{: domaine connexe tel que } \Omega_0^i \cap \Omega_0^j = \phi \text{ pour } i \neq j.$$

On peut prendre chaque Ω_0^i comme Ω_0 du cas où R_f admet un seul élément-frontière. Soit $H(\Omega_0^i)$ le nombre minimum d'éléments de $P_{\Omega_0^i}$ qui générent $P_{\Omega_0^i}$. Dans ce cas on définit la dimension harmonique $H(R_f)$ de R_f comme suivant:

$$H(R_f) = \sum_{i=1}^{m} H(\Omega_0^i).$$

Pour cette définition, qui est naturelle, on a le Lemme 6 immédiatement en considérant dans chaque Ω_0^i.

3. Théorème.

En appliquant le Lemme 6, on a un précisé du Théorème 2 dans [6].

THÉORÈME.

Si $H(R_f) = k(\leqq n)$, $\tilde{C}_f(\infty)$ contient au plus k éléments quand il n'est pas total.

Démonstration.

On peut supposer que $\tilde{C}_f(\infty)$ ne contient pas ∞ en utilisant une transformation linéaire. Chaque coefficient de (1) admet une limite fine finie en ∞. En utilisant un résultat de L. Naïm ([5]), on trouve qu'il existe un ensemble E fermé, effilé en ∞ tel que $\mathscr{C}E$ est connexe, chaque composant connexe de sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques et dans $\mathscr{C}E$ chaque coefficient tend vers sa limite fine uniformément par rapport à θ en ∞ quand on écrit $z = re^{i\theta}$.

D'après le Lemme 6, on a

$$\Omega_0 - \pi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{k'} \omega_0^i \text{ où } \omega_0^i \text{ sont connexes } (i = 1, 2, \cdots, k')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_t - \pi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{k'} \omega_t^i \text{ où } \omega_t^i \text{ sont connexes } (i = 1, 2, \cdots, k')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où $k' \leqq k$ si r_0 est suffisamment grand.

Numérotant convenablement, on peut prendre pour tout $i = 1, 2, \cdots, k'$ comme suivant:

$$\omega_0^i \supset \omega_1^i \supset \omega_2^i \supset \omega_3^i \supset \cdots \supset \omega_t^i \supset \cdots.$$

L'ensemble

$$\tilde{C}_f(\infty) = \bigcap_{t=0}^{\infty} \overline{f(\mathscr{C}\pi^{-1}(E) \cap \Omega_t)}$$

se compose d'au plus n éléments. Pour chaque i, l'ensemble

$$C_i = \bigcap_{t=0}^{\infty} \overline{f(\omega_t^i)}$$

est un continuum ou un point parce que ω_t^i est connexe. D'autre part, $\tilde{C}_f(\infty) \supset C_i$, par conséquent C_i n'est pas un continuum, c'est-à-dire il se réduit à un point. Par définition de $\tilde{C}_f(\infty)$, $\bigcup_{i=1}^{k'} C_i \supset \tilde{C}_f(\infty)$, de sorte que $\tilde{C}_f(\infty)$ contient au plus k éléments.

Bibliographie

[1] M. Brelot: Éléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U. Paris, 3e édition 1965.
[2] M. Heins: Riemann surfaces of infinite genus, Ann. Math. **55** (1952) 296–317.
[3] M. Heins: On the Lindelöf principle, ibid. **61** (1955) 440–473.
[4] K. Matsumoto: On subsurfaces of some Riemann surfaces, Nagoya Math. J. **15** (1958) 261–274.
[5] L. Naïm: Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier **7** (1957) 5–103.
[6] N. Toda: Sur l'ensemble d'adhérence fine des fonctions algébroïdes, Nagoya Math. J. **30** (1967) 295–302.

Institut de Mathématiques,
Université de Nagoya