Can. J. Math., Vol. XXXI, No. 2, 1979, pp. 264–273

CRITERES DE G-STABILITE EN TERMES DE TRANSVERSALITE

JEAN-JACQUES GERVAIS

1.1. Introduction. Soit G un sous-groupe de Lie, de dimension q, du groupe $GL_p(\mathbf{R})$. Soient $G_i(n) = C^i{}_{0,e}(\mathbf{R}^n, G)$ le groupe des germes en 0 des applications g de classe C^i de $\mathbf{R}^n$ dans G telles que $g(0) = e$ (où e est l'élément neutre de G); $\mathrm{Diff}_i(n)$ le groupe des germes en 0 des difféomorphismes τ d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tels que $\tau(0) = 0$; $C_0{}^i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ l'ensemble des germes en 0 des applications de classe C^i de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$; $\mathscr{E}_n$ l'anneau des germes en 0 des fonctions numériques de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Pour $f \in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, nous désignerons par $j^r(f)$ le jet d'ordre r de f en 0. On munit l'ensemble $\mathscr{G}_i(n) = G_i(n) \times \mathrm{Diff}_i(n)$ de la structure de groupe définie par la multiplication:

$$(g_1, \tau_1) \cdot (g_2, \tau_2) = (g_1 \cdot (g_2 \circ \tau_1{}^{-1}), \tau_1 \circ \tau_2).$$

Il est alors clair que $\mathscr{G}_i(n)$ opère sur $C_0{}^i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ comme suit: pour $(g, \tau) \in \mathscr{G}_i(n)$ et $f \in C_0{}^i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, $(g, \tau).f$ est le germe en 0 de l'application $x \mapsto \tilde{g}(x) \cdot (\tilde{f} \circ \tilde{\tau}^{-1}(x))$ ou $\tilde{g}$, $\tilde{f}$ et $\tilde{\tau}$ sont des représentants, sur un voisinage de 0, de g, f et τ respectivement.

Définition 1.2. Un germe $f \in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ est *G_r-stable* dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ s'il existe un entier s tel que pour tout $f' \in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ vérifiant $j^s(f) = j^s(f')$, il existe $(g, \tau) \in \mathscr{G}_r(n)$ tel que $(g, \tau) \cdot f = f'$.

Pour simplifier, nous omettrons l'indice $r = +\infty$ et écrirons G-stable au lieu de G_∞-stable.

2.1. Critères de G et G_r-stabilité dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Nous supposerons dans la suite de cet article que le groupe G (resp $G^{\mathbf{C}}$ où $G^{\mathbf{C}}$ est le complexifié de G i.e. le groupe de Lie engendré par G dans $GL_p(\mathbf{C})$) a une famille à un paramètre au plus d'orbites dans $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$). Dans ce cas, la G-stabilité et la G_r-stabilité, $\forall r \in \mathbf{N}$, dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, sont des "propriétés générales", i.e. l'ensemble des germes dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ qui ne sont pas G-stables (resp. G_r-stables, $\forall r \in \mathbf{N}$) est, dans un sens que nous ne préciserons pas (cf. [**2**]), de "codimension infinie" dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

Reçu le 8 octobre 1977 et sous forme revisée, le 7 février, 1978. Travail subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada (A 9218).

2.2. Soit $\{A_1, \ldots, A_q\}$ une base sur $\mathbf{R}$ de l'algèbre de Lie T_eG de G. Pour $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, on désigne par M_f l'application $\mathscr{E}_n$-linéaire

$$M_f : \mathscr{E}_n^{\,q} \oplus \mathscr{E}_n^{\,n} \rightarrow \mathscr{E}_n^{\,p}$$

donnée par la matrice dont les colonnes sont $A_1.f, \ldots, A_q.f$, $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Désignons par I_f l'annulateur du conoyau de M_f dans $\mathscr{E}_n$ et par I_f' l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ par les mineurs d'ordre p de la matrice M_f.

On a les critères suivants de G et G_r-stabilité:

THÉORÈME 2.3. (J.-Cl. Tougeron [**2**]). *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(2.3.1) *f est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.*

(2.3.2) *I_f est un idéal de définition (resp. elliptique) de $\mathscr{E}_n$ i.e. I_f contient une puissance de $\mathfrak{m}$ (resp. $I_f \supset \mathfrak{m}^\infty = \bigcap_1^\infty \mathfrak{m}^k$).*

(2.3.3) *I_f' est un idéal de définition (resp. elliptique) de $\mathscr{E}_n$.*

Remarque 2.4. Pour la G-stabilité, il n'est pas nécessaire de supposer que $G^{\mathbf{C}}$ a une famille à un paramètre au plus d'orbites dans $\mathbf{C}^p$. D'autre part, pour la G_r-stabilité, $\forall r \in \mathbf{N}$, on ne sait pas si le résultat est vrai (en fait, l'implication (2.3.1) $\Rightarrow$ (2.3.2)) si G est quelconque.

3.1. Traduction de la G et G_r-stabilité en termes de transversalité. Soit π_k'(resp. $\pi_k'^{\mathbf{C}}$), pour $k = 1, \ldots, p$, le faisceau d'idéaux analytique cohérent sur $\mathbf{R}^p$(resp. $\mathbf{C}^p$) engendré par les mineurs d'ordre $p - k + 1$ de la matrice $(A_1.y, \ldots, A_q.y)$. Posons $\pi_0' = \{0\}$, $\pi_0'^{\mathbf{C}} = \{0\}$, $\pi'_{p+1} = \mathscr{O}$ et $\pi'_{p+1}{}^{\mathbf{C}} = \mathscr{O}^{\mathbf{C}}$ où $\mathscr{O}$ (resp. $\mathscr{O}^{\mathbf{C}}$) désigne le faisceau des germes de fonctions analytiques sur $\mathbf{R}^p$(resp. $\mathbf{C}^p$). Soit π_k(resp. $\pi_k^{\mathbf{C}}$) le faisceau d'idéaux des fonctions analytiques nulles sur $V(\pi_k')$ (resp. $V(\pi_k'^{\mathbf{C}})$) où $V(\mathscr{T}) = \{y | \mathscr{T}_y \neq \mathscr{O}_y$ (resp. $\mathscr{T}_y \neq \mathscr{O}_y^{\mathbf{C}})\}$ lorsque $\mathscr{T}$ est un faisceau d'idéaux analytique sur $\mathbf{R}^p$(resp. $\mathbf{C}^p$).

Pour $k = 0, \ldots, p$, $\Sigma_k = V(\pi_k) - V(\pi_{k+1})$ (resp. $\Sigma_k^{\mathbf{C}} = V(\pi_k^{\mathbf{C}}) - V(\pi_{k+1}^{\mathbf{C}})$) est la réunion des orbites de G (resp. $G^{\mathbf{C}}$) de codimension k dans $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$). Le groupe G (resp. $G^{\mathbf{C}}$) ayant une famille à un paramètre au plus d'orbites, on peut décomposer Σ_k(resp. $\Sigma_k^{\mathbf{C}}$) $(0 \leqq k \leqq p)$ en une réunion disjointe $\Sigma_{k,0} \cup \Sigma_{k,1}$ (resp. $\Sigma_{k,0}^{\mathbf{C}} \cup \Sigma_{k,1}^{\mathbf{C}}$) où $\Sigma_{k,0}$(resp. $\Sigma_{k,0}^{\mathbf{C}}$) est une variété régulière, éventuellement vide, de codimension $k - 1$ dans $\mathbf{R}^p$(resp. $\mathbf{C}^p$) réunion d'orbites de codimension k; et $\Sigma_{k,1}$(resp. $\Sigma_{k,1}^{\mathbf{C}}$) une réunion finie, éventuellement vide, d'orbites de G (resp. $G^{\mathbf{C}}$) de codimension k dans $\mathbf{R}^p$(resp. $\mathbf{C}^p$).

Soient $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ telle que $f(0) = a$ et π un idéal de $\mathscr{O}_a$, $f^*\pi$ (resp. $\hat{f}^*\pi$) sera l'idéal de $\mathscr{E}_n$ (resp. $\mathscr{F}_n$) engendré par les $\phi \circ f$ (resp. les séries de Taylor des $\phi \circ f$) où $\phi \in \pi$. Si I est un idéal de $\mathscr{E}_n$ ou $\mathscr{F}_n$ (resp. $\mathscr{O}_a$), nous désignerons par $J_k(I)$, pour $k = 1, \ldots, n$ (resp. $k = 1, \ldots, p$), l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ ou $\mathscr{F}_n$ (resp. $\mathscr{O}_a$) par I et les jacobiens $D(\phi_1, \ldots, \phi_k) \div D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ (resp. $D(\phi_1, \ldots, \phi_k)/D(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k})$ où $\phi_1, \ldots, \phi_k \in I$,

$1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq n$ (resp. $1 \leqq j_1 < \ldots < j_k \leqq p$) et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. $\{y_1, \ldots, y_p\}$) est le système habituel de coordonnées de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^p$). Si I est un idéal de $\mathscr{E}_n$, $\hat{I}$ (resp. $\hat{I}^{\mathbf{C}}$) sera l'idéal de $\mathscr{F}_n = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ (resp. $\mathscr{F}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$) engendré par les séries de Taylor en 0 (resp. les complexifiés des séries de Taylor en 0) des éléments de I.

Définition 3.2. Soit I un idéal de $\mathscr{F}_n$ (resp. $\mathscr{F}_n^{\mathbf{C}}$). On pose: $\Gamma(I) = \{z \in (\mathbf{R}[[t]])^n | z$ n'a pas de terme constant et $\phi \circ z = 0, \forall \phi \in I\}$ (resp. $\Gamma^{\mathbf{C}}(I) = \{z \in (\mathbf{C}[[t]])^n | z$ n'a pas de terme constant et $\phi \circ z = 0, \forall \phi \in I\}$).

Nous utiliserons le résultat fondamental suivant:

THÉORÈME 3.3. (J.-Cl. Tougeron [**3**, p. 50]; J. Merrien [**1**, p. 182]) *Soit I un idéal de $\mathscr{E}_n$. Alors*

(3.3.1) *I est un idéal de définition de $\mathscr{E}_n$ si et seulement si* $\Gamma^{\mathbf{C}}(\hat{I}^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ *ou* $\emptyset$

(3.3.2) *I est un idéal elliptique de $\mathscr{E}_n$ si et seulement si* $\Gamma(\hat{I}) = \{0\}$ *ou* $\emptyset$.

3.4. Soient $a \in \mathbf{R}^p$ et $y \in \mathbf{R}^p$ (resp. $y \in \mathbf{C}^p$) tels que $y \neq a$. Désignons par $\mu(y)$ (resp $\mu^{\mathbf{C}}(y)$) la distance entre le vecteur $(y - a)/||y - a||$ et le sous-espace engendré par $A_1y, \ldots, A_q.y$, i.e. l'espace tangent $T_y(G.y)$ (resp. $T_y(G^{\mathbf{C}}.y)$). Considérons les hypothèses suivantes:

(H) (resp. ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$)). *Il existe un voisinage V de* 0 *dans* $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$) *tel que* $\mu(y)$ (*resp.* $\mu^{\mathbf{C}}(y)$) *soit minoré par un nombre* > 0 *dans* $V \cap \Sigma_{k,0}$ (resp. $V \cap \Sigma_{k,0}{}^{\mathbf{C}}$), *pour* $k = 0, \ldots, p$.

Soit τ_k (resp. $\tau_k{}^{\mathbf{C}}$) le faisceau d'idéaux des fonctions analytiques nulles sur $\Sigma_{k,1} \cup \Sigma_{k+1} \cup \ldots \cup \Sigma_p$ (resp. $\Sigma_{k,1}{}^{\mathbf{C}} \cup \Sigma_{k+1}{}^{\mathbf{C}} \cup \ldots \cup \Sigma_p{}^{\mathbf{C}}$).

THÉORÈME 3.5. *Soit* $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ *tel que* $f(0) = a$. *Supposons que la condition* ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) *est satisfaite. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(3.5.1) *f est G-stable dans* $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

(3.5.2) *Pour* $k = 0, \ldots, p$,

$$\Gamma^{\mathbf{C}}((J_{k-1}\hat{f}^*\pi_{k,a})^{\mathbf{C}}) - \Gamma^{\mathbf{C}}((\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a})^{\mathbf{C}}) = \{0\} \text{ ou } \emptyset$$

$$\Gamma^{\mathbf{C}}((J_k\hat{f}^*\tau_{k,a})^{\mathbf{C}}) - \Gamma^{\mathbf{C}}((\hat{f}^*J_k\tau_{k,a})^{\mathbf{C}}) = \{0\} \text{ ou } \emptyset.$$

THÉORÈME 3.6. *Soit* $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ *tel que* $f(0) = a$. *Supposons que la condition* (H) *est satisfaite. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(3.6.1) *f est G_r-stable,* $\forall r \in \mathbf{N}$, *dans* $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

(3.6.2) *Pour* $k = 0, \ldots, p$,

$$\Gamma((J_{k-1}\hat{f}^*\pi_{k,a})) - \Gamma((\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a})) = \{0\} \text{ ou } \emptyset$$

$$\Gamma((J_k\hat{f}^*\tau_{k,a})) - \Gamma((\hat{f}^*J_k\tau_{k,a})) = \{0\} \text{ ou } \emptyset.$$

Remarques (3.7.1). Si $a = 0$ et si G est le groupe des homothéties dans $\mathbf{R}^2$, les groupes G et $G^{\mathbf{C}}$ ont une famille à un paramètre d'orbites mais les conditions (H) et ($H^{\mathbf{C}}$) ne sont pas satisfaites. Quel que soit $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, le germe en 0 de l'application $\mathbf{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbf{R}^2$ n'est pas G_r-stable, mais vérifie les conditions (3.5.2) et (3.6.2).

(3.7.2) Si f est analytique, on peut déduire du Théorème 3.5 et du résultat de J.-Cl. Tougeron [**4**, p. 111] sur les solutions C^∞ d'équations analytiques, que f est G-stable si et seulement s'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbf{C}^n$ tel que $f^{\mathbf{C}}|_{W \setminus \{0\}}$ soit transverse sur les variétés $\Sigma_{k,0}{}^{\mathbf{C}}$ et $\Sigma_{k,1}{}^{\mathbf{C}}$ où $f^{\mathbf{C}}$ est le complexifié de f. On a le résultat analogue pour la G_r-stabilité, $\forall r \in \mathbf{N}$. On retrouve ainsi des résultats de J.-Cl. Tougeron [**2**].

(3.7.3) Si le groupe G (resp. $G^{\mathbf{C}}$) a une famille à un paramètre au plus d'orbites dans $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$) et satisfait la condition (H) (resp. ($H^{\mathbf{C}}$)), on déduit du théorème de quasi-transversalité de J.-Cl. Tougeron [**3**, p. 153] et des théorèmes précédents que la G_r-stabilité, pour tout $r \in \mathbf{N}$, (resp. G-stabilité) est une "propriété générale" ([cf. [**2**]). On retrouve ainsi un autre résultat de J.-Cl. Tougeron [**2**].

4. Démonstration de 3.6. Nous ferons la démonstration de 3.6 celle de 3.5 étant analogue.

4.1. *Idéaux σ_k et σ_k'.* Dans ce qui suit, A est un anneau commutatif, unitaire et intègre, et $A_{(0)}$ est son corps des fractions. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à [**3**, chapitre 1].

Définition 4.1.1. Soit $\lambda : A^p \to A^q$ une application A-linéaire (on identifie λ à sa matrice par rapport aux bases canoniques de A^p et A^q). Soit $k \in \mathbf{N}$; si $q - p \leqq k < q$, on désigne par $\sigma_k'(\lambda)$ l'idéal engendré dans A par les mineurs d'ordre $q - k$ de la matrice λ; si $k < q - p$, on pose $\sigma_k'(\lambda) = \{0\}$; si $k \geqq q$, on pose $\sigma_k'(\lambda) = A$.

Définition 4.1.2. Soit M un A-module. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\sigma_k(M)$ l'idéal engendré dans A par $\xi \in A$ tels que $\xi.M$ soit contenu dans un sous-module de M engendré par k éléments et on pose $\sigma_0(M) = \operatorname{ann}(M)$.

PROPOSITION 4.1.3. *Soit $\lambda : A^p \to A^q$ une application A-linéaire. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sigma_k'(\lambda) \subset \sigma_k(\operatorname{coker} \lambda)$ et $\sqrt{\sigma_k'(\lambda)} = \sqrt{\sigma_k(\operatorname{coker} \lambda)}$.*

Définition 4.1.4. Soit M un A-module. Le rang de M est l'entier rang $(M) = \dim_{A(0)} M_{(0)}$ où $M_{(0)} = M \otimes_A A_{(0)}$.

PROPOSITION 4.1.5. *Le rang d'un A-module M est le plus petit entier k tel que $\sigma_k(M) \neq \{0\}$.*

4.2. Avant de démontrer 3.6, nous établirons un résultat préliminaire.

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-028-x Published online by Cambridge University Press

Soit $\hat{f}$ la série de Taylor de f en 0 et soit

$$\alpha + \beta = M_{\hat{f}}: (\mathscr{F}_n)^q \oplus (\mathscr{F}_n)^n \to (\mathscr{F}_n)^p \text{ où } (\nu, \mu) \mapsto \alpha(\nu) + \beta(\mu)$$

où
$$\alpha(\nu) = (A_1.\hat{f}, \dots, A_q.\hat{f})(\nu)$$
$$\beta(\mu) = (\partial\hat{f}/\partial x_1, \dots, \partial\hat{f}/\partial x_n)(\mu).$$

On a, avec les notations de 2.2 et 4.1, $\hat{I}_f' = \widehat{\sigma_0'(M_f)} = \sigma_0'(M_{\hat{f}})$. D'après (3.3.2), I_f' est elliptique si et seulement si $\Gamma(\hat{I}_f') = \{0\}$ ou $\emptyset$ i.e. si et seulement si, pour tout $z \in \bigoplus_n \mathfrak{n}_1$ (où $\mathfrak{n}_1$ est l'idéal maximal de $\mathscr{F}_1 = \mathbf{R}[[t]]$), $z \neq 0$, il existe un mineur d'ordre p de la matrice $M_{\hat{f}\circ z} = (A_1.\hat{f} \circ z, \dots, A_q.\hat{f} \circ z, (\partial\hat{f}/\partial x_1) \circ z, \dots, (\partial\hat{f}/\partial x_n) \circ z)$ non nul dans $\mathscr{F}_1$ i.e. $\sigma_0'(M_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$ ce qui est équivalent, d'après 4.1.3, à $\sigma_0(\text{coker } M_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$.

Ecrivons $M_{\hat{f}\circ z}$ sous la forme

$$M_{\hat{f}\circ z} = \alpha_z + \beta_z : (\mathscr{F}_1)^q \oplus (\mathscr{F}_1)^n \to (\mathscr{F}_1)^p (\xi, \lambda) \mapsto \alpha_z(\xi) + \beta_z(\lambda)$$

où
$$\alpha_z(\xi) = (A_1.\hat{f} \circ z, \dots, A_q.\hat{f} \circ z)(\xi)$$
$$\beta_z(\lambda) = ((\partial\hat{f}/\partial x_1) \circ z, \dots, (\partial\hat{f}/\partial x_n) \circ z)(\lambda).$$

Désignons par $\bar{\beta}$ l'application

$$\bar{\beta}_z : (\mathscr{F}_1)^n \to (\mathscr{F}_1)^p/\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)$$

déduite de β_z; on a coker $\bar{\beta}_z$ = coker $(\alpha_z + \beta_z)$, d'où $\sigma_0(\text{coker } M_{\hat{f}\circ z}) = \sigma_0(\text{coker } \bar{\beta}_z)$. Ainsi, d'après le théorème 2.3, les conditions suivantes sont équivalentes:

(4.2.1) f est G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$, dans $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.
(4.2.2) Pour tout $z \in \bigoplus_n \mathfrak{n}_1$, $z \neq 0$, $\sigma_0(\text{coker } \bar{\beta}_z) \neq \{0\}$.

Par conséquent, pour démontrer le théorème 3.6, il nous suffira de montrer que (3.6.2) $\Rightarrow$ (4.2.2) et (4.2.2) $\Rightarrow$ (3.6.2).

4.3. (4.2.2) $\Rightarrow$ (3.6.2). Soit $z \in \bigoplus_n \mathfrak{n}_1$, $z \neq 0$. Il existe k tel que $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k+1,a})$; il suffit de montrer que

$$z \notin \Gamma(J_{k-1}\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a}) \quad \text{et} \quad z \notin \Gamma(J_k\hat{f}^*\tau_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_k\tau_{k,a}).$$

On a

$$z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a}) \quad \text{ou} \quad z \in \Gamma(\hat{f}^*\tau_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_k\tau_{k,a}).$$

(i) Supposons $z \in \Gamma(\hat{f}^*\tau_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_k\tau_{k,a})$. Ainsi, il existe $\phi_1, \dots, \phi_k \in \tau_{k,a}$ tels que $\hat{\phi}_1 \circ \hat{f} \circ z = \dots = \hat{\phi}_k \circ \hat{f} \circ z = 0$ et il existe un jacobien

$$(4.3.1) \quad \frac{D(\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_k)}{D(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}(f \circ z) \neq 0.$$

Considérons l'application

$$(D_{\hat{\varphi}})_{\hat{f}\circ z} : \mathscr{F}_1{}^p \to \mathscr{F}_1{}^k$$
$$\xi \mapsto (D_{\hat{\varphi}})_{\hat{f}\circ z}(\xi)$$

où $D\hat{\phi}$ est la matrice jacobienne de $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_k)$. D'après le lemme 4.5 que nous démontrerons plus loin, $(D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}(\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)) = \{0\}$. Ainsi l'application

$$\overline{(D\phi)}_{\hat{f}\circ z} : \mathscr{F}_1{}^p/\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q) \to \mathscr{F}_1{}^k$$

est bien définie. Ayant, d'après (4.3.1), $\sigma_0'((D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$ on déduit de 4.1.3 que $\sigma_0(\text{coker } (D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$ et, donc, $\sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$. D'autre part, par hypothèse, $\sigma_0(\text{coker } \bar{\beta}_z) \neq \{0\}$, on déduit donc que

$$\sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z} \circ \bar{\beta}_z) \neq \{0\} \text{ car } \sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z} \circ \bar{\beta}_z) \supset \sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z}).$$

Mais $\overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z} \circ \bar{\beta}_z = (D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z} \circ \beta_z$; ainsi, $\sigma_0(\text{coker } (D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z} \circ \beta_z) \neq \{0\}$ et, donc $\sigma_0'((D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z} \circ \beta_z) \neq \{0\}$ i.e. $z \notin \Gamma(J_k\hat{f}^*\tau_{k,a})$ ce qui est le résultat cherché.

(ii) Si $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a})$, on montre de la même manière que $z \notin \Gamma(J_{k-1}\hat{f}^*\pi_{k,a})$.

4.4. (3.6.2) $\Rightarrow$ (4.2.2.). Soit $z \in \bigoplus_n \mathfrak{n}_1$, $z \neq 0$. Il existe k tel que $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k+1,a})$. Alors $\sigma_k(\text{coker } \alpha_z) \neq \{0\}$ et $\sigma_l(\text{coker } \alpha_z) = 0$ pour $l < k$; ainsi, d'après 4.1.5,

$$\text{(4.4.1)} \quad \text{rang } (\mathscr{F}_1{}^p/\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)) = k$$

(i) Supposons que $z \in \Gamma(\hat{f}^*\tau_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_k\tau_{k,a})$. Par hypothèse

$$z \notin \Gamma(J_k\hat{f}^*\tau_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_k\tau_{k,a});$$

ainsi, il existe $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \tau_{k,a}$ tels que $\hat{\phi}_1 \circ \hat{f} \circ z = \ldots = \hat{\phi}_k \circ \hat{f} \circ z = 0$ et des jacobiens

$$\frac{D(\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_k)}{D(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})}(\hat{f} \circ z) \neq 0$$

$$\frac{D(\hat{\phi}_1 \circ \hat{f}, \ldots, \hat{\phi}_k \circ \hat{f})}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}(z) \neq 0.$$

Par conséquent, $\sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z}) \neq \{0\}$ et $\sigma_0(\text{coker } (D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z} \circ \beta_z) \neq \{0\}$ (où $D\hat{\phi}$ et $\overline{D\hat{\phi}}$ sont comme en 4.3 i); ce qui entraîne que rang (Image de $\bar{\beta}_k$) $\geqq k$. Mais, d'après (4.4.1), rang $(\mathscr{F}_1{}^p/\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q) = k$, d'où rang (Image de $\bar{\beta}_k$) $= k$ et, donc, rang (coker $\bar{\beta}_z$) $= 0$. De 4.1.5, on déduit alors que $\sigma_0(\text{coker } \bar{\beta}_k) \neq \{0\}$.

(ii) Supposons $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a}) - \Gamma(\hat{f}^*J_{k-1}\pi_{k,a})$. Par hypothèse, il existe $\phi_1, \ldots, \phi_{k-1} \in \pi_{k,a}$ tels que $\hat{\phi}_1 \circ \hat{f} \circ z = \ldots = \hat{\phi}_{k-1} \circ \hat{f} \circ z = 0$ et des jacobiens

$$\text{(4.4.2)} \quad \frac{D(\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_{k-1})}{D(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k-1}})}(\hat{f} \circ z) \neq 0$$

$$\text{(4.4.3)} \quad \frac{D(\hat{\phi}_1 \circ \hat{f}, \ldots, \hat{\phi}_{k-1} \circ \hat{f})}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}})}(z) \neq 0.$$

La condition (H) étant vérifiée, rang $(D\hat{f})_z(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^p + \alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)) = p - k + 1$ (où $(D\hat{f})_z(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^p$ est le sous-module de $\mathscr{F}_1{}^p$ engendré par $(D\hat{f})_z(dz/dt)$) car rang $(\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)) = p - k$ et $(D\hat{f})_z(dz/dt)$ n'est pas lié aux éléments $A_1.\hat{f}\circ z, \ldots, A_q.\hat{f}\circ z$ comme nous le montrerons dans le lemme 4.6. Soit

$$\bar{\bar{\beta}}_z : \mathscr{F}_1{}^n/(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^n \rightarrow \frac{\mathscr{F}_1{}^p}{(D\hat{f})_z(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^p + \alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)}$$

l'application déduite de $\bar{\beta}_z$ et soit

$$(D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z} : \mathscr{F}_1{}^p \rightarrow \mathscr{F}_1{}^{k-1}$$
$$\xi \mapsto (D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}(\xi)$$

où $D\hat{\phi}$ est la matrice jacobienne de $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_{k-1})$. Puisque

$$(D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}\circ(D\hat{f})_z = 0$$

car $\hat{\phi}_i\circ\hat{f}\circ z = 0$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ et $(D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}(\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)) = \{0\}$ (d'aprés le lemme 4.5), les applications

$$\overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z} : \mathscr{F}_1{}^p/\alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q) \rightarrow \mathscr{F}_1{}^{k-1} \quad \text{et}$$

$$\overline{\overline{(D\hat{\phi})}}_{\hat{f}\circ z} : \frac{\mathscr{F}_1{}^p}{(D\hat{f})_z(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^p + \alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)} \rightarrow \mathscr{F}_1{}^{k-1}$$

sont bien définies. D'après (4.4.3), $\sigma_0(\text{coker } \overline{(D\hat{\phi})}_{\hat{f}\circ z}\circ\bar{\beta}_z) \neq \{0\}$, d'où $\sigma_0(\text{coker } \overline{\overline{(D\hat{\phi})}}_{\hat{f}\circ z}\circ\bar{\bar{\beta}}_z) \neq \{0\}$. On déduit de là, de (4.4.2) et du fait que $(D\hat{\phi})_{\hat{f}\circ z}[(D\hat{f})_z(dz/dt)\cdot\mathscr{F}_1{}^p + \alpha_z(\mathscr{F}_1{}^q)] = 0$, que rang (Image de $\bar{\bar{\beta}}_z$) $= k - 1$; ce qui entraîne que $\sigma_0(\text{coker } \bar{\beta}_z) \neq \{0\}$.

LEMME 4.5. *Soient* $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a})$ *et* $\phi \in \pi_{k,a}$. *Alors* $(D\phi)_{f\circ z}(A_i.f\circ z) = 0$ *pour* $1 \leqq i \leqq q$.

Démonstration. Soit $g \in G$, considérons les applications

$$\mathscr{F}_1{}^q \xrightarrow{\delta_g} \mathscr{F}_1{}^q \xrightarrow{\theta_g} \mathscr{F}_1{}^p$$

$$\text{où} \quad \delta_g(\xi_1, \ldots, \xi_q) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \quad \text{où} \quad \textstyle\sum_{i=1}^q \xi_i A_i = \sum_{i=1}^q \lambda_i(A_i\cdot g)$$

$$\theta_g(\lambda_1, \ldots, \lambda_g) = ((A_1\cdot g)\cdot\hat{f}\circ z, \ldots, (A_q\cdot g)\cdot\hat{f}\circ z)(\lambda_1, \ldots, \lambda_g)^t$$

L'application δ_g est donnée par la matrice à coefficients réels $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, q$ où $A_i = b_{1i}(A_1\cdot g) + \ldots + b_{qi}(A_q\cdot g)$. Il est clair que dét. B est un nombre réel non nul; donc, δ_g est un isomorphisme de $\mathscr{F}_1{}^q$ sur $\mathscr{F}_1{}^q$. En conséquence, $\sigma_i'(\theta_g) = \{0\}$ si et seulement si $\sigma_i'(M_{\hat{f}\circ z}) = \{0\}$. Puisque $z \in \Gamma(\hat{f}^*\pi_{k,a})$, on en déduit que pour tout $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^q$, $e^{\langle\mu,A\rangle}.\hat{f}\circ z \in \Gamma(\hat{\pi}_{k,a})$ (où $e^{\langle\mu,A\rangle} = \exp(\sum_{i=1}^q \mu_i A_i)$). On a donc $\hat{\phi}(e^{\langle\mu,A\rangle}\cdot\hat{f}\circ z) = 0$. En considérant $\hat{\phi}(e^{\langle\mu,A\rangle}\cdot\hat{f}\circ z)$ comme série formelle

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-028-x Published online by Cambridge University Press

appartenant à $\mathbf{R}[[t, \mu]]$, il vient:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i}(\hat{\phi}(e^{\langle \mu, A \rangle} \cdot \hat{f} \circ z)) = 0, \quad 1 \leqq i \leqq q$$

i.e.

$$(D\hat{\phi})_{e^{\langle \mu, A\rangle} \cdot \hat{f} \circ z}(A_i \cdot e^{\langle \mu, A \rangle} \cdot \hat{f} \circ z) = 0, \quad 1 \leqq i \leqq q.$$

Par conséquent, les termes constants de ces séries formelles considérées comme séries appartenant à $(\mathbf{R}[[t]])[[\mu]]$) sont nuls i.e.

$$(D\hat{\phi})_{\hat{f} \circ z}(A_i \cdot \hat{f} \circ z) = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq q.$$

LEMME 4.6. *Soit* $\hat{y} \in \mathscr{T}_1^p$ *tel que le terme constante de* $\hat{y}$ *soit* a, $\hat{y} \not\equiv a$ *et* $\hat{y} \in \Gamma(\hat{\pi}_{k,a}) - \Gamma(J_{k-1}\hat{\pi}_{k,a})$. *Si la condition* (H) *est satisfaite,* $d\hat{y}/dt$ *n'est pas lié aux éléments* $A_1 \cdot \hat{y}, \ldots, A_q \cdot \hat{y}$.

Démonstration. Supposons que $d\hat{y}/dt$ est lié aux éléments $A_1 \cdot \hat{y}, \ldots, A_q \cdot \hat{y}$. Il existe alors $\xi_1, \ldots, \xi_q$ appartenant au corps des fractions de $\mathscr{F}_1 = \mathbf{R}[[t]]$ tels que $d\hat{y}/dt = \sum_{i=1}^q \xi_i \cdot (A_i \cdot \hat{y})$. On en déduit donc qu'il existe un entier m positif et $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_q \in \mathscr{F}_1$ tels que

(4.6.1.) $\quad t^m d\hat{y}/dt = \sum_{i=1}^q \hat{y}_i \cdot (A_i \cdot \hat{y})$.

D'après un résultat de J.-Cl. Tougeron [**4**] sur les solutions différentiables d'un système d'équations analytiques, il existe $y \in \mathscr{E}_1^p$ tel que la série de Taylor de y en 0 soit $\hat{y}$ et $y(t) \in V(\pi_k) - V(J_{k-1}\pi_k) = \Sigma_{k,0}$ pour $t \in]0,\epsilon[$, pour un certain $\epsilon > 0$. D'autre part, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathscr{E}_1$ tels que la série de Taylor de λ_i en 0 soit $\hat{\lambda}_i$. De (4.6.1), il vient:

$$t^m dy/dt(t) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(t)(A_i \cdot y(t)) + q(t)$$

où $q \in \mathscr{E}_1^p$ est plate en 0. On en déduit

$$(4.6.2) \quad \frac{dy/dt(t)}{||y(t) - a||} = \frac{z(t)}{t^m||y(t) - a||} + \frac{q(t)}{t^m||y(t) - a||}$$

pour $t \in]0,\epsilon[$ où $z(t)$ appartient à l'espace engendré dans $\mathbf{R}^p$ par $A_1 \cdot y(t), \ldots, A_q \cdot y(t)$ i.e. l'espace tangent en $y(t)$ de l'orbite $G \cdot y(t)$. Puisque q est plate et $y - a$ n'est pas plate (car $\hat{y} \not\equiv a$), $q(t)/t^m||y(t) - a|| \to 0$ si $t \to 0$. L'égalité (4.6.2) entraîne alors que l'angle de dy/dt avec l'espace tangent en $y(t)$ de $G \cdot y(t)$ tend vers 0 si $t \to 0$. D'autre part, d'après le lemme 4.7 qui suit, l'angle entre dy/dt et $y(t) - a$ tend vers 0 si $t \to 0$. On aboutit ainsi à une contradiction puisque la condition (H) est satisfaite.

LEMME 4.7. *Soit* $y : [0, \epsilon[\ni t \mapsto y(t) \in \mathbf{R}^p$ *une courbe* C^∞ *non plate en* 0 *telle que* $y(0) = 0$. *Alors l'angle entre* $y(t)$ *et* dy/dt *tend vers* 0 *si* $t \to 0$.

Démonstration. Puisque y n'est pas plate en 0, on peut supposer que

$$y_1(t) = a_1 t^{m_1} + \ldots, \quad a_1 \neq 0$$
$$y_i(t) = a_i t^{m_i} + \ldots, \quad i = 2, \ldots, p$$

avec $m_i \geqq m_1$ pour $i = 2, \ldots, p$. On fait le changement de variable $u \mapsto t^{m_1}$. La courbe est, après ce changement de variable, au moins de classe C^1 et est un plongement. Le résultat est alors immédiat.

5. Exemples. Pour $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ (resp. $\mathscr{F}_n^{\,p}$), $J_k(f)$ sera l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ (resp. $\mathscr{F}_n$) par $f_1, \ldots, f_p$ et les jacobiens $D(f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})/D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$.

5.1. $G = \{e\}$ et $p = 1$. On a $\Sigma_0 = \emptyset$, $\Sigma_1 = \mathbf{R}$, $\Sigma_0^{\mathbf{C}} = \emptyset$ et $\Sigma_1^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$. Posons $\Sigma_{1,0} = \mathbf{R}\backslash\{a\}$, $\Sigma_{1,1} = \{a\}$, $\Sigma_{1,0}^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\backslash\{a\}$ et $\Sigma_{1,1}^{\mathbf{C}} = \{a\}$ où $a \in \mathbf{R}$. Les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont alors satisfaites. Ainsi, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si $\Gamma^{\mathbf{C}}(J_1(\hat{f})^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ ou $\emptyset$(resp. $\Gamma(J_1(\hat{f})) = \{0\}$ ou $\emptyset$).

Désignons par $H(f)$, l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ par les dérivées partielles $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Des théorèmes 2.3 et 3.3, on déduit alors:

PROPOSITION 5.1.1. *Soit $f \in \mathscr{E}_n$. Alors, $J_1(f)$ est un idéal de définition (resp. elliptique) de $\mathscr{E}_n$ si et seulement si $H(f)$ est un idéal de définition (resp. elliptique).*

5.2 $G = Gl_p(\mathbf{R})$. On a $\Sigma_0 = \mathbf{R}^p\backslash\{0\}$, $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_{p-1} = \emptyset$, $\Sigma_p = \{0\}$, $\Sigma_0^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^p\backslash\{0\}$, $\Sigma_1^{\mathbf{C}} = \ldots = \Sigma_{p-1}^{\mathbf{C}} = \emptyset$ et $\Sigma_p^{\mathbf{C}} = \{0\}$. Le nombre d'orbites étant fini, les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont satisfaites quel que soit $a \in \mathbf{R}^p$. Ainsi $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si $\Gamma^{\mathbf{C}}(J_p(\hat{f})^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ ou $\emptyset$ (resp. $\Gamma(J_p(\hat{f})) = \{0\}$ ou $\emptyset$).

De cet exemple et du précédent, on déduit:

PROPOSITION 5.2.1. *Lorsque $p = 1$, toutes les G-stabilités (resp. G_r-stabilités) sont équivalentes.*

5.3. $G = O_p(\mathbf{R})$ *le groupe orthogonal*. On a $\Sigma_0^{\mathbf{C}} = \emptyset$, $\Sigma_1^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^p\backslash\{0\}$, $\Sigma_k^{\mathbf{C}} = \emptyset$, $(2 \leqq k \leqq p - 1)$, $\Sigma_p^{\mathbf{C}} = \{0\}$ et $\Sigma_k = \Sigma_k^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{R}^p (0 \leqq k \leqq p)$. Posons $\Sigma_{1,0}^{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^p - \{0\}$, $\Sigma_{1,1}^{\mathbf{C}} = \emptyset$, $\Sigma_{1,0} = \mathbf{R}^p\backslash\{0\}$ et $\Sigma_{1,1} = \emptyset$. Les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont satisfaites pour $a = 0$. Ainsi, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ tel que $f(0) = 0$ est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si $\Gamma^{\mathbf{C}}(J_p(\hat{f})^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ ou $\emptyset$ (resp. $\Gamma(J_p(f)) = \{0\}$ ou $\emptyset$).

De cet exemple et du précédent, on déduit que les G-stabilités (resp. G_r-stabilités) sont équivalentes pour les groupes $Gl_p(\mathbf{R})$ et $O_p(\mathbf{R})$ pour les $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ tels que $f(0) = 0$.

5.4. $G =$ *groupe des matrices $p \times p$ triangulaires inversibles*. On a $\Sigma_p = \{0\}$,

$$\Sigma_{p-1} = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \mathbf{R}\backslash\{0\},$$

$\Sigma_i = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times (\mathbf{R}\backslash\{0\}) \times \mathbf{R}^{p-i-1} (0 \leqq i \leqq p - 2)$. Les $\Sigma_i^{\mathbf{C}}$ sont définis de façon analogue. Le nombre d'orbites étant fini, les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont satisfaites pour tout $a \in \mathbf{R}^p$. Ainsi,

$$f = (f_1, \ldots, f_p) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$$

est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si $\Gamma^{\mathbf{C}}(J_k(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k)^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ ou $\emptyset$(resp. $\Gamma(J_k(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k)) = \{0\}$ ou $\emptyset$) pour $k = 1, \ldots, p$.

5.5. G = *groupe des matrices $p \times p$ triangulaires dont les termes diagonaux sont égaux à* 1. On a $\Sigma_p = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \mathbf{R}$, $\Sigma_i = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times (\mathbf{R}\backslash\{0\}) \times \mathbf{R}^{p-i}$ pour $1 \leqq i \leqq p-1$, $\Sigma_0 = \emptyset$. Posons $\Sigma_{p,0} = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \mathbf{R}^p - \{0\}$, $\Sigma_{p,1} = \{0\}$, $\Sigma_{i,1} = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, p-1$. On définit les $\Sigma_k{}^{\mathbf{C}}$, $\Sigma_{k,0}{}^{\mathbf{C}}$ et $\Sigma_{k,1}{}^{\mathbf{C}}$ de manière analogue. Les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont satisfaites pour $a = 0$. Ainsi, $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C_0{}^{\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ tel que $f(0) = 0$ est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si $\Gamma^{\mathbf{C}}(J_k(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k)^{\mathbf{C}}) = \{0\}$ ou $\emptyset$ (resp. $\Gamma(J_k(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k)) = \{0\}$ ou $\emptyset$) pour $k = 1, \ldots, p$.

On voit donc que les G et G_r-stabilités pour cet exemple et le précédent sont les mêmes pour les $f \in C_0{}^{\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ tels que $f(0) = 0$.

5.6. $G = Gl_q(\mathbf{R}) \times Gl_p(\mathbf{R})$ opère sur l'espace $\mathbf{R}^{q\times p}$ des matrices $q \times p$ de la manière suivante: si $\lambda \in \mathbf{R}^{q\times p}$ et $(Q, P) \in G$, on pose $(Q, P) \cdot \lambda = Q\lambda P^{-1}$.

Soit $\mathscr{G}_k$ le faisceau d'idéaux analytique cohérent sur $\mathbf{R}^{q\times p}$ engendré par les mineurs d'ordre k de la matrice générique (y_{ij}), pour $0 < k \leqq \min(p, q) = r$. Posons $\mathscr{G}_0 = \mathscr{O}_{qp}$ et $\mathscr{G}_{r+1} = (0)$. $V(\mathscr{G}_{k+1})$ est l'ensemble des matrices de rang $\leqq k$, donc $V(\mathscr{G}_{k+1})$ est la réunion des orbites de G dans $\mathbf{R}^{q\times p}$ de codimension $\geqq (p-k)(q-k)$ (cf. [**3**, chapitre 8]). Ainsi, $\pi_{(p-k)(q-k)} = \mathscr{G}_{k+1}$ et $\pi_l = \tau_l$ pour tout l. Les conditions (H) et ($\mathrm{H}^{\mathbf{C}}$) sont donc satisfaites pour tout $a \in \mathbf{R}^{q\times p}$. Ainsi, $\lambda \in C_0{}^{\infty}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{q\times p})$ tel que $\lambda(0) = a$ est G-stable (resp. G_r-stable, $\forall r \in \mathbf{N}$) si et seulement si, pour $k = 0, \ldots, \min(p, q)$,

$$\Gamma^{\mathbf{C}}((J_{(p-k)(q-k)}\hat{\lambda}^*\mathscr{G}_{k+1,a})^{\mathbf{C}}) - \Gamma^{\mathbf{C}}((\hat{\lambda}^*J_{(p-k)(q-k)}\mathscr{G}_{k+1,a})^{\mathbf{C}}) = \{0\} \text{ ou } \emptyset$$

$$(\text{resp. } \Gamma(J_{(p-k)(q-k)}\hat{\lambda}^*\mathscr{G}_{k+1,a}) - \Gamma(\hat{\lambda}^*J_{(p-k)(q-k)}\mathscr{G}_{k+1,a}) = \{0\} \text{ ou } \emptyset)$$

Bibliographie

1. J. Merrien, *Idéaux de l'anneau des séries formelles à coefficients réels et variétés associées*, J. Math. pures et appl., *50*, (1971), 169–187.

2. J.-Cl. Tougeron, *$\mathscr{G}$-stabilité des germes d'applications différentiables*, Séminaire d'Analyse de Rennes (1971).

3. ——— *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse Band *71*, Springer-Verlag (1972).

4. ——— *Solutions d'un système d'équations analytiques réelles et applications*, Ann. Inst. Fourier, *26*, Fasc. 3, (1976), 109–135.

Université Laval,
Québec, Québec