



## Un modèle semi-stable de la variété de Siegel de genre 3 avec structures de niveau de type $\Gamma_0(p)$

ALAIN GENESTIER

URA 752 du CNRS, Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay, France.  
e-mail: [alain.genestier@math.u-psud.fr](mailto:alain.genestier@math.u-psud.fr)

(Received: 29 January 1999; in final form: 9 June 1999)

**Abstract.** Let  $\mathcal{S}(g, N, p)$  be the Siegel modular variety of principally polarized Abelian varieties of dimension  $g$  with a  $\Gamma_0(p)$ -level structure and a full  $N$ -level structure (where  $p$  is a prime not dividing  $N \geq 3$  and  $\Gamma_0(p)$  is the inverse image of a Borel subgroup of  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{F}_p)$  in  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ ).

This variety has a natural integral model over  $\mathbb{Z}[1/N]$  which is not semi-stable over the prime  $p$  if  $g > 1$ . Using the theory of local models of Rapoport–Zink, we construct a semi-stable integral model of  $\mathcal{S}(g, N, p)$  over  $\mathbb{Z}[1/N]$  for  $g = 2$  and  $g = 3$ .

For  $g = 2$ , our construction differs from de Jong’s one though the resulting model is the same.

**Mathematics Subject Classifications (2000).** 14G35 (primary), 11G18, 14M15 (secondary).

**Key words:** Shimura varieties (Siegel variety), Rapoport–Zink’s local model, Grassmann variety of Lagrangian subspaces, Schubert varieties, semi-stable model.

### 0. Introduction

La variété de Siegel  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_g / (\Gamma_0(p) \cap \Gamma(N))$  (où  $\mathcal{H}_g$  est le demi-espace de Siegel de genre  $g$ ,  $N$  est un entier supérieur ou égal à 3,  $p$  est un entier premier ne divisant pas  $N$  et où les sous groupes  $\Gamma_0(p)$  et  $\Gamma(N)$  du groupe symplectique  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  sont formés respectivement des matrices triangulaires inférieures modulo  $p$  et des matrices congrues à l’identité modulo  $N$ ) admet un modèle entier naturel  $\mathcal{S}(g, N, p)$  sur  $\mathbb{Z}[1/N]$  (cf. [dJ1] et aussi [CN], [DP] ou [R] pour des cas analogues), qui est lisse au-dessus de  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[1/Np]$ .

Lorsque  $g > 1$ , le modèle  $\mathcal{S}(g, N, p)$  n’est pas semi-stable en la place de mauvaise réduction  $p$ . Dans ce travail, nous allons cependant construire pour de petites valeurs de  $g$  ( $g = 2$  ou 3) une ‘résolution semi-stable’  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p)$  de  $\mathcal{S}(g, N, p)$ , c’est à dire un morphisme propre  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p) \rightarrow \mathcal{S}(g, N, p)$  qui sera un isomorphisme au-dessus de  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[1/Np]$  et dont la source sera semi-stable en  $p$ .

Lorsque  $g$  vaut 2, la résolution semi-stable  $\tilde{\mathcal{S}}(2, N, p)$  que nous obtiendrons a déjà été construite par de Jong en utilisant une autre approche, et son résultat est alors légèrement plus précis que le nôtre (cf. [dJ2] et la remarque 2 qui suit notre théorème 4.1). En revanche, outre le résultat déjà obtenu pour  $g \leq 3$ , la méthode que nous utiliserons donne l’espoir de construire une résolution semi-stable de  $\mathcal{S}(g, N, p)$  pour

tout  $g$  ; elle permet aussi d'obtenir un modèle semi-stable de certaines variétés de Shimura unitaires (cf. les remarques qui suivent les théorèmes 2.4.2 et 4.1).

Nous allons maintenant donner une idée de la construction de notre résolution semi-stable.

Le modèle local  $\mathbb{M}_g$  de Rapoport–Zink, qui est localement pour la topologie étale isomorphe à  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$ , est défini en termes d'algèbre linéaire (cf. le paragraphe 1) et est donc plus simple à utiliser que  $\mathcal{S}(g, N, p)$ .

Nous construirons alors (pour  $g \leq 3$ ) une résolution semi-stable  $\tilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathbb{M}_g$  du modèle local  $\mathbb{M}_g$ . Plus précisément, le modèle local s'envoie naturellement vers la grassmannienne  $\mathcal{L}$  des sous-modules lagrangiens du  $\mathbb{Z}_p$ -module symplectique 'standard'  $V_0 = \mathbb{Z}_p^{2g}$  (muni de la forme symplectique (1.2)) et ce morphisme est birationnel (à un petit détail près, cf. (2.3)). Nous construirons en fait (pour tout  $g$ ) une suite d'éclatements  $\tilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{L}_g$ . Le théorème suivant (cf. théorème 2.4.2) fournira alors la résolution semi-stable désirée.

**THÉORÈME.** *Lorsque  $g \leq 3$ , le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\tilde{\mathcal{L}}_g$  est semi-stable et l'application birationnelle  $\tilde{\mathcal{L}}_g \dashrightarrow \mathbb{M}_g$  est en fait un morphisme.*

Le paragraphe 3 sera consacré à la démonstration de ce théorème.

Dans le dernier paragraphe, nous verrons comment la résolution semi-stable  $\tilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathbb{M}_g$ , qui est équivariante sous l'action du schéma en groupes des symétries du modèle local, induit une résolution semi-stable de  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$ .

## 1. Rappels sur le modèle local

1.1. On va d'abord rappeler la définition du schéma de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension  $g$  avec structures de niveau de type  $\Gamma(N) \cap \Gamma_0(p)$ . On en donnera ensuite une formulation équivalente plus commode.

Il résulte de [GIT] qu'il existe un  $\mathbb{Z}[1/N]$ -schéma quasi-projectif  $\mathcal{S}(g, N, p)$  dont l'ensemble des points à valeurs dans tout  $\mathbb{Z}[1/N]$ -schéma noethérien  $S$  est l'ensemble des classes d'isomorphie de quadruplets  $(A, \lambda, \eta, H_\bullet)$ , où

- $A$  est un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$
- $\lambda$  est une polarisation principale de  $A$
- $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g \oplus (\mu_N)^g \rightarrow A[N]$  est un isomorphisme symplectique (on munit  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g \oplus (\mu_N)^g$  de la forme bilinéaire alternée à valeurs dans  $\mu_N$  définie par la dualité de Cartier entre les schémas en groupes finis  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  et  $\mu_N$ , et  $A[N]$  de l'accouplement de Weil défini par  $\lambda$ ).
- $H_\bullet = (H_1 \subset \cdots \subset H_g)$  est un drapeau de sous-schémas en groupes finis localement libres de  $A[p]$  tel que  $H_i$  soit isotrope pour l'accouplement de Weil et d'ordre  $p^i$ .

Dans la suite de cet article, il sera plus commode d'utiliser la variante de présentation suivante (cf. [dJ1], proposition 1.7) : l'ensemble  $\mathcal{S}(g, N, p)(S)$  est aussi celui des classes d'isomorphie de quadruplets  $(A_0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} A_g, \lambda_0, \lambda_g, \eta)$ , où

- $A_i$  est un  $S$ -schéma abélien de dimension relative  $g$
- $\alpha : A_i \rightarrow A_{i+1}$  est une isogénie de degré  $p$
- $\lambda_0$  et  $\lambda_g$  sont respectivement des polarisations principales de  $A_0$  et  $A_g$  et rendent le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} & A_g \\ p\lambda_0 \downarrow & & \lambda_g \downarrow \\ {}^tA_0 & \xleftarrow{{}^t\alpha} \dots \xleftarrow{{}^t\alpha} & {}^tA_g \end{array}$$

commutatif

- $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g \oplus (\mu_N)^g \rightarrow A_0[N]$  est un isomorphisme symplectique (on vérifie l'équivalence de ces deux définitions en prenant  $A_0 = A$  et  $A_i = A/H_i$ ).

1.2. Le sous groupe d'Iwahori de  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q}_p)$  formé des matrices triangulaires inférieures modulo  $p$  est le groupe des points entiers d'un certain  $\mathbb{Z}_p$ -schéma en groupes affine et lisse  $\mathcal{I}$ , de fibre générique  $\mathrm{Sp}(2g)_{\mathbb{Q}_p}$ , dont on rappellera d'abord une construction. On définira ensuite un  $\mathcal{I}$ -torseur  $\mathcal{T}(g, N, p)$  au-dessus de  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$ .

Soient  $V$  le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}_p^{2g}$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$  la base canonique de  $V$ . On munit  $V$  de la forme alternée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie comme suit :  $\langle x, y \rangle = {}^t x J y$  pour tout couple  $x, y$  de vecteurs dans  $\mathbb{Q}_p^{2g}$ , où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}$$

et  $K \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z}_p)$  est la matrice de la permutation  $(g, g - 1, \dots, 1)$  (les matrices  $J$  et  $K$  sont donc antidiagonales).

Soit d'autre part la suite de  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux  $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  définie par  $V_i = \Pi^{-i} \mathbb{Z}_p^{2g}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , où  $\Pi$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ \mathrm{Id}_{2g-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On note  $\alpha : V_i \hookrightarrow V_{i+1}$  l'inclusion évidente et  $\pi : V_i \xrightarrow{\sim} p^{-1} V_i = V_{i+2g}$  l'isomorphisme de périodicité (défini par la multiplication par  $p^{-1}$ ). La forme alternée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit des formes alternées non dégénérées

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{ig} = p^i \langle \cdot, \cdot \rangle : V_{ig} \times V_{ig} \rightarrow \mathbb{Z}_p \quad (i \in \{0, 1\}).$$

Soit  $\mathcal{I}$  le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma en groupes des automorphismes du système

$(V_0 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} V_i \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} V_g, \langle \cdot, \cdot \rangle_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$ . Il résulte de ([dJ1], proposition 3.6) ou de ([RZ], theorem 3.16) que le schéma en groupes  $\mathcal{I}$  est lisse sur  $\mathbb{Z}_p$ ; ce schéma en groupes est aussi celui défini par la chambre  $(V_0 \subset \dots \subset V_i \subset \dots \subset V_g)$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q}_p)$  (voir par exemple [T], 3.4 et 3.7).

Soient  $(A_0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} A_g, \lambda_0, \lambda_g, \eta)$  le quadruplet universel au-dessus de  $\mathcal{S}(g, N, p)$  et  $\pi_i : A_i \rightarrow \mathcal{S}(g, N, p)$  le morphisme structural. Le premier faisceau de cohomologie de de Rham

$$M_i = R^1 \pi_{(g-i)*}(\Omega_{A_{g-i}/\mathcal{S}(g, N, p)})$$

est alors un  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}(g, N, p)}$ -module localement libre de rang  $2g$ ; les morphismes  $\alpha$  et les polarisations  $\lambda_\bullet$  induisent respectivement des morphismes  $\alpha : M_i \rightarrow M_{i+1}$  et des formes symplectiques  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet$  sur  $M_0$  et  $M_g$ . Il résulte de ([dJ1], proposition 3.6) (ou de [RZ], theorem 3.16) que le système  $((M_i)_{0 \leq i \leq g}, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet)$  est, localement pour la topologie étale sur  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$ , isomorphe à l'image réciproque du système  $((V_i)_{0 \leq i \leq g}, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet)$ . Le  $\mathcal{I}$ -torseur  $\mathcal{T}(g, N, p)$  au-dessus de  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$  est alors simplement celui des isomorphismes des deux systèmes:

$$\mathcal{T}(g, N, p) = \mathrm{Isom}(((M_i)_{0 \leq i \leq g}, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet), ((V_i)_{0 \leq i \leq g}, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\bullet)_{\mathcal{S}(g, N, p)}).$$

### 1.3. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{S}(g, N, p)}$ -module localement libre de rang $g$

$$\omega_i = \pi_{(g-i)*}(\Omega^1_{A_{g-i}/\mathcal{S}(g, N, p)})$$

est localement un facteur direct de  $M_i$ . Les sous-modules  $\omega_0$  et  $\omega_g$  sont respectivement isotropes pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ ; on a de plus  $\alpha(\omega_i) \subset \omega_{i+1}$ .

Rapoport et Zink (cf. [R] ou [RZ]) introduisent alors le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\mathbb{M}_g$  défini par

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_g(R) = \{ & (\omega_i \subset V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} R)_{0 \leq i \leq g} \mid \omega_i \text{ est un sous } R\text{-module localement} \\ & \text{facteur direct de rang } g \text{ de } V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} R, \\ & \text{les sous-modules } \omega_0 \text{ et } \omega_g \text{ sont isotropes} \\ & \text{et on a } \alpha \otimes R(\omega_i) \subset \omega_{i+1} \} \end{aligned}$$

pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre commutative  $R$ . La filtration de Hodge  $(\omega_i \subset M_i)_{0 \leq i \leq g}$  associée à l'objet universel

$$(A_0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} A_g, \lambda_0, \lambda_g, \eta, \varphi_\bullet : (V_\bullet)_{\mathcal{T}(g, N, p)} \rightarrow M_\bullet)$$

sur  $\mathcal{T}(g, N, p)$  induit un point  $(\varphi_i^{-1}(\omega_i) \subset (V_i)_{\mathcal{T}(g, N, p)})_{0 \leq i \leq g} \in \mathbb{M}_g(\mathcal{T}(g, N, p))$ , et donc un morphisme  $f : \mathcal{T}(g, N, p) \rightarrow \mathbb{M}_g$ .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}(g, N, p) & \\ \text{pr} \swarrow & & \searrow f \\ \mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p} & & \mathbb{M}_g \end{array}$$

Les  $\mathbb{Z}_p$ -schémas  $\mathbb{M}_g$  et  $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$  sont tous deux de dimension relative  $g(g + 1)/2$ . Par ailleurs, il résulte de la théorie des déformations des variétés abéliennes que le morphisme  $f$  est lisse (cf. [Me], [RZ], 3. 29 ou [dJ1], proposition 4.5). A. J. de Jong en tire alors le corollaire suivant (cf. [dJ1], corollary 4.7).

**PROPOSITION 1.3.1.** *Pour tout point géométrique  $s: \text{Spec } k \rightarrow \mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Z}_p}$ , il existe un point géométrique  $m: \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{M}_g$  et un isomorphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -schémas  $V_s \xrightarrow{\sim} V_m$ , où  $V_s$  (resp.  $V_m$ ) est un voisinage étale de  $s$  (resp.  $m$ ) dans  $\mathcal{S}(g, N, p)$  (resp.  $\mathbb{M}_g$ ). On peut de plus prendre  $m = f(t)$ , où  $t$  est n'importe quel point géométrique de  $\mathcal{T}(g, N, p)$  au-dessus de  $s$ . □*

*Remarque.* Pour une autre démonstration de cet énoncé, voir aussi ([RZ], proposition 3.33).

La proposition suivante implique alors que les schémas  $\mathcal{S}(g, N, p)$  et  $\mathbb{M}_g$  sont localement  $\mathbb{Z}_p$ -isomorphes.

**PROPOSITION 1.3.2.** *Le morphisme  $f$  est surjectif.*

*Démonstration:* Le morphisme  $f$  est lisse et  $\mathcal{I}$ -équivariant, et son image est donc un ouvert  $\mathcal{I}$ -invariant de  $\mathbb{M}_g$ . Cet ouvert contient la fibre générique de  $\mathbb{M}_g$  (qui est formée d'une seule orbite sous  $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ ), et son complémentaire est donc un fermé de la fibre spéciale de  $\mathbb{M}_g$ . Considérons maintenant le point  $m_0 \in \mathbb{M}_g(\mathbb{F}_p)$  défini par

$$\omega_i = [e'_{g+1}, \dots, e'_{2g}], \quad \forall 0 \leq i \leq g$$

(où l'on note  $e'_j = \Pi^{-1}e_j \in V_j$  et  $[e'_{g+1}, \dots, e'_{2g}]$  le sous  $\mathbb{F}_p$  espace vectoriel de  $V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  engendré par  $e'_{g+1}, \dots, e'_{2g}$ ). La proposition (1.3.2) résulte alors du lemme suivant.

**LEMME 1.3.3.**

- (1) *Le point  $m_0$  appartient à l'image du morphisme  $f$ .*
- (2) *Le point  $m_0$  appartient à tout fermé  $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ -invariant de la fibre spéciale de  $\mathbb{M}_g$ .*

*Démonstration du lemme:* (1) (cf. [dJ1, § 5]). Soit  $E$  une courbe elliptique supersingulière sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ , munie de  $\alpha_p \hookrightarrow E$  et prenons  $A_i = (E/\alpha_p)^i \times E^{g-i}$ . On définit les morphismes  $\alpha : A_i \rightarrow A_{i+1}$  de manière évidente et on munit  $A_0$  et  $A_g$  de la polarisation produit. Il est facile de vérifier que ceci définit un point  $s_0$  de  $\mathcal{S}(g, N, p)(\bar{\mathbb{F}}_p)$  et que pour tout  $t_0 \in \mathcal{S}(g, N, p)(\bar{\mathbb{F}}_p)$  au-dessus de  $s_0$ , on a  $f(t_0) = m_0$  (on considère ici  $m_0$  comme un point de  $\mathbb{M}_g(\bar{\mathbb{F}}_p)$ ); le point  $m_0$  est invariant sous l'action de  $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{\mathbb{F}}_p$  de sorte qu'il suffit de choisir un point  $t_0$  au-dessus de  $s_0$ ).

- (2) Soit  $V_i$  le  $\mathbb{F}_p[t]$ -module  $T^{-i} \mathbb{F}_p[t]^{2g}$ , où l'on note

$$T = \begin{pmatrix} 0 & t \\ \text{Id}_{2g-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit des morphismes  $\alpha : \mathbb{V}_i \hookrightarrow \mathbb{V}_{i+1}$ ,  $\pi : \mathbb{V}_i \xrightarrow{\sim} t^{-1}\mathbb{V}_{i+2g}$  et des formes alternées  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ig} : \mathbb{V}_{ig} \times \mathbb{V}_{ig} \rightarrow \mathbb{F}_p[t]$  de manière analogue à ceux de (1.2). On a une identification naturelle  $\mathbb{V}_i/t\mathbb{V}_i \xrightarrow{\sim} V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  compatible aux morphismes  $\alpha$ ,  $\pi$ , et aux formes alternées  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ig}$ . Considérons alors la suite de  $\mathcal{O}_{\mathbb{M}_g}[t]$ -réseaux  $(\Omega_i \subset \mathcal{O}_{\mathbb{M}_g}[t, t^{-1}]^{2g})_{0 \leq i \leq g}$  définie par  $\Omega_i = T^{-g}(\mathbb{V}_i \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{M}_g} \rightarrow V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{M}_g})^{-1}(\omega_i)$ . Ceci définit un plongement de  $\mathbb{M}_g \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  dans la variété de drapeaux affine  $\tilde{\mathcal{B}}$  (cf. [KL, § 5]) de  $\mathrm{Sp}(2g)_{\mathbb{F}_p}$  (la fibre spéciale de  $\mathbb{M}_g$  est alors une généralisation naturelle des sous-schémas  $X_i$  de [KL, 5.2] : en remarquant que  $T^g$  est une racine carrée de  $t \cdot \mathrm{Id}_{2g}$ , la fibre spéciale de  $\mathbb{M}_g$  est alors le schéma  $X_{1/2}$ ). Le groupe  $\mathcal{I} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  est naturellement un quotient de l'ind-groupe algébrique noté  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans [KL] et le plongement  $\mathbb{M}_g \hookrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  que nous venons de décrire est alors  $\tilde{\mathcal{B}}$ -équivariant. Son image est donc une réunion finie de sous-variétés de Schubert généralisées, et la deuxième partie du lemme résulte alors de [KL, 5.2] (la  $\tilde{\mathcal{B}}$ -orbite  $\{m_0\} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ , qui correspond à l'unité du groupe de Weyl affine de  $\mathrm{Sp}(2g)$ , est incluse dans toutes les sous-variétés de Schubert). Ceci termine la démonstration du lemme 1.3.3, et donc aussi celle de la proposition 1.3.2. □

De même que Rapoport et Zink (cf. [R] ou [RZ]), nous appellerons modèle local le schéma  $\mathbb{M}_g$ .

## 2. Une résolution semi-stable du modèle local (pour $g = 2$ ou $3$ )

2.1. On note  $G$  le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma en groupes  $\mathrm{Sp}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ ; on note respectivement  $P$  et  $B$  les paraboliques qui stabilisent le sous-module isotrope  $[e_{g+1}, \dots, e_{2g}]$  et le drapeau isotrope  $[e_{2g}] \subset [e_{2g-1}, e_{2g}] \subset \dots \subset [e_{g+1}, \dots, e_{2g}]$  (lorsque  $S$  est une partie de  $V = \mathbb{Q}_p^{2g}$ ,  $[S]$  désigne le  $\mathbb{Z}_p$ -module engendré par  $S$ ). Le schéma en groupes  $B$  n'est autre que celui des matrices triangulaires inférieures de  $\mathrm{Sp}(2g)_{\mathbb{Z}_p}$  et  $P$  est le parabolique de Siegel évident contenant ce sous-groupe de Borel.

On note  $\mathcal{L}_g$  la grassmannienne des sous-modules lagrangiens de  $V_0$ , définie par

$$\mathcal{L}_g(R) = \{\omega_0 \subset V_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \mid \omega_0 \text{ est un sous-} R\text{-module isotrope} \\ \text{et localement facteur direct de rang } g \text{ de } V_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} R\}$$

pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre commutative  $R$ . C'est un schéma lisse de dimension relative  $g(g+1)/2$  sur  $\mathbb{Z}_p$ . La grassmannienne  $\mathcal{L}_g$  est munie d'une action localement transitive du schéma en groupes  $G$ ; le stabilisateur du point  $\omega_0 = [e_{g+1} \dots e_{2g}]$  n'est autre que  $P$ , de sorte que  $\mathcal{L}_g$  peut aussi être vue comme le quotient  $G/P$ .

2.2. Nous allons maintenant faire quelques rappels (inspirés de [LS] et de [MS]) sur les cellules de Schubert et les sous-variétés de Schubert de la grassmannienne  $\mathcal{L}_g$ .

Soit  $D_\bullet = ((0) = D_{2g} \subset D_{2g-1} \subset \dots \subset D_0 = V_0)$  le drapeau défini par  $D_i = [e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{2g}]$  (de sorte que  $D_\bullet$  est fixe par  $B$  et que  $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}(D_i) = 2g - i$ ). Lorsque  $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$  (où l'on suppose que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$ ) est une partie

à  $g$  éléments de  $\{1, \dots, 2g\}$ , soit  $\mathcal{C}_S$  le sous-schéma localement fermé de  $\mathcal{L}_g$  défini par

$$\mathcal{C}_S(R) = \{(\omega_0 \subset V_0) \in \mathcal{L}_g(R) \mid \text{localement sur } \text{Spec } R \text{ pour la topologie de Zariski, il existe une base } (s_i)_{1 \leq i \leq g} \text{ de } \omega_0 \text{ telle que } s_i \text{ soit une section (locale) de } D_{\lambda_i} \text{ engendrant le module inversible } D_{\lambda_i}/D_{\lambda_{i+1}}\}$$

pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre commutative  $R$  ; on dit que  $\mathcal{C}_S$  est la cellule de Schubert associée à  $S$  (cf. par exemple [LS]). Le schéma  $\mathcal{C}_S$  est non vide si et seulement si  $S$  est une partie *totalelement isotrope* (c'est à dire telle que  $[e_i, i \in S]$  soit totalelement isotrope) de  $\{1, \dots, 2g\}$  ; le schéma  $\mathcal{C}_S$  est alors la  $B$ -orbite du point de  $\mathcal{L}_g$  défini par le sous-module  $[e_i, i \in S]$  de  $V_0$ . On définit la variété de Schubert  $\mathcal{L}_S$  associée à  $S$  comme l'adhérence schématique de la cellule de Schubert  $\mathcal{C}_S$  (cf. par exemple [LS]).

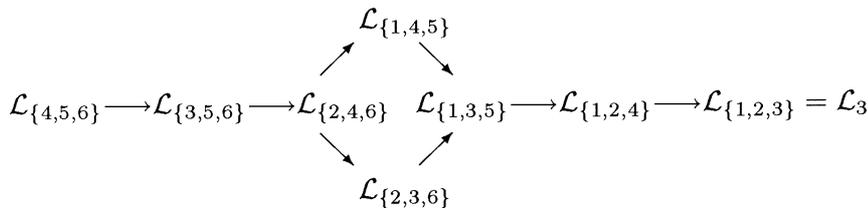
La proposition suivante résume quelques propriétés des cellules et des variétés de Schubert (pour une démonstration, cf. par exemple [LS]).

**PROPOSITION 2.2.1.**

- (1) *Toutes les orbites de  $\mathcal{L}_g$  sous l'action de  $B$  sont en fait de la forme  $\mathcal{C}_S$ , et on a donc une stratification localement fermée  $B$ -équivariante  $\mathcal{L}_g = \coprod_S \mathcal{C}_S$  où  $S$  parcourt l'ensemble  $\mathfrak{Q}$  des parties totalelement isotropes de  $\{1, \dots, 2g\}$ .*
- (2) *La variété de Schubert  $\mathcal{L}_S$  a alors une stratification localement fermée induite de la forme  $\mathcal{L}_S = \coprod_{S'} \mathcal{C}_{S'}$ , où  $S'$  décrit une partie  $\mathfrak{Q}_S$  de  $\mathfrak{Q}$ . En particulier, on a  $\mathcal{L}_{S'} \subset \mathcal{L}_S$  si et seulement si  $S' \in \mathfrak{Q}_S$ .*
- (3) *La partie  $\mathfrak{Q}_S$  est en fait constituée des parties totalelement isotropes  $S' = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_g\} \in \mathfrak{Q}$  (dont on a rangé les éléments  $\lambda'_i$  dans l'ordre croissant) telles que  $\lambda_i \leq \lambda'_i, \forall i$ .*
- (4) *Le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\mathcal{C}_S$  est isomorphe à un espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^{\ell(S)}$ . Cet espace affine est de dimension  $\ell(S) = r(g+1) - \sum_{i=1}^r \lambda_i$ , où l'on note  $r$  le nombre d'éléments de  $S \cap \{1, \dots, g\}$ . □*

*Exemples:* on a pour  $g = 2$  et  $g = 3$  les deux diagrammes suivants

$$\mathcal{L}_{\{3,4\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{2,4\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{1,3\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{1,2\}} = \mathcal{L}_2$$



où les flèches figurent des immersions fermées de codimension 1 (de sorte que la

dimension relative de  $\mathcal{L}_S$  sur  $\mathbb{Z}_p$  n'est autre que la distance de  $\mathcal{L}_S$  au sommet le plus à gauche du graphe). En fait, le premier de ces deux diagrammes n'est autre que le sous-diagramme

$$\mathcal{L}_{\{4,5,6\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{3,5,6\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{2,4,6\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\{2,3,6\}}$$

du second.

2.3. On note  $\text{Gr}_i$  la grassmannienne des sous-modules (localement facteurs directs) de rang  $g$  de  $V_i$ . On considère le morphisme

$$\delta : \mathcal{L}_g \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \longrightarrow \prod_{0 \leq i \leq g} \text{Gr}_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

défini par

$$\delta(\omega_0) = (\omega_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} R = V_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} R)_{0 \leq i \leq g}$$

pour toute  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre commutative  $R$ . L'image de  $\delta$  est un sous-schéma localement fermé de  $\mathbb{M}_g \subset \prod_{0 \leq i \leq g} \text{Gr}_i$  et on notera  $\mathcal{M}_g$  son adhérence de Zariski. L'action naturelle du schéma en groupes  $\mathcal{I}$  sur  $\mathbb{M}_g$  stabilise  $\mathcal{M}_g$  et définit donc une action de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{M}_g$ . La projection sur le facteur  $\text{Gr}_0$  définit un morphisme  $\mathcal{I}$ -équivariant  $\text{pr}_0 : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{L}_g$  (on fait agir  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{L}_g$  via le morphisme  $\mathcal{I} \longrightarrow G$  évident).

*Remarques :* (1) La fibre générique de l'immersion fermée tautologique  $\mathcal{M}_g \hookrightarrow \mathbb{M}_g$  est un isomorphisme. Le schéma  $\mathcal{M}_g$  est donc la 'platification' du schéma  $\mathbb{M}_g$  (i.e. le schéma obtenu à partir de  $\mathbb{M}_g$  en supprimant la  $p$ -torsion; cette opération est un cas (très) particulier de [GR, 5.2]). En fait, Rapoport et Zink conjecturent que le schéma  $\mathbb{M}_g$  est déjà plat (cf. les trois lignes qui précèdent le paragraphe 3.36 de [RZ]).

(2) L'opération de platification de la remarque précédente est locale pour la topologie étale, et  $\mathcal{M}_g$  est donc aussi un modèle local pour le platifié de  $\mathcal{S}(g, N, p)$ .

2.4. Lorsque  $g \geq 2$ , le schéma  $\mathcal{M}_g$  n'est pas semi-stable. En fait, la fibre spéciale de  $\mathcal{M}_g$  n'est pas un diviseur à croisements normaux et lorsque  $g \geq 3$ ,  $\mathcal{M}_g$  n'est même pas localement d'intersection complète.

On aimerait disposer d'une 'résolution semi-stable  $\mathcal{I}$ -équivariante  $\widetilde{\mathcal{M}}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$  de  $\mathcal{M}_g$ ', c'est à dire d'un morphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -schémas  $\widetilde{\mathcal{M}}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$ ,  $\mathcal{I}$ -équivariant et propre, dont la fibre générique est un isomorphisme et dont la source  $\widetilde{\mathcal{M}}_g$  est semi-stable (par quoi l'on entend que, localement pour la topologie étale, celle-ci est  $\mathbb{Z}_p$ -isomorphe à  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \cdots t_r - p)$ ). Pour  $g = 2$  ou  $3$ , nous allons effectivement en construire une.

Remarquons tout d'abord que par composition avec le morphisme  $\mathcal{I}$ -équivariant  $\text{pr}_0 : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{L}_g$  (2.3), la résolution semi-stable  $\mathcal{I}$ -équivariante  $\widetilde{\mathcal{M}}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$  désirée va induire un morphisme propre  $\mathcal{I}$ -équivariant  $\widetilde{\mathcal{M}}_g \longrightarrow \mathcal{L}_g$ , dont la fibre générique

sera un isomorphisme. Ceci suggère de construire  $\widetilde{\mathcal{M}}_g$  à partir de  $\mathcal{L}_g$  à l'aide d'une suite d'éclatements  $\mathcal{I}$  équivariants. Nous allons donc construire, pour tout  $g$ , une suite d'éclatements  $\mathcal{I}$ -équivariants  $\widetilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{L}_g$ . Nous verrons ensuite que pour  $g = 2$  ou  $3$ , le candidat  $\widetilde{\mathcal{L}}_g$  fournit une résolution semi-stable  $\mathcal{I}$ -équivariante  $\widetilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  et mérite donc le nom de  $\widetilde{\mathcal{M}}_g$ .

**CONSTRUCTION 2.4.1.** On note  $\overline{\mathcal{L}}_S = \mathcal{L}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  la fibre spéciale de  $\mathcal{L}_S$ . Lorsque  $0 \leq i \leq g(g+1)/2$ , on note  $\mathfrak{L}_i = \{S \in \mathfrak{L} \mid l(S) = i\}$  l'ensemble des  $S$  tels que la sous-variété de Schubert  $\overline{\mathcal{L}}_S \subset \overline{\mathcal{L}}_g$  soit de dimension relative  $i$  sur  $\mathbb{F}_p$ . La construction de  $\widetilde{\mathcal{M}}_g$  va alors se faire en plusieurs étapes.

*Etape 1.* On éclate  $\mathcal{L}_g$  le long de l'unique sous-variété de Schubert de dimension nulle,  $\overline{\mathcal{L}}_{\{g+1, \dots, 2g\}}$ , de sa fibre spéciale. On obtient ainsi un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_{\leq 0}$

*Etape 2.* On éclate  $\widetilde{\mathcal{L}}_{\leq 0}$  le long du transformé strict de l'unique sous-variété de Schubert de dimension 1,  $\overline{\mathcal{L}}_{\{g, g+2, \dots, 2g\}}$ , de la fibre spéciale de  $\mathcal{L}_g$ . On obtient ainsi un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_{\leq 1}$ .

*Etape  $i$ .* Lorsque  $S \in \mathfrak{L}_{i-1}$ , notons  $(\overline{\mathcal{L}}_S)_{\leq i-2}$  le transformé strict de  $\overline{\mathcal{L}}_S$  par la chaîne d'éclatements  $\widetilde{\mathcal{L}}_{i-2} \rightarrow \dots \rightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_{\leq 0} \rightarrow \mathcal{L}_g$ . On éclate  $\widetilde{\mathcal{L}}_{i-2}$  le long de  $\bigcup_{S \in \mathfrak{L}_{i-1}} (\overline{\mathcal{L}}_S)_{\leq i-2}$ . On obtient ainsi un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_{\leq i-1}$ .

*Etape  $g(g+1)/2$ .* On éclate  $\widetilde{\mathcal{L}}_{\leq g(g+1)/2-2}$  le long du transformé strict (par les éclatements précédents) de l'unique sous-variété de Schubert de dimension  $g(g+1)/2 - 1$ ,  $\overline{\mathcal{L}}_{\{1, \dots, g-1, g+1\}}$ , de la fibre spéciale de  $\mathcal{L}_g$ . On obtient ainsi le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_g = \widetilde{\mathcal{L}}_{\leq g(g+1)/2-1}$ .

Remarquons que les sous-schémas  $\overline{\mathcal{L}}_S$  de  $\mathcal{L}_g$  sont invariants sous l'action de  $\mathcal{I}$  (ils sont invariants sous l'action de  $B_{\mathbb{F}_p} \subset G_{\mathbb{F}_p}$  sur  $\overline{\mathcal{L}}_g$ ). Le schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_g$  qu'on vient de construire est donc muni d'une action naturelle de  $\mathcal{I}$ , pour laquelle le morphisme évident  $\text{pr} : \widetilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{L}_g$  est  $\mathcal{I}$ -équivariant. Ceci termine la construction.

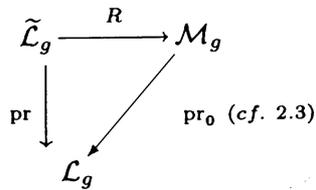
*Remarque.* On démontre que lorsque  $g \leq 3$ , la réunion  $\bigcup_{S \in \mathfrak{L}_{i-1}} (\overline{\mathcal{L}}_S)_{\leq i-2}$  est en fait une union disjointe de variétés lisses sur  $\mathbb{F}_p$ . Les éclatements qui interviennent dans la construction ont alors tous des centres lisses.

Le théorème suivant a déjà été annoncé dans l'introduction.

**THÉORÈME 2.4.2.** *Supposons que l'entier  $g$  soit inférieur ou égal à 3. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées.*

- (1) *Le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $\widetilde{\mathcal{L}}_g$  est semi-stable.*

(2) Il existe un (et un seul) morphisme  $R : \tilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  rendant le diagramme



commutatif. Ce morphisme  $R$  est de plus propre et  $\mathcal{I}$ -équivariant. □

Lorsque  $g \leq 3$ , nous noterons donc encore  $\tilde{\mathcal{M}}_g$  le schéma  $\tilde{\mathcal{L}}_g$ .

*Remarques.* (0) Le cas où  $g = 1$  que nous n'avons pas mentionné jusqu'ici est trivial et la résolution semi-stable obtenue est un isomorphisme.

(1) Il semble naturel de se demander si l'énoncé 2.4.2 reste vrai lorsqu'on supprime la restriction  $g \leq 3$ .

(2) En utilisant le fait que  $\mathcal{L}_2$  n'est autre que la sous-variété de Schubert  $\mathcal{L}_{\{2,3,6\}}$  de  $\mathcal{L}_3$ , on voit qu'une preuve du théorème (2.4.2) dans le cas où  $g = 2$  est en fait 'contenue' dans la preuve que nous donnerons pour  $g = 3$ .

La résolution semi-stable  $\tilde{\mathcal{M}}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2$  a d'autre part déjà été obtenue par de Jong (cf. [dJ2]) par une autre méthode. Plus précisément, de Jong éclate  $\mathcal{M}_2$  le long d'une composante irréductible de sa fibre spéciale (celle notée  $Z_0$  dans [dJ1, Section 5]; on peut aussi choisir  $Z_{11}$ ). On peut vérifier que la résolution semi-stable ainsi obtenue coïncide avec la nôtre.

(3) Soit  $W_0 \xrightarrow{\alpha} W_1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} W_{n-1} \xrightarrow{\alpha} W_n = p^{-1}W_0$  une chaîne de  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux dans  $W = \mathbb{Q}_p^n$ . Pour  $1 \leq r \leq n - 1$ , considérons le schéma

$$\mathbb{M}_{U(r,n-r)} = \{(\omega_i \subset W_i)_i \in \prod_{0 \leq i \leq n-1} \text{Gr}(r, W_i) \mid \alpha(\omega_i) \subset \omega_{i+1}, \forall i\}$$

(où on note  $\text{Gr}(r, W_i)$  la grassmannienne des sous-modules localement facteurs directs de rang  $r$  de  $W_i$ ), qui est lui aussi un modèle local d'une variété de Shimura (pour un groupe de similitudes unitaires, de type  $GU(r, n - r)$  en la place archimédienne, défini par une extension quadratique déployée en  $p$ , et pour des structures de niveau convenables; pour plus de précisions cf. [R, § 3]).

La construction (2.4.1) admet dans ce cadre un analogue évident. L'analogue du théorème (2.4.2) est déjà connu lorsque  $r = 1$  (ou  $r = n - 1$ ) (le morphisme  $R$  est alors un isomorphisme: cf. dans [BC] ou [R] l'exposé de la construction de Deligne pour le schéma formel  $\widehat{\Omega}^n$ ). On peut également vérifier cet analogue dans le cas particulier où  $r = 2$  et  $n = 4$  (la démonstration est semblable à celle qui figure dans le paragraphe suivant).

**3. Démonstration du théorème 2.4.2**

Nous nous contenterons de démontrer ce théorème dans le cas particulier où  $g$  vaut 3, qui est le plus difficile. Nous omettrons alors l'indice 3 de  $\mathcal{L}_3, \mathcal{M}_3, \dots$

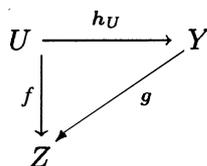
3.1. Soit  $B_-$  le sous-schéma en groupes de  $G$  formé des matrices triangulaires supérieures ( $B_-$  est donc le schéma en groupes de Borel opposé à  $B$ ). Soit  $x_0 = ([e_4, e_5, e_6] \subset V_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_p)$  l'unique point de  $\mathcal{L}_{\{4,5,6\}}$ . La grosse cellule de Schubert opposée  $\mathcal{L}^0$  (cf. [MS]) est la  $B_-$ -orbite  $B_-x_0 \subset \mathcal{L}$ . C'est un sous-schéma ouvert de  $\mathcal{L}$ , qui s'identifie au translaté de la cellule de Schubert ouverte  $\mathcal{C}_{\{1,2,3\}}$  par l'élément le plus long  $J$  (cf. (1.2)) de  $W$  et est en particulier isomorphe à l'espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^6$ . Un isomorphisme 'naturel'  $A_{\mathbb{Z}_p}^6 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^0$  s'obtient de la manière suivante. Considérons les points de  $A_{\mathbb{Z}_p}^6$  comme des matrices symétriques  $A = (a_{ij}^j)_{1 \leq i, j \leq 3}$ . La matrice  $\begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$  (cf. (1.2)) est alors de rang 3, et on vérifie aisément que son image définit un point de  $\mathcal{L}^0$ .

L'ouvert  $\mathcal{L}^0$  contient le point  $x_0$ , qui est adhérent à toutes les cellules de Schubert  $\mathcal{C}_S$ . L'intersection  $\mathcal{C}_S \cap \mathcal{L}^0$  est donc un ouvert non vide de  $\mathcal{C}_S$ ; en particulier  $\mathcal{L}^0$  rencontre toutes les orbites de  $B$ . Le morphisme  $B \times_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{L}^0 \rightarrow \mathcal{L}$  défini par l'action (2.2) de  $B \subset G$  sur  $\mathcal{L}$  est donc surjectif. A fortiori, le morphisme  $\mathcal{I} \subset G$  sur  $\mathcal{L}$  est alors surjectif; nous dirons que l'ouvert  $\mathcal{L}^0$  est  $\mathcal{I}$ -saturant.

Pour vérifier la première partie du théorème (2.4.2) (la semi-stabilité de  $\tilde{\mathcal{M}}$ ), il suffit manifestement de le faire au-dessus d'un ouvert  $\mathcal{I}$ -saturant de  $\mathcal{L}$  (ou de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq i}$ ). Le lemme suivant nous permettra de réduire de même la démonstration de la deuxième partie de ce théorème à celle d'un énoncé concernant la restriction de  $\tilde{\mathcal{M}}$  au-dessus d'un ouvert saturant de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq i}$ .

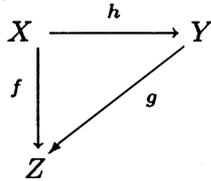
**LEMME 3.1.1.** *Soient  $\Gamma$  un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma en groupes lisse et  $X, Y, Z$  trois  $\mathbb{Z}_p$ -schémas munis d'une action de  $\Gamma$ . Soient  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes  $\Gamma$ -équivariants. Supposons que le schéma  $X$  est réduit, que le morphisme  $g$  est séparé et qu'il existe un ouvert dense de  $Z$ , d'image réciproque dense dans  $X$ , au-dessus duquel  $g$  est une immersion.*

*Soient  $U$  un ouvert  $\Gamma$ -saturant de  $X$  et supposons qu'il existe un morphisme  $h_U : U \rightarrow Y$  rendant le diagramme*



*commutatif (sous les hypothèses précédentes, il existe au plus un tel morphisme).*

Il existe alors un (et un seul) morphisme  $h : X \rightarrow Y$  rendant le diagramme



commutatif. Le morphisme  $h$  est  $\Gamma$ -équivariant, et il est propre lorsque  $f$  est propre.

*Démonstration.* Notons  $v : V = \Gamma \times_{\mathbb{Z}_p} U \rightarrow X$  le morphisme défini par l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  et considérons le morphisme  $h_V : V \rightarrow Y$  défini par  $(\gamma, u) \mapsto \gamma.h_U(u)$ . Le morphisme  $v$  est couvrant pour la topologie f.p.q.c., et pour démontrer qu'il existe un morphisme  $h$  comme ci-dessus, il suffira donc de vérifier que les deux morphismes  $h_{V_2}^i = h_V \circ \text{pr}_i : V_2 = V \times_X V \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) coïncident.

Il résulte de la commutativité du premier diagramme de l'énoncé et de l'équivariance des morphismes  $f$  et  $g$  que  $g \circ h_V = f \circ v$ . On a donc déjà  $g \circ h_{V_2}^1 = g \circ h_{V_2}^2$ . Soit  $Z^0$  un ouvert dense de  $Z$  au-dessus duquel  $g$  est une immersion; lorsque  $T$  est un  $Z$ -schéma, notons  $T^0$  l'ouvert  $T \times_Z Z^0$  de  $T$ . Il résulte alors du fait que  $g^0$  est une immersion que  $(h_{V_2}^1)^0 = (h_{V_2}^2)^0$ .

Le  $X$ -schéma  $V$  s'identifie (via  $(\gamma, u) \mapsto (\gamma, \gamma u)$ ) à un ouvert de  $\Gamma \times_{\mathbb{Z}_p} X$ , et le schéma  $V_2$  s'identifie alors à un ouvert de  $\Gamma \times_{\mathbb{Z}_p} \Gamma \times_{\mathbb{Z}_p} X$ . En particulier,  $V_2$  est réduit et l'ouvert  $V_2^0$  est dense dans  $V_2$ . De l'identité  $(h_{V_2}^1)^0 = (h_{V_2}^2)^0$  précédemment obtenue il résulte alors que  $h_{V_2}^1 = h_{V_2}^2$  (voir par exemple [Ha, II ex. 4.2]).

Le morphisme  $h$  que nous venons d'obtenir est  $\Gamma$ -équivariant par construction; le fait que  $h$  est propre lorsque  $f$  l'est est un corollaire facile du critère valuatif de propreté (on rappelle que  $g$  est séparé). □

3.2. Pour démontrer le théorème (2.4.2), nous utiliserons les deux étapes suivantes.

*Etape 1.* (cf. 3.3) Nous définirons un ouvert  $\mathcal{I}$ -saturant  $U_i$  de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq i}$  et décrirons explicitement le schéma  $U_i$  (plus précisément, nous donnerons en fait des équations pour un  $(\mathbb{G}_m^{i+1})_{\mathbb{Z}_p}$ -torseur  $T_i$  au-dessus de  $U_i$ ). Nous démontrerons ensuite que  $U_i$  (ou, ce qui revient au même,  $T_i$ ) est semi-stable en utilisant le lemme suivant.

**LEMME 3.2.1.** *Soient  $X$  un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma semi-stable et  $Y$  un sous-schéma fermé de la fibre spéciale  $\bar{X}$  de  $X$ . Supposons que  $Y$  soit lisse sur  $\mathbb{F}_p$  et que l'intersection de  $Y$  et du lieu singulier  $\bar{X}^{\text{sing}}$  de  $\bar{X}$  soit un diviseur à croisements normaux (réduit) dans  $Y$ . L'éclaté  $\tilde{X}$  de  $X$  le long de  $Y$  est alors lui aussi semi-stable.*

*Démonstration.* Puisque l'énoncé que l'on veut démontrer est local pour la topologie étale, on peut supposer que  $\bar{X}$  est réunion de  $r$  diviseurs lisses  $D_i$  et travailler sur un voisinage d'un point fermé  $y$  de  $Y \cap D_1 \cap \dots \cap D_r$ . On peut aussi supposer que  $Y$  est inclus dans  $D_r$ . On peut alors choisir des équations locales

$(t_i = 0)$  de  $D_i$  telles que  $\prod_{1 \leq i \leq r} t_i = p$  et des équations locales  $t_{r+1} = \dots = t_{r+m} = 0$  de  $Y$  (où  $m = \text{codim}_{D_1} Y$  et les  $t_{r+i}$  sont des sections locales de  $\mathcal{O}_X$ ).

Le schéma  $Y \cap D_1 \cap \dots \cap D_{r-1}$ , qui est l'intersection dans  $Y$  des  $r - 1$  branches  $Y \cap D_i$  ( $1 \leq i \leq r - 1$ ) du diviseur à croisement normaux  $\overline{X}^{\text{sing}} \cap Y$ , est lisse sur  $\mathbb{F}_p$ . Il résulte alors de ([S], IV. D. 2, Proposition 22) que  $t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_{r+m}$  font partie d'un système régulier de paramètres  $(t_1, \dots, t_n)$  de l'anneau local de  $X$  en  $y$  (ce dernier est régulier, puisque  $X$  est semi-stable). Le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - p)$  défini par ce système est alors étale au voisinage de  $y$ . Quitte à se localiser encore sur  $X$ , on peut donc supposer que  $X = \text{Spec } \mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \dots t_r - p)$  et que  $Y$  est le sous-schéma fermé de  $X$  d'équations  $t_r = t_{r+1} = \dots = t_{r+m} = 0$ .

Nous allons maintenant décrire explicitement cet éclaté.

Considérons le sous-schéma ouvert  $U$  de  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p[\lambda, T_1, \dots, T_n]/(\lambda T_1 \dots T_r - p)$  complémentaire du sous-schéma fermé d'équations  $T_r = T_{r+1} = \dots = T_{r+m} = 0$ . On munit  $U$  d'une action libre de  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$  en faisant agir  $\Lambda \in \mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$  par la règle

$$\lambda \mapsto \Lambda^{-1} \lambda, \quad T_i \mapsto \Lambda T_i \quad (i \in [r, r + m]), \quad T_i \mapsto T_i \quad (i \notin [r, r + m]).$$

On définit d'autre part un morphisme  $U \rightarrow X$  en envoyant  $t_i$  sur  $\lambda T_i$  lorsque  $i \in [r, r + m]$  et sur  $T_i$  lorsque  $i \notin [r, r + m]$ . Ce morphisme est manifestement  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$ -invariant et induit donc un morphisme  $U/\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p} \rightarrow X$ . Il résulte du fait que  $t_1, \dots, t_{r+m}$  est une suite régulière que le morphisme  $U/\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p} \rightarrow X$  n'est autre que  $\tilde{X} \rightarrow X$  et que le  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$ -torseur  $U \rightarrow U/\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$  est celui défini par le  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -module inversible  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)$  associé au diviseur exceptionnel  $E$ . (cf. [F], Ch IV theorem 2.2).

Le  $\mathbb{Z}_p$  schéma  $U$  est manifestement semi-stable, et donc  $\tilde{X} = U/\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p}$  aussi.  $\square$

*Etape 2.* (cf. 3.4) Nous construirons (pour  $i = 3, 4, 5$ ) des morphismes  $R_i : U_i \rightarrow \text{Gr}_{i-2}$  (cf. 2.3) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_i \otimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{R_i \otimes \mathbb{Q}_p} & \text{Gr}_{i-2} \otimes \mathbb{Q}_p \\ \downarrow & \searrow \delta_i & \\ \mathcal{L} \otimes \mathbb{Q}_p & & \end{array}$$

(les produits tensoriels sont sur  $\mathbb{Z}_p$ ;  $\delta_i$  est le composé  $\text{pr}_i \circ \delta$ , cf. 2.3). Les morphismes  $R_i$  et le morphisme naturel  $U_5 \rightarrow \mathcal{L}$  induiront alors un morphisme  $R_{U_5} : U_5 \rightarrow \prod_{0 \leq i \leq 3} \text{Gr}_i$ , se factorisant par le sous-schéma fermé  $\mathcal{M}$  puisque  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq 5}$  est intègre. En remarquant que la fibre générique du morphisme  $\text{pr}_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}$  (cf 2.3) est un isomorphisme, on applique alors le lemme (3.1.1)

au diagramme commutatif évident. On voit ainsi que la construction (3.4) démontrera la deuxième partie du théorème (2.4.2).

*Remarque.* En utilisant d’une autre manière le lemme (3.1.1), on voit facilement que les morphismes  $R_i$  admettent eux aussi un prolongement équivariant sur  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq i}$ .

3.3. Dans les calculs qui suivent, la manière de noter les coordonnées sur l’éclaté sera calquée sur celle employée dans la preuve du lemme 3.2.1.

3.3.0. Soit  $U_0$  l’ouvert ( $\mathcal{I}$ -saturant)  $\mathcal{L}^0 \times_{\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{L}}_{\leq 0}$  de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq 0}$ . Le schéma  $U_0$ , qui est l’éclaté de l’espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^6$  (de coordonnées  $(a_j^i)_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ ) le long de l’origine de sa fibre spéciale, est alors le quotient par  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}$  du  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $T_0$  suivant.

Le schéma  $T_0$  est le sous-schéma localement fermé de l’espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^8$  (de coordonnées  $(\lambda_0, P_0, a_j^i[0])_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ ) obtenu en intersectant le sous-schéma fermé d’équation  $\lambda_0 P_0 = p$  avec l’ouvert complémentaire du sous-schéma fermé d’équations  $(P_0 = a_j^i[0] = 0, \forall i, j)$ . L’action de  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}$  sur  $T_0$  provient par restriction de celle obtenue en faisant opérer  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}$  sur  $A_{\mathbb{Z}_p}^8$  via l’inverse du caractère tautologique sur le premier facteur et via le caractère tautologique sur les autres.

On vérifie sans difficulté (directement ou en utilisant le lemme 3.2.1) que  $U_0$  est semi-stable.

3.3.1. Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}_{\{3,5,6\}}^0$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équations  $a_j^i = 0, \forall (i, j) \neq (3, 3)$ . Le transformé strict de sa fibre spéciale est donc le sous-schéma fermé de  $U_0$  défini par les équations  $P_0 = a_j^i[0] = 0, \forall (i, j) \neq (3, 3)$ . Comme ci-dessus, l’éclaté  $U_1$  de  $U_0$  le long de ce transformé strict est semi-stable et s’identifie au quotient par  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^2$  du schéma  $T_1$  suivant.

Le schéma  $T_1$  est le sous-schéma localement fermé de l’espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^9$  (de coordonnées  $(\lambda_0, \lambda_1, P_1, a_j^i[1])_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ ) obtenu en intersectant le sous-schéma fermé d’équation  $\lambda_0 \lambda_1 P_1 = p$  avec l’ouvert complémentaire des sous-schémas fermés d’équations respectives  $(P_1 = a_j^i[1] = 0, \forall (i, j) \neq (3, 3))$  et  $\lambda_1 = a_3^3[1] = 0$ . L’action de  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^2$  sur  $T_1$  provient de l’action sur  $A_{\mathbb{Z}_p}^9$  définie par

$$(\Lambda_0, \Lambda_1), (\lambda_0, \lambda_1, P_1, a_j^i[1])((i, j) \neq (3, 3)), a_3^3[1] \mapsto (\Lambda_0^{-1} \lambda_0, \Lambda_1^{-1} \lambda_1, \Lambda_0 \Lambda_1 P_1, \Lambda_0 \Lambda_1 a_j^i[1], \Lambda_0^0 a_3^3[1]).$$

Soit  $U_1^0$  l’ouvert complémentaire du sous-schéma fermé d’équation  $a_3^3[1] = 0$ . A partir du paragraphe (3.3.3) nous travaillerons au-dessus de cet ouvert, ce qui nous permettra de simplifier l’écriture de certains éclatements. Pour pouvoir appliquer l’argument (3.2) au-dessus des ouverts  $U_i = U_1^0 \times_{\mathcal{L}_{\leq 1}} \tilde{\mathcal{L}}_{\leq i}$ , nous aurons alors besoin de savoir que ceux-ci sont  $\mathcal{I}$ -saturants. Nous allons donc vérifier maintenant que l’ouvert  $U_1^0$  est  $\mathcal{I}$ -saturant.

Soient  $g_1, \dots, g_5 \in \mathcal{I}(\mathbb{Z}_p)$  les matrices suivantes. Pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $g_i = \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & K'\gamma_i^{-1}K \end{pmatrix}$ , où

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

la matrice  $g_5$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_3 & N \\ 0 & \text{Id}_3 \end{pmatrix} \text{ où } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que l'action de ces cinq éléments de  $\mathcal{I}(\mathbb{Z}_p)$  sur  $\tilde{\mathcal{L}}_{\leq 1}$  préserve  $U_1$  et que les translatsés de  $U_1^0$  (qui sont respectivement les ouverts complémentaires des fermés d'équation  $a_1^1[1] + a_3^2[1] = 0$ ,  $a_2^1[1] + a_3^2[1] = 0$ ,  $a_2^2[1] + a_3^2[1] = 0$ ,  $a_1^1[1] + a_2^1[1] + a_3^1[1] + a_3^2[1] = 0$  et  $P_1 + a_3^2[1] = 0$ ) forment avec  $U_1^0$  un recouvrement de  $U_1$ . La surjectivité annoncée en résulte immédiatement.

*Remarque.* Le sous-schéma fermé de  $T_1$  d'équation  $a_3^2[1] = 1$  s'identifie bien sûr à  $U_1^0$ . Nous préférons cependant conserver l'homogénéité des équations en n'utilisant pas cette identification.

3.3.2. Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équations  $a_2^2 a_3^3 - (a_3^2)^2 = a_i^1 = 0, \forall i$ . Le transformé strict  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$  de sa fibre spéciale est donc le sous-schéma fermé de  $U_1$  défini par les équations  $P_1 = a_2^2[1]a_3^3[1] - \lambda_1(a_3^2[1])^2 = a_i^1[1] = 0, \forall i$ .

Pour démontrer que l'éclaté  $U_2$  de  $U_1$  le long de  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$  est semi-stable, nous allons maintenant vérifier les hypothèses du lemme 3.2.1 pour le couple  $((\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}, U_1)$ .

On voit aisément que, localement pour la topologie de Zariski sur  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$ , l'une au moins des deux quantités  $a_2^2[1]$  et  $a_3^3[1]$  est inversible. La matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial\lambda_0 & \partial/\partial\lambda_1 & \partial/\partial P_1 & (\partial/\partial a_i^1[1])_{1 \leq i \leq 3} & \partial/\partial a_2^2[1] & \partial/\partial a_3^2[1] & \partial/\partial a_3^3[1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3^3[1] & -2\lambda_1 a_3^2[1] & a_2^2[1] \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

des équations de  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$  est donc de rang maximum le long de  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$ . Ceci démontre déjà que le schéma  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$  est lisse sur  $\mathbb{F}_p$ . La matrice extraite obtenue en oubliant ses deux premières colonnes est elle aussi de rang maximum, ce qui démontre aussi que  $\overline{U_1^{\text{sing}}} \cap (\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$  (qui a pour équation  $\lambda_0 \lambda_1 = 0$  dans  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$ ) est un diviseur à croisements normaux dans  $(\mathcal{L}_{\{2,4,6\}}^0)_{\leq 1}$ .

Nous allons maintenant donner une description explicite du schéma  $U_2$ , comme quotient par  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^3$  du schéma  $T_2$  suivant.

Le schéma  $T_2$  est le sous-schéma localement fermé de l'espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^{11}$  (de coordonnées  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, P_2, \delta_1^1[2], a_j^i[2]_{1 \leq i \leq j \leq 3})$ ) obtenu en intersectant le sous-schéma fermé d'équations

$$\begin{aligned} \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 P_2 &= p, \\ \lambda_2 \delta_1^1[2] &= a_2^2[2] a_3^3[2] - \lambda_1 (a_3^2[2])^2 \end{aligned}$$

avec l'ouvert complémentaire des sous-schémas fermés d'équations respectives

$$\begin{aligned} P_2 = \delta_1^1[2] = a_i^1 &= 0, \quad \forall i, \\ \lambda_2 = a_2^2[2] = a_3^3[2] &= 0, \quad \lambda_1 = a_3^2[2] = 0. \end{aligned}$$

L' action de  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^3$  sur  $T_2$  provient de l'action sur  $A_{\mathbb{Z}_p}^{11}$  définie par

$$(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \mapsto \text{diag}(\Lambda_0^{-1}, \Lambda_1^{-1}, \Lambda_2^{-1}, \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2, (\Lambda_0 \Lambda_1)^2 \Lambda_2, (\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2) \cdot \text{Id}_3, (\Lambda_0 \Lambda_1) \cdot \text{Id}_2, \Lambda_0)$$

(la notation  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  désigne la matrice diagonale d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  ; on range les coordonnées  $a_i^j[2]$  par  $i$  croissants).

3.3.3. Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}_{\{2,3,6\}}^0$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équations  $a_i^1 = 0, \forall i$ . Le transformé strict de sa fibre spéciale a donc pour équations  $P_2 = a_i^1[2] = 0, \forall i$ .

Soit  $\delta_i^j$  le cofacteur de  $a_j^i$  dans la matrice  $A$  (cf. 2.1). Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}_{\{1,5,6\}}^0$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équations  $\delta_i^j = 0, \forall i, j$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que le transformé strict de sa fibre spéciale a alors pour équations  $P_2 = \delta_i^j[2] = 0, \forall i, j$ , où

$$\delta_2^1[2] = - \begin{vmatrix} a_2^1[2] & \lambda_1 a_3^1[2] \\ a_2^3[2] & a_3^3[2] \end{vmatrix}, \quad \delta_3^1[2] = \begin{vmatrix} a_1^2[2] & a_2^2[2] \\ a_1^3[2] & a_2^3[2] \end{vmatrix}, \quad \delta_2^2[2] = \begin{vmatrix} a_1^1[2] & \lambda_1 \lambda_2 a_3^1[2] \\ a_1^3[2] & a_3^3[2] \end{vmatrix},$$

$$\delta_3^2[2] = - \begin{vmatrix} a_1^1[2] & \lambda_2 a_2^1[2] \\ a_1^3[2] & a_2^3[2] \end{vmatrix} \text{ et } \delta_3^3[2] = \begin{vmatrix} a_1^1[2] & \lambda_2 a_2^1[2] \\ a_2^1[2] & a_2^2[2] \end{vmatrix}$$

(avec les conventions  $a_j^i[2] = a_i^j[2]$  et  $\delta_j^i[2] = \delta_i^j[2]$  pour  $i \geq j$ ).

L'intersection dans  $U_2$  des transformés stricts de  $\overline{\mathcal{L}}_{\{2,3,6\}}^0$  et  $\overline{\mathcal{L}}_{\{1,5,6\}}^0$  est vide (cf. la première des conditions ouvertes intervenant dans la définition de  $T_2$ ). Pour démontrer que l'éclaté de  $U_2$  le long de leur réunion est semi-stable, il suffit donc de vérifier que ces deux transformés stricts vérifient les hypothèses du lemme 3.2.1. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Une matrice extraite (en n'oubliant que des colonnes) de la matrice jacobienne des équations du transformé strict de  $\mathcal{L}^0_{\{2,3,6\}}$  est

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial P_2 & \partial/\partial \delta_1^1[2] & \partial/\partial a_1^1[2] & \partial/\partial a_2^1[2] & \partial/\partial a_3^1[2] & \partial/\partial a_2^2[2] & \partial/\partial a_3^2[2] \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & -a_2^2[2] & -a_2^2[2] \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, de même que dans le paragraphe (3.3.2), la proposition à vérifier résulte du fait que, localement pour la topologie de Zariski sur  $(\mathcal{L}^0_{\{2,3,6\}})_{\leq 2}$ , l'une au moins des trois quantités  $\lambda_2, a_2^2[2], a_3^2[2]$  est inversible.

On vérifie facilement que

$$\lambda_2 a_3^1[2] \delta_1^1[2] + a_2^2[2] \delta_2^1[2] + a_3^2[2] \delta_3^1[2] = 0,$$

$$\lambda_2 a_2^1[2] \delta_1^3[2] + a_2^2[2] \delta_2^3[2] + a_3^2[2] \delta_3^3[2] = 0$$

et

$$\lambda_2 a_3^1[2] \delta_1^2[2] + a_2^2[2] \delta_2^2[2] + a_3^2[2] \delta_3^2[2] = 0.$$

Au-dessus de l'ouvert  $U_1^0$  les quantités  $\delta_2^1[2], \delta_3^3[2]$  et  $\delta_2^2[2]$  s'expriment alors en fonction de  $\delta_1^1[2], \delta_3^1[2]$  et  $\delta_3^2[2]$ . Les équations définissant le transformé strict de  $\mathcal{L}^0_{\{1,5,6\}}$  dans  $U_2^0 = U_2 \times_{U_1} U_1^0$  se résument donc à  $P_2 = \delta_1^1[2] = \delta_3^1[2] = \delta_3^2[2] = 0$ . La matrice

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial a_1^1[2] & \partial/\partial a_2^1[2] & \partial/\partial a_2^2[2] & \partial/\partial \lambda_1 & \partial/\partial P_2 & \partial/\partial \delta_1^1[2] \\ 0 & 0 & -a_3^2[2] & (a_3^2[2])^2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & a_3^2[2] & -a_3^1[2] & 0 & 0 & 0 \\ -a_3^2[2] & \lambda_2 a_3^1[2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est alors une matrice extraite (en n'oubliant que des colonnes) de la matrice jacobienne des équations de  $(\mathcal{L}^0_{\{1,4,5\}})_{\leq 2}$  (vu comme quotient par  $(\mathbb{G}_{m, \mathbb{Z}_p})^3$  d'un sous-schéma localement fermé de l'espace affine ambiant  $A_{\mathbb{Z}_p}^{11} \supset T_2 \supset T_2^0 = T_2 \times_{U_1} U_1^0$ ). Il résulte déjà d'habitude que  $(a_3^2[2])^2$  est inversible que  $(\mathcal{L}^0_{\{1,4,5\}})_{\leq 2}$  est lisse sur  $\mathbb{F}_p$ . En utilisant le fait que  $T_2^0$  est réunion des ouverts complémentaires des fermés d'équations respectives  $\lambda_1 = 0$  et  $a_3^2[2] = 0$ , on voit que l'équation  $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 = 0$  définit un diviseur à croisements normaux dans

$(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,4,5\}})_{\leq 2}$ , ce qui démontre que  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,4,5\}})_{\leq 2}$  vérifie lui aussi les hypothèses du lemme 3.2.1.

Nous allons maintenant donner une description explicite de l'éclaté  $U_3$  de  $U_2^0$  le long des transformés stricts de  $\mathcal{L}^0_{\{2,3,6\}}$  et  $\mathcal{L}^0_{\{1,5,6\}}$ , comme quotient par  $(\mathbb{G}_m^5)_{\mathbb{Z}_p}$  du  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $T_3$  suivant.

Le schéma  $T_3$  est le sous-schéma localement fermé de l'espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^{15}$  (de coordonnées  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_3, v_3, P_3, \delta_1^1[3], \delta_3^1[3], \delta_3^2[3], \delta_3^3[3], a_j^i[3]_{1 \leq i \leq j \leq 3})$ ) obtenu en intersectant le sous-schéma fermé d'équations

$$\begin{aligned} \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 v_3 P_3 &= p, \\ \lambda_2 v_3 \delta_1^1[3] &= a_2^2[3] a_3^3[3] - \lambda_1 (a_3^2[3])^2, \\ v_3 \delta_3^1[3] &= a_2^1[3] a_3^2[3] - a_3^1[3] a_2^2[3], \\ v_3 \delta_3^2[3] &= -(a_1^1[3] a_3^2[3] - \lambda_2 \mu_3 a_2^1[3] a_3^1[3]), \end{aligned}$$

avec l'ouvert complémentaire des sous-schémas fermés d'équations respectives

$$\begin{aligned} P_3 = \delta_1^1[3] = \delta_3^1[3] = \delta_3^2[3] &= 0, \\ v_3 P_3 = a_i^1[3] &= 0, \quad \forall i, \\ \mu_3 = v_3 \delta_1^1[3] &= 0 \quad (\text{cf. 3.3.2}), \\ a_3^2[3] &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\lambda_1 = a_3^3[3] = 0.$$

On laisse au lecteur le soin d'expliciter l'action de  $(\mathbb{G}_m^5)_{\mathbb{Z}_p}$ .

3.3.4. Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}^0_{\{1,3,5\}}$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équations  $\delta_3^i = 0, \forall i$ . Le transformé strict de  $\mathcal{L}^0_{\{1,3,5\}}$  a alors pour équations  $P_3 = \delta_3^1[3] = \delta_3^2[3] = 0$  (on rappelle que  $\delta_3^3[2]$  s'exprime en fonction de  $\delta_3^1[2]$  et  $\delta_3^2[2]$ , cf. 3.3.3). De même que dans le paragraphe 3.3.3, on vérifie que ce transformé strict (vu comme sous-schéma fermé de  $U_3$ ) vérifie les hypothèses du lemme 3.2.1 (en n'oubliant que des colonnes, on peut en fait extraire de la matrice jacobienne de ses équations une matrice d'une forme analogue à celle qu'on a écrite lors de la vérification des hypothèses du lemme 3.2.1 pour  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,4,5\}})_{\leq 2}$ ).

L'éclaté  $U_4$  de  $U_3$  le long du transformé strict de  $\mathcal{L}^0_{\{1,3,5\}}$  se décrit explicitement comme le quotient par  $(\mathbb{G}_m^6)_{\mathbb{Z}_p}$  du  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $T_4$  suivant.

Le schéma  $T_4$  est le sous-schéma localement fermé de l'espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^{16}$  (de coordonnées  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_3, v_3, \lambda_4, P_4, \delta_1^1[4], \delta_3^1[4], \delta_3^2[4], a_j^i[4]_{1 \leq i \leq j \leq 3})$ ) obtenu en

intersectant le sous-schéma fermé d'équations

$$\begin{aligned} \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 \nu_3 \lambda_4 P_4 &= p, \\ \lambda_2 \nu_3 \delta_1^1[4] &= a_2^2[4] a_3^3[4] - \lambda_1 (a_3^2[4])^2, \\ \nu_3 \lambda_4 \delta_3^1[4] &= a_2^1[4] a_3^2[4] - a_3^1[4] a_2^2[4], \\ \nu_3 \lambda_4 \delta_3^2[4] &= -(a_1^1[4] a_3^2[4] - \lambda_2 \mu_3 a_2^1[4] a_3^1[4]), \end{aligned}$$

avec l'ouvert complémentaire des sous-schémas fermés d'équations respectives

$$\begin{aligned} P_4 &= \delta_3^1[4] = \delta_3^2[4] = 0, \\ \lambda_4 &= \delta_1^1[4] = 0, \\ \nu_3 \lambda_4 P_4 &= a_i^1[4] = 0, \quad \forall i \\ \mu_3 &= \nu_3 \delta_1^1[4] = 0 \quad (\text{cf. 3.3.2}), \\ a_3^2[4] &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\lambda_1 = a_3^3[4] = 0.$$

On laisse au lecteur le soin d'expliciter l'action de  $(\mathbb{C}_m^6)_{\mathbb{Z}_p}$ .

3.3.5. Le sous-schéma fermé  $\mathcal{L}_{\{1,2,4\}}^0$  de  $\mathcal{L}^0$  a pour équation  $\det A = 0$ . Malheureusement, le transformé strict de sa fibre spéciale n'est pas le sous-schéma fermé d'équation  $P_4 = \det A_4 = 0$ , où

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_1^1[4] & \lambda_2 \mu_3 a_2^1[4] & \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 a_3^1[4] \\ a_1^2[4] & a_2^2[4] & \lambda_1 a_3^2[4] \\ a_1^3[4] & a_2^3[4] & a_3^3[4] \end{pmatrix}.$$

En effet, on vérifie aisément que  $-a_3^2[4] \det A_4 = \lambda_2 \nu_3^2 \lambda_4 \Delta$ , où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_1^1[4] & \mu_3 \delta_2^1[4] \\ \delta_1^3[4] & \delta_2^3[4] \end{vmatrix} \text{ et } \delta_2^1[4] = -(a_3^2[4])^{-1} (\lambda_2 a_3^1[4] \delta_1^1[4] + \lambda_4 a_3^3[4] \delta_3^1[4]).$$

Le transformé strict de  $\overline{\mathcal{L}_{\{1,2,4\}}^0}$  est donc (à priori) un sous-schéma fermé du sous-schéma fermé  $(\mathcal{L}_{\{1,2,4\}}^0)_{\leq 4}^?$  de  $U_4$  d'équations  $P_4 = \Delta = 0$ . Nous allons maintenant démontrer que le couple  $((\mathcal{L}_{\{1,2,4\}}^0)_{\leq 4}^?, U_4)$  satisfait les hypothèses du lemme 3.2.1. Nous en déduirons ensuite que  $(\mathcal{L}_{\{1,2,4\}}^0)_{\leq 4}^?$  est en fait le transformé

strict  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  de  $\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}}$  (de sorte que ce transformé strict vérifiera lui aussi les hypothèses du lemme 3.2.1).

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1^1[4]} & \frac{\partial}{\partial a_2^1[4]} & \frac{\partial}{\partial a_2^2[4]} & \frac{\partial}{\partial a_3^1[4]} & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial}{\partial \delta_1^1[4]} & \frac{\partial}{\partial \delta_3^2[4]} & \frac{\partial}{\partial P_4} \\ 0 & 0 & -a_3^3[4] & -a_2^2[4] & (a_3^2[4])^2 & \lambda_2 v_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3^2[4] & a_3^1[4] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3^2[4] - \lambda_2 \mu_3 a_3^1[4] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \lambda_4 (\delta_3^1[4])^2 & 0 & \delta_3^2[4] & \delta_1^1[4] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice extraite (en n’oubliant que des colonnes) de la matrice jacobienne des équations de  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$ . Le long du fermé d’équations  $\delta_1^1[4] = \delta_3^2[4] = 0$ , les quantités  $\mu_3, \lambda_4$  et  $\delta_3^1[4]$  sont inversibles. Par conséquent, localement pour la topologie de Zariski sur  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$ , l’une au moins des entrées de la quatrième ligne de cette matrice est inversible. En raisonnant sur les trois premières lignes de cette matrice comme dans les paragraphes 3.3.3 et 3.3.4, ceci démontre que  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  vérifie les hypothèses du lemme 3.2.1.

Le complémentaire dans  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  du diviseur exceptionnel de  $U_4$  s’identifie à  $\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}} - \overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,3,5\}}$ . L’intersection de  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  avec le diviseur exceptionnel de  $U_4$  (qui a pour équation  $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 v_3 \lambda_4 = 0$ ) est comme on vient de le voir un diviseur à croisements normaux dans  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  et est donc de complémentaire dense. Le schéma  $(\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}})_{\leq 4}$  est donc l’adhérence schématique dans  $U_4$  de  $\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}} - \overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,3,5\}}$ , ce qui démontre que c’est bien le transformé strict de  $\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}}$ .

On va maintenant décrire explicitement l’éclaté  $U_5$  de  $U_4$  le long du transformé strict de  $\overline{\mathcal{L}}^0_{\{1,2,4\}}$ , comme le quotient par  $(G_m^7)_{\mathbb{Z}_p}$  du  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $T_5$  suivant.

Le schéma  $T_5$  est le sous-schéma localement fermé de l’espace affine  $A_{\mathbb{Z}_p}^{18}$  (de coordonnées  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_3, v_3, \lambda_4, \lambda_5, P_5, \Delta[5], \delta_1^1[5], \delta_3^1[5], \delta_3^2[5], a_i^j[5]_{1 \leq i \leq j \leq 3})$ ) obtenu en intersectant le sous-schéma fermé d’équations

$$\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 v_3 \lambda_4 \lambda_5 P_5 = p,$$

$$\lambda_2 v_3 \delta_1^1[5] = a_2^2[5] a_3^3[5] - \lambda_1 (a_3^2[5])^2,$$

$$v_3 \lambda_4 \delta_3^1[5] = a_2^1[5] a_3^2[5] - a_3^1[5] a_2^2[5],$$

$$v_3 \lambda_4 \delta_3^2[5] = -(a_1^1[5] a_3^2[5] - \lambda_2 \mu_3 a_2^1[5] a_3^1[5]),$$

$$\lambda_5 \Delta[5] = -a_3^2[5]^{-1} (\delta_1^1[5] \delta_3^3[5] + \mu_3 \delta_3^1[5] (a_3^2[5])^{-1} (\lambda_2 a_3^1[5] \delta_1^1[5] + \lambda_4 a_3^3[5] \delta_3^1[5])),$$

avec l'ouvert complémentaire des sous-schémas fermés d'équations respectives

$$P_5 = \Delta[5] = 0,$$

$$\lambda_5 P_5 = \delta_3^1[5] = \delta_3^2[5] = 0,$$

$$\lambda_4 = \delta_1^1[5] = 0,$$

$$v_3 \lambda_4 \lambda_5 P_5 = a_i^1[5] = 0, \quad \forall i,$$

$$\mu_3 = v_3 \delta_1^1[5] = 0 \quad (\text{cf. 3.3.2}),$$

$$a_3^2[5] = 0,$$

et

$$\lambda_1 = a_3^3[5] = 0.$$

On laisse au lecteur le soin d'expliciter l'action de  $(\mathbb{G}_m^7)_{\mathbb{Z}_p}$ .

3.4. Nous allons maintenant construire des morphismes  $R_i : U_i \rightarrow \text{Gr}_{i-2}$  (pour  $i = 3, 4, 5$ ) prolongeant le morphisme  $R_i^0 : U_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{\leq i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \text{Gr}_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \text{Gr}_{i-2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  (cf. 2.2.2).

3.4.1. Construction du morphisme  $R_3$ .

On munit le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $V_1$  de la base  $(\Pi^{-1}e_1, \dots, \Pi^{-1}e_6)$  (cf. 1.1). Le morphisme  $R_3^0$

est donc défini par l'image de la matrice  $\Pi \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$ . Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} v_3 P_3 & 0 & 0 \\ a_1^1[3] & \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 a_2^1[3] & \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3 a_3^1[3] \\ a_1^2[3] & \lambda_0 \lambda_1 a_2^2[3] & \lambda_0 \lambda_1 a_3^2[3] \\ a_1^3[3] & \lambda_0 \lambda_1 a_2^3[3] & \lambda_0 a_3^3[3] \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\Pi \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$  ne diffère de  $M$  que par sa première colonne, qui est le produit de celle de  $M$  par  $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \mu_3$ . Le morphisme  $R_i^0$  est donc encore défini par l'image de  $M$ .

Les mineurs  $v_3 P_3, a_1^1[3], a_1^2[3], a_1^3[3]$  de la matrice  $M$  ne s'annulent pas simultanément sur le schéma  $T_3$  et l'image de la matrice  $M$  est donc un facteur direct de rang 3 du  $\Gamma(T_3, \mathcal{O}_{T_3})$ -module  $V_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Gamma(T_3, \mathcal{O}_{T_3})$ . Ceci définit un morphisme  $T_3 \rightarrow \text{Gr}_1$ , et on laisse au lecteur le soin de vérifier que celui-ci se factorise par le quotient  $T_3 \rightarrow U_3$ .

*Remarque.* La construction précédente peut déjà se faire sur l'éclaté  $U_{2,5}$  de  $U_2$  le long du transformé strict de  $\mathcal{L}^0_{\{2,3,6\}}$

3.4.2. Construction du morphisme  $R_4$ .

On munit de même le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $V_2$  de la base  $(\Pi^{-2}e_1, \dots, \Pi^{-2}e_6)$ , de sorte que le morphisme  $R_4^0$  est défini par l'image de la matrice  $\Pi^2 \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$ . Considérons la matrice

$$B^0 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \\ a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{pmatrix}$$

formée des deux premières colonnes et des cinq premières lignes de la matrice  $\Pi^2 \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$  et notons  $W$  le sous  $\mathbb{Z}_p$ -module de  $V_2$  engendré par les cinq premiers vecteurs de la base ci-dessus. L'image de la matrice  $B^0$  définit un morphisme  $b^0 : U_4 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathcal{L}^0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \text{Gr}(2, W) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  et le dernier vecteur-colonne de la matrice  $\Pi^2 \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$  définit un morphisme  $c_3 : U_4 \rightarrow \mathbb{P}(V_2^\vee)$  qui se factorise par

l'ouvert complémentaire de  $P(W^\vee)$ . La construction de  $R_4$  se ramène donc à celle d'un morphisme  $b : U_4 \rightarrow \text{Gr}(2, W)$  prolongeant  $b^0$  (on a alors  $R_4 = b \oplus c_3$ , avec un abus de notations évident). A son tour, la construction du morphisme  $b$  se ramène à celle d'un morphisme  $\beta : U_4 \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 W^\vee)$  prolongeant le morphisme  $\beta^0 : U_4 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 W^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  induit par les coordonnées de Plücker (on rappelle que le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $U_4$  est plat par construction).

Le morphisme  $\beta^0$  est défini par les coordonnées homogènes

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= -p^2, & m_{1,3} &= -pa_1^1, \\ m_{1,4} &= -pa_1^2, & m_{1,5} &= -pa_1^3, \\ m_{2,3} &= pa_1^2, & m_{2,4} &= pa_2^2, \\ m_{2,5} &= pa_3^2, & m_{3,4} &= \delta_3^3, \\ m_{3,5} &= -\delta_3^2 & \text{et } m_{4,5} &= \delta_3^1 \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= -\lambda_2 \mu_3 \nu_3 \lambda_4 P_4^2, & M_{1,3} &= -\lambda_2 \mu_3 P_4 a_1^1[4], \\ M_{1,4} &= -\lambda_2 \mu_3 P_4 a_1^2[4], & M_{1,5} &= -\lambda_2 \mu_3 P_4 a_1^3[4], \\ M_{2,3} &= \lambda_2 \mu_3 P_4 a_1^2[4], & M_{2,4} &= P_4 a_2^2[4], \\ M_{2,5} &= P_4 a_3^2[4], & M_{3,4} &= \delta_3^3[4], \\ M_{3,5} &= -\delta_3^2[4] & \text{et } M_{4,5} &= \delta_3^1[4] \end{aligned}$$

(où l'on pose  $\delta_3^3[4] = -a_2^3[4]^{-1}(\lambda_2 \mu_3 a_2^1[4] \delta_1^3[4] + a_2^2[4] \delta_2^3[4])$ ). On a alors  $m_{i,j} = (\lambda_0 \lambda_1)^2 \lambda_2 \mu_3 \nu_3 \lambda_4 M_{i,j}$ , et le morphisme  $\beta^0$  est donc encore défini par les coordonnées homogènes  $M_{i,j}$ .

Le triplet  $(M_{2,5}, M_{3,5}, M_{4,5})$  ne s'annule jamais sur  $T_4$  ( $T_4$  est recouvert par les ouverts complémentaires des trois fermés d'équations respectives  $\delta_3^1[4] = 0$ ,  $\delta_3^2[4] = 0$  et  $P_4 = 0$  et  $a_3^2[4]$  est inversible sur  $T_4$ ). Le 10-uplet  $(M_{i,j})_{i,j}$  définit donc un morphisme  $T_4 \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 W^\vee)$ . On vérifie aisément que ce morphisme est invariant sous l'action naturelle de  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^6$  sur  $T_4$ . On obtient alors le morphisme  $\beta$  recherché par passage au quotient.

3.4.3. Construction du morphisme  $R_5$ .

On munit de même le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $V_3$  de la base  $(\Pi^{-3}e_1, \dots, \Pi^{-3}e_6)$ , de sorte que le morphisme  $R_5^0$  est défini par l'image de la matrice  $\Pi^3 \cdot \begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pK \\ A \end{pmatrix}$ .

Le  $\mathbb{Z}_p$ -schéma  $U_5$  est plat (par construction), et la construction du morphisme  $R_5$  se ramène donc à celle d'un morphisme  $\rho_5 : U_5 \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V_3^\vee)$  prolongeant le morphisme  $\rho_5^0 : U_5 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V_3^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  induit par les coordonnées de Plücker.

Le morphisme  $R_5^0$  est défini par les coordonnées homogènes

$$\begin{array}{ll} m_{1,2,3} = -p^3, & m_{1,2,4} = -p^2 a_1^1, \\ m_{1,2,5} = p^2 a_1^2, & m_{1,2,6} = -p^2 a_1^3, \\ m_{1,3,4} = -m_{1,2,5}, & m_{1,3,5} = p^2 a_2^2, \\ m_{1,3,6} = p^2 a_2^3, & m_{1,4,5} = p \delta_3^3, \\ m_{1,4,6} = -p \delta_3^2, & m_{1,5,6} = p \delta_3^1, \\ m_{2,3,4} = m_{1,2,6}, & m_{2,3,5} = -m_{1,3,6}, \\ m_{2,3,6} = -p^2 a_3^3, & m_{2,4,5} = -m_{1,4,6}, \\ m_{2,4,6} = -p \delta_2^2, & m_{2,5,6} = p \delta_2^1, \\ m_{3,4,5} = m_{1,5,6}, & m_{3,4,6} = -m_{2,5,6}, \\ m_{3,5,6} = p \delta_1^1 & \text{et } m_{4,5,6} = \det A. \end{array}$$

Soient

$$\begin{array}{ll} M_{1,2,3} = -\lambda_1 \lambda_2 \mu_3^2 \nu_3 \lambda_4^2 \lambda_5^2 P_5^3, & M_{1,2,4} = -\lambda_1 \lambda_2 \mu_3^2 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_1^1[5], \\ M_{1,2,5} = -\lambda_1 \lambda_2 \mu_3^2 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_1^2[5], & M_{1,2,6} = -\lambda_1 \lambda_2 \mu_3^2 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_1^3[5], \\ M_{1,3,4} = -M_{1,2,5}, & M_{1,3,5} = \lambda_1 \mu_3 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_2^2[5], \\ M_{1,3,6} = \lambda_1 \mu_3 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_2^3[5], & M_{1,4,5} = \lambda_1 \mu_3 \lambda_4 P_5 \delta_3^3[5], \\ M_{1,4,6} = -\lambda_1 \mu_3 \lambda_4 P_5 \delta_3^2[5], & M_{1,5,6} = \lambda_1 \mu_3 \lambda_4 P_5 \delta_3^1[5], \\ M_{2,3,4} = M_{1,2,6}, & M_{2,3,5} = -M_{1,3,6}, \\ M_{2,3,6} = -\mu_3 \lambda_4 \lambda_5 P_5^2 a_3^3[5], & M_{2,4,5} = -M_{1,4,6}, \\ M_{2,4,6} = -\mu_3 P_5 \delta_2^2[5], & M_{2,5,6} = \mu_3 P_5 \delta_2^1[5], \\ M_{3,4,5} = M_{1,5,6}, & M_{3,4,6} = -M_{2,5,6}, \\ M_{3,5,6} = P_5 \delta_1^1[5] & \text{et } M_{4,5,6} = \Delta[5], \end{array}$$

où l'on pose

$$\begin{aligned} \delta_2^1[5] &= -a_2^3[5]^{-1}(\lambda_2 a_3^1[5] \delta_1^1[5] + \lambda_4 a_3^3[5] \delta_3^1[5]), \\ \delta_2^2[5] &= -a_2^3[5]^{-1}(\lambda_2 \mu_3 a_1^3[5] \delta_2^1[5] + \lambda_4 a_3^3[5] \delta_2^3[5]) \\ \text{et } \delta_3^3[5] &= -a_2^3[5]^{-1}(\lambda_2 \mu_3 a_2^1[5] \delta_1^3[5] + a_2^2[5] \delta_2^3[5]). \end{aligned}$$

On a  $m_{i,j,k} = \lambda_0^3 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \mu_3 v_3^2 \lambda_4 \lambda_5 M_{i,j,k}$ , et le morphisme  $\rho_5^0$  est donc encore défini par les coordonnées homogènes  $M_{i,j,k}$ .

On va maintenant vérifier que le 20-uplet  $(M_{i,j,k})_{i,j,k}$  ne s'annule jamais sur  $T_5$ , ce qui terminera la construction (il est facile de voir que le morphisme  $T_5 \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3 V_3^*)$  ainsi défini est invariant sous l'action naturelle de  $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Z}_p}^7$  sur  $T_5$ ; le morphisme  $\rho_5$  recherché s'obtient alors par passage au quotient).

Considérons le sous-schéma fermé  $Z$  de  $T_5$  d'équations  $M_{i,j,k} = 0, \forall i, j, k$  et supposons qu'il soit non vide. Le long de  $Z$  on a  $\Delta[5] = 0$  et  $P_5$  est donc inversible; l'annulation de  $M_{3,5,6}$  entraîne alors celle de  $\delta_1^1[5]$ . En particulier  $\mu_3$  et  $\lambda_4$  sont donc inversibles le long de  $Z$ , et il résulte alors de l'annulation de  $M_{1,4,6}, M_{1,5,6}, M_{2,4,6}, M_{2,5,6}$  et  $\delta_1^1[5]$  que  $\delta_3^1[5] = \delta_3^2[5] = 0$  (on rappelle que  $T_5$  est recouvert par les ouverts complémentaires des deux fermés d'équations respectives  $\lambda_1 = 0$  et  $a_3^3[5] = 0$ ). Le long de  $Z, \lambda_5 P_5$  est donc inversible et il résulte alors de l'annulation de  $M_{1,3,6}$  et  $M_{2,3,6}$  que  $\lambda_1 = a_3^3[5] = 0$ , ce qui est la contradiction cherchée.

#### 4. Application : construction d'un modèle semi-stable de $\mathcal{S}(g, N, p)_{\mathbb{Q}_p}$ pour $g \leq 3$

Dans ce paragraphe,  $g$  est un entier positif inférieur ou égal à 3 (le cas  $g = 1$  est cependant trivial).

Considérons le produit fibré

$$\tilde{\mathcal{T}}(g, N, p) = \mathcal{T}(g, N, p) \times_{\mathbb{M}_g} \tilde{\mathcal{M}}_g,$$

où le morphisme  $\mathcal{T}(g, N, p) \rightarrow \mathbb{M}_g$  est le morphisme  $f$  (1.3) et où le morphisme  $\tilde{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathbb{M}_g$  est la composition du morphisme  $R : \tilde{\mathcal{M}}_g = \tilde{\mathcal{L}}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  de la deuxième partie du théorème (2.4.2) avec l'inclusion fermée  $\mathcal{M}_g \hookrightarrow \mathbb{M}_g$  (2.3). En utilisant le théorème (2.4.2) et le fait que  $f$  est lisse (cf. 1.3), on voit immédiatement que le morphisme  $\tilde{\mathcal{T}}(g, N, p) \rightarrow \mathcal{T}(g, N, p)$  est une résolution semi-stable  $\mathcal{I}$ -équivariante (cf. 2.4) de  $\mathcal{T}(g, N, p)$ .

L'action du schéma en groupes  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{T}(g, N, p)$  est libre, et son action sur  $\tilde{\mathcal{T}}(g, N, p)$  est donc à fortiori libre. Considérons le quotient

$$\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p) = \tilde{\mathcal{T}}(g, N, p) / \mathcal{I}$$

(qui est a priori un espace algébrique au sens de Knutson [Kn]; nous verrons que pour

$g = 2$ , ce quotient est en fait un schéma quasi-projectif). Le théorème suivant résulte alors visiblement de la proposition 1.3.2 et du théorème 2.4.2.

**THÉORÈME 4.1.** (1) *Localement pour la topologie étale, l'espace algébrique  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p)$  est  $\mathbb{Z}_p$ -isomorphe à  $\tilde{\mathcal{M}}_g$ . En particulier,  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p)$  est semi-stable.*

(2) *Le morphisme  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(g, N, p)$  est une résolution semi-stable (cf. 2.4).  $\square$*

*Remarques.* (1) Lorsque  $g = 2$  (resp.  $g = 3$ ), la première partie de ce théorème revient à dire que  $\tilde{\mathcal{S}}(g, N, p)$  est semi-stable et qu'il existe des points (fermés) de sa fibre spéciale dont tout voisinage étale suffisamment petit est réunion de quatre (resp. sept) branches lisses. Puisque  $\tilde{\mathcal{S}}(2, N, p)$  (resp.  $\tilde{\mathcal{S}}(3, N, p)$ ) est de dimension relative 3 (resp. 6) sur  $\mathbb{Z}_p$ , le nombre 4 (resp. 7) est le maximum possible pour un espace algébrique semi-stable.

(2) A. J. de Jong a déjà construit par une autre méthode une résolution semi-stable de  $\mathcal{S}(2, N, p)$ , dont la source est un schéma quasi-projectif (cf. [dJ2]). Cette résolution semi-stable coïncide avec la nôtre (cf. la remarque 2 suivant notre théorème 2.4.2), et en particulier  $\tilde{\mathcal{S}}(2, N, p)$  est donc bien un schéma quasi-projectif.

(3) On peut obtenir de la même manière (cf. la remarque 3 suivant le théorème 2.4.2) un modèle semi-stable de certaines variétés de Shimura unitaires dont le groupe est de type  $\mathrm{GU}(2, 2)$  en la place archimédienne.

## Remerciements

Je remercie B.H. Gross qui m'a proposé de rechercher un modèle semi-stable de  $\mathcal{S}(3, N, p)$ ; je le remercie aussi pour l'atmosphère agréable et stimulante que j'ai trouvée à Harvard durant les trois mois qu'il m'a permis d'y passer. Mes remerciements vont aussi à A.J. de Jong, avec qui j'ai eu d'intéressantes conversations et qui m'a donné accès à certains de ses manuscrits non publiés, et à M. Rapoport pour une enrichissante discussion que nous avons eue à Orsay, qui m'a confirmé l'intérêt de la construction (2.4.1) (cf. les remarques sur les variétés de Shimura unitaires et leurs modèles locaux qui suivent les deux théorèmes de cet article). Je remercie finalement G. Laumon, qui m'a incité à rédiger cet article.

## Bibliographie

- [BC] Boutot J.-F. et Carayol, H.: Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura, *Astérisque* **196–197** (1991), 45-149.
- [CN] Chai, C. N. et Norman, P.: Bad reduction of the Siegel moduli scheme of genus two with  $\Gamma_0(p)$ -level structure, *Amer. J. Math.* **112** (1990), 1003–1071.
- [dJ1] de Jong, A. J.: The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with  $\Gamma_0(p)$ -level structures, *J. Algebra Geom.* **2** (1993), 667–688.
- [dJ2] de Jong, A. J.: Exposé à Oberwolfach (juillet 1992).

- [DP] Deligne, P. et Pappas, G.: Singularités des espaces de modules de Hilbert en les caractéristiques divisant le discriminant, *Compositio Math* **90** (1994), 59–79.
- [F] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Erbeg. Math. Grenzgeb. (3) 2, Springer, Berlin, 1984.
- [GIT] Fogarty, J. et Mumford, D.: *Geometric Invariant Theory*, 2nd edn, Ergeb. Math. Grenzgeb. 34, Springer, Berlin, 1982.
- [GR] Gruson, L. et Raynaud, M.: Critères de platitude et de projectivité. Techniques de ‘platification’ d’un module, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.
- [Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer, New York, 1977.
- [KL] Kazhdan, D. et Lusztig, G.: Schubert varieties and Poincaré duality, dans: *Proc. Sympos. Pure Math.* 36, Amer. Math. Soc., Providence, 1980, pp. 185–203.
- [Kn] Knutson, D.: *Algebraic Spaces*, Lecture Notes in Math. 203, Springer, New York, 1971.
- [LS] Lakshmibai, V. et Seshadri, C. S.: Geometry of  $G/P$ -II, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **87** (1978), 1–54
- [Me] Messing, W.: *The Crystals Associated to Barsotti–Tate Groups: with Applications to Abelian Schemes*, Lecture Notes in Math. 264, Springer, New York, 1972.
- [MS] Musili, C. et Seshadi, C. S.: *Standard Monomial Theory*, Lecture Notes in Math. 264, (Séminaire d’algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, 1980), Springer, New York, 1980, pp. 441–476.
- [R] Rapoport, M.: On the bad reduction of Shimura varieties, dans : L. Clozel et J. S. Milne (eds), *Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-Functions vol. II*, Perspect. Math. 11, Academic Press, Boston, 1990, pp. 253–321.
- [RZ] Rapoport, M. et Zink, Th.: *Period Spaces for  $p$ -Divisible Groups*, Ann. of Math. Stud. 141, Princeton University Press, 1996.
- [S] Serre, J.-P.: *Algèbre Locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math. 11, Springer, New York, 1965.
- [T] Tits, J.: Reductive groups over local fields, dans : A. Borel et W. Casselman (eds), *Automorphic Forms, Representations and L-Functions vol. I*, Proc. Sympos. Pure Math. 33(1), Amer. Math. Soc., Providence, 1979, pp. 29–69.