Can. J. Math. Vol. XXXVIII, No. 1, 1986, pp. 127-157

PROJECTIONS SUR DES ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES DANS DES DOMAINES PLANS

DAVID BÉKOLLÉ

Soit Ω un domaine de Jordan à bord rectifiable du plan complexe $\mathbf{C}$. Désignons par $d\lambda$ la mesure de Lebesgue à l'intérieur de Ω, par $d\sigma$ la mesure de Lebesgue sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et par φ une représentation conforme de Ω sur le disque unité $\mathbf{D}$ du plan complexe.

Par définition, la classe de Bergman $A^p(\Omega)$, $0 < p \leqq +\infty$, est le sous-espace de $L^p(d\lambda)$ formé par les fonctions holomorphes dans Ω et le projecteur de Bergman P_Ω de Ω est le projecteur orthogonal de $L^2(d\lambda)$ sur $A^2(\Omega)$; quel que soit f dans $L^2(d\lambda)$, on a la formule :

$$(1) \qquad P_\Omega f(z) = 1/\pi \int_\Omega \frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(\zeta)}}{[1 - \varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}]^2} f(\zeta) d\lambda(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

D'autre part, si l'on désigne par Γ_r la courbe fermée contenue dans Ω, définie par

$$\Gamma_r = \varphi^{-1}(\{w \in \mathbf{D} : |w| = r\}), 0 < r < 1,$$

la classe de Smirnov $E^p(\Omega)$, $0 < p \leqq +\infty$, est l'espace des fonctions f, holomorphes dans Ω, qui vérifient l'estimation :

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < +\infty.$$

Par définition, le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω est le projecteur orthogonal de $L^2(d\sigma)$ sur $E^2(\Omega)$; quel que soit f dans $L^2(d\sigma)$, on a la formule :

$$(2) \qquad P_{\partial\Omega} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{[\varphi'(z)\overline{\varphi'(\zeta)}]^{1/2}}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}} f(\zeta) d\sigma(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

L'origine de ce travail se trouve dans **[13]** et **[14]**, où A. A. Solov'ev démontre que si $\partial\Omega$ est une courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ou une courbe convexe, alors quel que soit p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, il y a équivalence entre les deux propriétés définies comme suit :

(B) le projecteur de Bergman P_Ω de Ω, défini en (1), s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^q(\Omega)$, $q = p$ ou p';

Reçu le 4 septembre, 1984.

(S) le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω, défini en (2), s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^q(\Omega)$, $q = p$ ou p'.

En plus, cet auteur caractérise les valeurs de p pour lesquelles les propriétés (B) et (S) sont simultanément vérifiées.

En fait, dans **[13]** et **[14]**, A. A. Solov'ev ne donne de ces résultats qu'une esquisse de preuve, dont le point de départ est l'équivalence entre la propriété (B) (resp. la propriété (S)) et une estimation L^q pour le projecteur de Bergman (resp. pour le projecteur de Szegö) du disque unité **D**, relative au poids $|\Psi'|^{2-q}$ (resp. $|\Psi'|^{(2-q)/2}$), où Ψ est une représentation conforme de **D** sur Ω. Il remarque ensuite que ces deux dernières estimations sont respectivement équivalentes à l'appartenance de $|\Psi'|^{2-p}$ à la classe de Muckenhoupt $A_p(\mathbf{D})$ de l'intérieur de **D** et de $|\Psi'|^{(2-p)/2}$ à la classe de Muckenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$ du bord de **D**.

L'un des buts de ce travail est de donner une démonstration détaillée de ces résultats dans une classe de domaines qui contient strictement les domaines à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux, sans point de rebroussement et les domaines convexes. Nous examinons également sous certaines conditions, le cas où le bord du domaine est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et possède des points de rebroussement.

L'autre but est de faire une mise au point sur la question suivante, suscitée par ces deux articles : y a-t-il équivalence en général entre les propriétés (B) et (S), pour un domaine de Jordan à bord rectifiable? La réponse à cette question est négative; plus précisément, même lorsque le domaine est de Smirnov, la propriété (S) est strictement plus forte que la propriété (B).

Dans un premier paragraphe, nous rappelons d'abord la caractérisation des poids ω définis dans **D** (resp. sur $\partial\mathbf{D}$), relativement auxquels le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de **D** s'étend en un opérateur continu de $L^p(\omega d\lambda)$ (resp. de $L^p(\omega d\sigma)$) dans lui-même, $1 < p < +\infty$. Nous en déduisons ensuite dans un domaine simplement connexe (resp. dans un domaine de Jordan à bord rectifiable) Ω, une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée de la représentation conforme de **D** sur Ω pour que Ω possède la propriété (B) (resp. la propriété (S)). Puis, nous démontrons le résultat principal de ce paragraphe (Théorèmes 1.1. et 1.3) en vertu duquel la propriété (S) est en général strictement plus forte que la propriété (B), dans un domaine de Jordan à bord rectifiable, même lorsqu'il est de Smirnov.

Dans un second paragraphe, nous étudions une classe $\mathscr{C}$ de domaines qui contient strictement les domaines à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux, sans point de rebroussement et les domaines convexes, pour laquelle nous démontrons que pour $p \in \,]1, +\infty[$, $p \neq 2$, les propriétés (B) et (S) ci-dessus sont encore équivalentes et nous caractérisons les valeurs de p pour lesquelles ces deux propriétés sont simultanément vérifiées : nous obtenons ainsi une première généralisation des résultats de A. A. Solov'ev.

Rappelons ensuite que dans le cas particulier des domaines convexes bornés, A. A. Solov'ev a démontré que les propriétés (B) et (S) sont vérifiées quel que soit p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$. Dans un troisième paragraphe, nous améliorons ce résultat en démontrant que le projecteur de Bergman P_Ω (resp. le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$) d'un tel domaine Ω s'étend à $L^1(d\lambda)$ (resp. à $L^1(d\sigma)$) en un opérateur de type faible (1, 1) qui reproduit la classe de Bergman $A^1(\Omega)$ (resp. la classe de Smirnov $E^1(\Omega)$).

Dans une remarque finale, nous démontrons que les résultats de A. A. Solov'ev s'étendent encore à une classe $\mathscr{C}'$ qui contient la classe $\mathscr{C}$ introduite ci-dessus; d'autre part, la classe $\mathscr{C}'$ contient également les domaines Ω dont la frontière Γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et possède des points de rebroussement w_j, $j = 1, \ldots, n$, au voisinage desquels l'un ou l'autre des domaines Ω et $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est convexe dans une direction différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_j.

L'auteur exprime sa reconnaissance à A. Bonami, R. Coifman, Y. Derriennic, P. Duren, Y. Meyer et M. Zinsmeister, dont les remarques et les suggestions ont été déterminantes pour accomplir ce travail.

Enfin, nous désignerons par le même lettre une fonction holomorphe ou harmonique dans un domaine et la fonction définie par ses valeurs au bord. Par ailleurs, nous adoptons la convention habituelle d'utiliser la même lettre C pour désigner des constantes qui peuvent être différentes d'une ligne à l'autre.

1. Etude comparée de la régularité des projecteurs de Bergman et de Szegö. Soit Ω un domaine de Jordan à bord rectifiable du plan complexe $\mathbf{C}$; nous désignons par φ une représentation conforme de Ω sur le disque unité $\mathbf{D}$ et nous posons $\Psi = \varphi^{-1}$.

Par définition, une fonction positive ω, définie dans $\mathbf{D}$, appartient à la classe de poids $B_p(\mathbf{D})$, $1 < p < +\infty$, s'il existe une constante $C_p(\omega)$ telle que quel que soit le secteur angulaire S de la forme

$$(3) \quad S = S(r_0e^{i\theta_0}, R) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D}: \\ |r - r_0| < R \text{ et } |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < 2\pi R\},$$

où $0 < r_0 < 1$, $1 - r_0 \leqq R < 1$ et $e^{i\theta_0} \in \partial D$, on a :

$$\left(\frac{1}{|S|}\int_S \omega d\lambda\right)\left(\frac{1}{|S|}\int_S \omega^{-1/(p-1)}d\lambda\right)^{p-1} \leqq C_p(\omega).$$

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 1.1. *Soit Ω un domaine simplement connexe de plan complexe et soit p un nombre réel appartenant à* $]1, +\infty[$, $p \neq 2$.

Lorsque la fonction Ψ'^{2-p} est intégrable dans $\mathbf{D}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le projecteur de Bergman P_Ω de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^q(\Omega)$, $q = p$ ou p';*

(ii) *Le poids $|\Psi'|^{2-p}$ appartient à la classe B_p* ($\mathbf{D}$).

Démonstration. On utilise l'équivalence entre (ii) et chacune des deux propriétés suivantes :

(iii) P_Ω s'étend en un opérateur continu de $L^p(d\lambda)$ dans $A^p(\Omega)$;

(iv) dans le disque unité $\mathbf{D}$, relativement à la mesure $|\Psi'|^{2-p}d\lambda$, le projecteur de Bergman $P_{\mathbf{D}}$ s'étend en un opérateur continu de L^p dans lui-même.

On se référera à [**1**] pour la démonstration de l'équivalence entre (ii) et (iv), tandis que l'équivalence entre (iii) et (iv) est de démonstration immédiate : ceci démontre l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Maintenant, pour la réciproque, il s'agit de déduire de (ii) que P_Ω reproduit toute fonction f de $A^q(\Omega)$, ce qui équivaut dans $\mathbf{D}$ à la formule $P_{\mathbf{D}}(g) = g$, quand $g\Psi'^{2/q-1} \in A^q(\mathbf{D})$; en fait, il suffit de prouver que g appartient alors à $A^1(\mathbf{D})$: l'inégalité de Hölder permet de conclure parce que, en vertu de (ii), la fonction $\Psi'^{2-q'}$ est intégrable dans $\mathbf{D}$. Le Lemme 1.1 est ainsi démontré.

Par ailleurs, soit ω une fonction positive intégrable sur $\partial\mathbf{D}$; nous désignons par $H^p(\omega d\sigma)$, $1 < p < +\infty$, l'espace des fonctions f, holomorphes dans $\mathbf{D}$ et vérifiant l'estimation

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \omega(e^{i\theta})d\theta < +\infty.$$

Dans la suite, nous désignerons par P le projecteur de Szegö de $\mathbf{D}$, défini sur $L^2(d\sigma)$ par

$$(4) \qquad Pf(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt, \quad z \in \mathbf{D}.$$

On remarquera que $\omega^{-1/(p-1)} \in L^1(d\sigma)$ dans le cas où P s'étend en un opérateur borné de $L^p(\omega d\sigma)$ dans $H^p(\omega d\sigma)$.

Nous rappelons ensuite que le poids ω appartient à la classe de Muchenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$, $1 < p < +\infty$, s'il existe une constante $C_p(\omega)$ telle que quel que soit l'arc I de $\partial\mathbf{D}$, on a :

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega d\sigma\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-1/(p-1)} d\sigma\right)^{p-1} \leqq C_p(\omega).$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1.2. *Soit ω une fonction positive intégrable sur $\partial\mathbf{D}$ et soit p un nombre réel appartenant à* $]1, +\infty[$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) *relativement à la mesure $\omega d\sigma$ sur $\partial\mathbf{D}$, le projecteur de Szegö P de* $\mathbf{D}$ *s'étend en un opérateur borné de $L^p(\omega d\sigma)$ dans $H^p(\omega d\sigma)$*;

2°) *le poids ω appartient à la classe de Muckenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$.*

Démonstration. Démontrons d'abord l'implication 1°) $\Rightarrow$ 2°). Nous avons remarqué, avant l'énoncé du lemme, que l'estimation 1°) entraîne l'intégrabilité sur $\partial\mathbf{D}$ de $\omega^{-1/(p-1)}$; ainsi, en vertu de 1°), si f est un fonction de $L^p(\omega d\sigma)$, Pf appartient à $H^p(\omega d\sigma)$, donc à l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ et on définit une fonction de $L^p(\omega d\sigma)$ en posant :

$$Tf(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} Pf(re^{i\theta}).$$

De plus, la transformation $T:f \to Tf$ définit un opérateur continu de $L^p(\omega d\sigma)$ dans lui-même et le raisonnement utilisé dans [**5**], pour le cas où T est une intégrale singulière, permet également dans le cas présent de démontrer que le poids ω appartient nécessairement à $A_p(\partial\mathbf{D})$.

Considérons ensuite l'implication réciproque 2°) $\Rightarrow$ 1°); cette implication est standard et découle du lemme suivant :

LEMME 1.3. *La transformation P^* qui à une fonction f définie sur $\partial\mathbf{D}$ fait correspondre la fonction*

$$P^*f(e^{i\theta}) = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\left| \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - re^{i(\theta-t)}}dt \right| \tag{5}$$

définit un opérateur continu de $L^p(\omega d\sigma)$ dans lui-même quand le poids appartient à la classe de Muckenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$.

Démonstration de Lemme 1.3. Il est bien connu que si l'on compare l'opérateur P^* défini en (5) à l'opérateur P_1^* qui à une fonction f définie sur $\partial\mathbf{D}$ fait correspondre la fonction

$$P_1^*f(e^{i\theta}) = \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{2\pi}\left| \int_{|e^{i\theta}-e^{it}|>\epsilon} \frac{f(e^{it})}{1 - e^{i(\theta-t)}}dt \right|,$$

alors, en vertu d'un lemme de A. Koranyi (cf. [**17**]), il existe une constante C telle que quel que soit f, on a l'inégalité

$$P^*f \leqq P_1^*f + Cf^*, \tag{6}$$

où f^* désigne la fonction maximale (de Hardy-Littlewood) de f définie par

$$f^*(e^{i\theta}) = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{it})|dt, \tag{7}$$

le sup portant sur tous les arcs I de $\partial\mathbf{D}$ centrés en $e^{i\sigma}$.

L'intérêt de l'inégalité (6) réside dans le fait que P_1^* est l'opérateur maximal associé à une intégrale singulière sur $\partial\mathbf{D}$; ainsi, si l'on se réfère à

[5], P_1^* est un opérateur continu de $L^p(\omega d\sigma)$ dans lui-même, quand ω appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$.

Ensuite, en vertu de (6), on conclut en utilisant le lemme suivant, dû à B. Muckenhoupt (cf. [5]) :

LEMME 1.4. *La transformation maximale $f \mapsto f^*$ introduite en* (7) *définit un opérateur continu de $L^p(\omega d\sigma)$ dans lui-même quand le poids ω appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$.*

Le Lemme 1.3 est ainsi démontré et ceci achève la démonstration du Lemme 1.2.

Nous démontrons ensuite le lemme suivant :

LEMME 1.5. *Soit Ω un domaine de Jordan à bord rectifiable*; *on désigne par Ψ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω et par p un nombre réel appartenant à* $]1, +\infty[$, $p \neq 2$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^q(\Omega)$, $q = p$ ou p'*;

(ii) *Ω est un domaine de Smirnov et le poids $|\Psi'|^{(2-p)/2}$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$.*

Démonstration. Le lemme suivant découle immédiatement du Lemme 1.2.

LEMME 1.6. *Lorsque la fonction $\Psi'^{(2-p)/2}$ est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$, $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1°) *le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω s'étend en une opérateur continu de $L^p(d\sigma)$ dans $E^p(\Omega)$*;

2°) *le poids $|\Psi'|^{(2-p)/2}$ appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$.*

Démontrons d'abord l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du Lemme 1.5. Si l'on suppose que $1 < q < 2$, le poids $|\Psi'|^{(2-q)/2}$ est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$, parce que Ψ' est une fonction de H^1 : cette dernière propriété découle du fait que Ω est un domaine de Jordan à bord rectifiable. En vertu du Lemme 1.6, on obtient alors que la propriété (i) entraîne l'appartenance de $|\Psi'|^{(2-q)/2}$ à $A_q(\partial\mathbf{D})$, ce qui équivaut à

$$|\Psi'|^{(2-p)/2} \in A_p(\partial\mathbf{D}).$$

Démontrons ensuite que sous l'hypothèse (i), Ω est nécessairement un domaine de Smirnov, c'est-à-dire que Ψ' est une fonction extérieure. Comme la fonction $\varphi'^{1/q}$ appartient à $E^q(\Omega)$, on a, en vertu de (i) :

$$P_{\partial\Omega}(\varphi'^{1/q}) = \varphi'^{1/q},$$

ou encore, en se transportant sur $\mathbf{D}$, on a :

$$(8) \qquad P(\Psi'^{-1/q+1/2}) = \Psi'^{-1/q+1/2}.$$

Mais, si l'on suppose q dans $]1, 2[$, pour que l'égalité (8) ait lieu, il est nécessaire que la fonction $\Psi'^{-1/q+1/2}$ appartienne à $H^1(\mathbf{D})$ (cf. [7], page 41).

Par ailleurs, pour $q \in]1, 2[$, la fonction $\Psi'^{1/q-1/2}$ appartient également à $H^1(\mathbf{D})$ parce que $\Psi' \in H^1(D)$, en vertu du fait que le bord de Ω est rectifiable.

Il s'ensuit que Ψ' est une fonction extérieure et l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est ainsi démontrée.

Pour la réciproque, il suffit en vertu du Lemme 1.6 de démontrer que si l'on suppose (ii), $P_{\partial\Omega}$ reproduit les fonctions de $E^q(\Omega)$, $q = p$ ou p', ou encore, si l'on se transporte sur $\mathbf{D}$, que l'on a la formule

(9) $\quad P(g) = g, \quad$ si $g\Psi'^{1/q-1/2}$ appartient à $H^q(\mathbf{D})$.

Mais, pour obtenir (9), il suffit de démontrer que la fonction g appartient à $H^1(\mathbf{D})$; on conclut en vertu de l'inégalité de Hölder parce que en vertu de (ii), $\Psi'^{1-q'/2}$ est une fonction extérieure, intégrable sur $\partial\mathbf{D}$. Ceci démontre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) et par suite, le Lemme 1.5 est entièrement démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. *Soit Ω un domaine de Smirnov dont le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^q(\Omega)$,*

$$q = p \text{ ou } p', p \in]1, +\infty[, p \neq 2.$$

Alors le projecteur de Bergman P_Ω de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^q(\Omega)$.

En vertu des Lemmes 1.1 et 1.5, le Théorème 1.1 est une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. *Soit F une fonction extérieure de l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ telle que $|F(e^{i\theta})|$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A_p(\partial\mathbf{D})$, $1 < p < +\infty$.*

Alors $|F|^2$ appartient à la classe $B_p(\mathbf{D})$.

Démonstration du Théorème 1.2. Il suffit de démontrer qu'il existe une constante C telle que quel que soit le secteur angulaire S de la forme

$$(10) \quad S = S(r_0e^{i\theta_0}) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D}: |r - r_0| < 1 - r_0, \\ |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \pi(1 - r_0)\},$$

où $0 < r_0 < 1$ et $e^{i\theta_0} \in \partial\mathbf{D}$, si l'on désigne par I l'arc de $\partial\mathbf{D}$ défini par

$$I = \bar{S} \cap \partial\mathbf{D} = \{e^{i\theta} \in \partial\mathbf{D}: |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| \leqq \pi(1 - r_0)\},$$

on a :

$$\left(\frac{1}{|S|}\int_S |F|^2 d\lambda\right)^{1/2} \leqq \frac{C}{|I|}\int_I |F| d\sigma$$

et

$$\left(\frac{1}{|S|}\int_S |F|^{-2/(p-1)} d\lambda\right)^{1/2} \leqq \frac{C}{|I|}\int_I |F|^{-1/(p-1)} d\sigma.$$

Mais si l'on remarque que le poids $|F|^{-1/(p-1)}$ appartient à $A_{p'}(\partial\mathbf{D})$ quand $|F|$ est dans $A_p(\partial\mathbf{D})$, on conclut en vertu du lemme suivant :

LEMME 1.7. *Soit f une fonction extérieure de la classe de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ telle que le poids $|f|$ appartient à $A_q(\partial\mathbf{D})$, $1 < q < +\infty$. Il existe une constante C_q telle que quel que soit le secteur S de la forme* (10), *si l'on pose $I = \bar{S} \cap \partial\mathbf{D}$, on a :*

$$\left(\int_S |f|^2 d\lambda\right)^{1/2} \leqq C_q \int_I |f| d\sigma.$$

Démonstration du Lemme 1.7. Nous posons $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. En premier lieu, il est facile de vérifier que quel que soit z dans $S = S(z_0)$, on a

$$|1 - \bar{z}_0 z| \leqq C_1(1 - |z_0|) = C_2|I| = C_3|S^{1/2}|;$$

on obtient ainsi l'inégalité :

$$(11)\quad \frac{1}{|S|^{q/2}}\int_S |f(z)|^2 d\lambda(z) \leqq C_q |I|^q \int_{\mathbf{D}} \frac{|f(z)|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^{2q}} d\lambda(z).$$

On utilise alors le lemme suivant, qui est un cas particulier du Théorème 9.4 de [7] :

LEMME 1.8. *Il existe une constante C telle que quelle que soit la fonction g de $H^1(\mathbf{D})$, on a :*

$$\left(\int_{\mathbf{D}} |g(z)|^2 d\lambda(z)\right)^{1/2} \leqq C \int_0^{2\pi} |g(e^{it})| dt.$$

Ainsi, comme la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{(1 - \bar{z}_0 z)^q}$$

appartient à $H^1(\mathbf{D})$, il découle de (11) et du Lemme 1.8 que l'on a :

$$(12)\quad \frac{1}{|S|^{q/2}}\int_S |f(z)|^2 d\lambda(z) \leqq C_q |I|^q. \left(\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{it})|}{|1 - \bar{z}_0 e^{it}|^q} dt\right)^2.$$

Mais, si pour une fonction φ définie sur $\partial\mathbf{D}$, on désigne par φ^* la fonction maximale de φ définie en (7), on vérifie aisément que pour la fonction caractéristique χ_I de l'arc $I = \bar{S} \cap \partial\mathbf{D}$, on a :

$$(\chi_I)^*(e^{it}) \sim \frac{|I|}{|1 - \bar{z}_0 e^{it}|}$$

et on obtient alors en vertu de (12) et du Lemme 1.4 que

$$\frac{1}{|S|^{q/2}} \int_S |f(z)|^2 d\lambda(z) \leqq \frac{C_q}{|I|^q} \left(\int_I |f(e^{it})| dt \right)^2 :$$

ceci démontre le Lemme 1.7 et par suite, les Théorèmes 1.2 et 1.1 sont démontrés.

Nous allons maintenant démontrer que le réciproque du Théorème 1.1 est fausse en général, même lorsque Ω est un domaine de Smirnov. Dans ce but, nous rappelons quelques définitions.

Nous désignerons par $\mathscr{B}$ la classe de Bloch de $\mathbf{D}$, c'est à dire l'espace quotient par les constantes, des fonctions f holomorphes dans $\mathbf{D}$ qui vérifient l'estimation

$$\|f\|_{\mathscr{B}} = \sup_{z \in \mathbf{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < +\infty.$$

D'autre part, nous désignerons par BMOA($\mathbf{D}$) (resp. par BMOA($\partial\mathbf{D}$)) l'espace quotient par les constantes, des fonctions analytiques dans $\mathbf{D}$ qui sont BMO à l'intérieur de $\mathbf{D}$ (resp. des fonctions $H^1(\mathbf{D})$ qui sont BMO au bord de $\mathbf{D}$). Enfin, nous écrirons BMO($\mathbf{D}$) : (resp. BMO($\partial\mathbf{D}$)) pour BMO à l'intérieur de $\mathbf{D}$ (resp. BMO au bord de $\mathbf{D}$).

En utilisant l'inégalité de John et Nirenberg **[9]**, on démontre le lemme suivant :

LEMME 1.9. *Soit Ω un domaine simplement connexe (resp. un domaine de Jordan à bord rectifiable) du plan complexe; on désigne par Ψ une représentation conforme du disque unité $\mathbf{D}$ sur Ω.*

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *la fonction* $\mathrm{Log}|\Psi'|$ *appartient à* BMO($\mathbf{D}$) (*resp. à* BMO($\partial\mathbf{D}$));

(ii) *il existe un nombre réel p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, tel que $|\Psi'|^{2-p}$ appartient à $B_p(\mathbf{D})$ (resp. $|\Psi'|^{(2-p)/2}$ appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$);*

(iii) *il existe un nombre réel p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, tel que le projecteur de Bergman P_Ω (resp. le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$) de Ω s'étend en projecteur continu de $L^p(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^p(\Omega)$ (resp. en un opérateur continu de $L^p(d\sigma)$ dans la classe de Smirnov $E^p(\Omega)$).*

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) découle de l'inégalité de John et Nirenberg, tandis que l'équivalence entre (ii) et (iii) est donnée par le Lemme 1.1 (resp. par le Lemme 1.6).

Le lemme suivant est bien connu (pour la démonstration, cf. par exemple **[6]**) :

LEMME 1.10. BMOA($\mathbf{D}$) $= \mathscr{B}$.

Nous rappelons ensuite le fait bien connu (voir par exemple [**10**]) que si Ω est un domaine simplement connexe du plan complexe et qu'on désigne par Ψ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω, alors $\log \Psi'$ est une fonction de Bloch; par suite, en vertu des Lemmes 1.9 et 1.10, il existe un nombre réel p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, tel que le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^p(d\lambda)$ sur $A^p(\Omega)$.

Nous utiliserons également le lemme suivant :

LEMME 1.11. *Soit Ω un domaine de Jordan à bord rectifiable et soit Ψ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω. Si de plus, Ω est un domaine de Smirnov, alors la propriété $\log|\Psi'| \in \mathrm{BMO}(\partial\mathbf{D})$ implique*

$$\log \Psi' \in \mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D}).$$

Démonstration. On conclut en vertu du fait bien connu (cf. par exemple [**8**]) qu'une fonction f définie sur $\partial\mathbf{D}$ appartient à $\mathrm{BMO}(\partial\mathbf{D})$ si et seulement si elle peut se mettre sous la forme $f = U + \widetilde{V}$, où U et V sont des fonctions bornées sur $\partial\mathbf{D}$ et $\widetilde{V}$ désigne la fonction conjuguée de V.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3. *Il existe un domaine de Smirnov borné Ω, limité par une courbe de Jordan rectifiable, tel que si l'on désigne par Ψ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω,*

1°) *il existe des valeurs p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, telles que si $q = p$ ou p', la fonction $\Psi'^{(2-q)/2}$ est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$ et par suite, le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω s'étend en un opérateur défini sur $L^q(d\sigma)$;*

2°) *il n'existe aucun p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, pour lequel $P_{\partial\Omega}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(d\sigma)$ dans lui même.*

Remarque. Il découle alors des Théorèmes 1.1 et 1.3 et de la remarque faite après le Lemme 1.10 que pour un domaine de Jordan à bord rectifiable Ω, si l'on désigne par q la variable réelle qui prend les deux valeurs p et p', $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$, le fait que le projecteur de Szegö de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur $E^q(\Omega)$ est une propriété strictement plus forte que le fait que le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur $A^q(\Omega)$.

Démonstration. En vertu des rappels précédents, il suffit de démontrer qu'il existe un domaine de Jordan à bord rectifiable tel que si Ψ désigne une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω,

1°) $\log \Psi'$ appartient à $H^1(\mathbf{D})$ et n'appartient pas à $\mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D})$;

2°) il existe des valeurs de p dans $]1, +\infty]$, $p \neq 2$ telles que $\Psi'^{(2-q)/2}$ est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$, $q = p$ ou p'.

Dans ce but, considérons la fonction holomorphe f définie dans $\mathbf{D}$ par

$$f(z) = -i \log^2\left(\frac{1-z}{2}\right),$$

où l'on prend la détermination du logarithme pour laquelle

$$\operatorname{Im} \log\left(\frac{1-z}{2}\right) = \arg\left(\frac{1-z}{2}\right) \in [0, 2\pi[.$$

Cette fonction f est dans $H^1(\mathbf{D})$ et n'appartient ni à $\mathscr{B}$, ni à BMOA($\partial\mathbf{D}$); d'autre part, sa partie réelle est négative.

On construit ensuite une fonction holomorphe g, subordonnée à f, appartenant à $\mathscr{B} \cap H^1$, mais n'appartenant pas à BMOA($\partial\mathbf{D}$) : pour cette construction, se référer par exemple à [**4**]. Puis, comme g appartient à $\mathscr{B}$, il est bien connu (cf. [**10**]) qui si α est un nombre réel strictement positif assez petit, la fonction Ψ' définie dans $\mathbf{D}$ par

$$\Psi'(z) = \exp[\alpha g(z)]$$

est la dérivée d'une fonction Ψ, holomorphe et univalente dans $\mathbf{D}$ et $\Omega = \Psi(\mathbf{D})$ définit dans $\mathbf{C}$ un domaine de Jordan.

Démontrons ensuite que le bord de Ω est une courbe rectifiable. Pour cela, il suffit de prouver que Ψ' appartient à H^1. On conclut parce que la fonction Ψ' est subordonnée à la fonction

$$\exp\left\{-i\alpha \log^2\left(\frac{1-z}{2}\right)\right\}$$

et cette dernière fonction appartient à H^∞ parce que la partie réelle de $-i\alpha \log^2\left(\frac{1-z}{2}\right)$ est négative; il s'ensuit que Ψ' appartient à H^∞, donc à H^1.

Il reste enfin à démontrer qu'il existe des nombres réels strictement positifs β tels que $\Psi'^{-\beta}$ est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$; pour cela, on vérifie facilement pour conclure que la fonction $\exp[-\beta\alpha f(z)]$, à laquelle cette fonction est subordonnée, est intégrable sur $\partial\mathbf{D}$, lorsque le nombre β est assez petit. Ceci termine la démonstration du Théorème 1.3.

2. Le cas d'une classe de domaines de Lavrent'ev. Dans ce paragraphe, nous allons étudier une classe de domaines que nous désignerons par $\mathscr{C}$. Un élément Ω de cette classe est un domaine de Jordan dont la frontière Γ, de longueur 2π, vérifie deux hypothèses, dont la première est la suivante :

(H1) par sa longueur d'arc $s \in [0, 2\pi]$, Γ possède un paramétrage de la forme

$$C(s) = \int_0^s e^{i\alpha(t)}dt + C(0),$$

où α est une fonction définie sur $[0, 2\pi]$, continue à gauche et limitée à droite; ainsi, sur $]0, 2\pi[$, α peut se mettre sous la forme

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-007-1 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha(s) = \alpha^C(s) + \sum_{\xi \in]0,s[} \Delta\alpha(\xi),$$

où α^C est une fonction continue sur $]0, 2\pi[$, $\Delta\alpha(\xi) = \alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi)$ et $|\Delta\alpha(\xi)| \leqq \pi$, quel que soit ξ dans $]0, 2\pi[$. On supposera que $C(s)$ parcourt Γ dans le sens trigonométrique lorsqu'on fait croître s dans $[0, 2\pi]$.

La seconde hypothèse sur Γ s'énonce comme suit :

(H2) (i) quel que soit ξ dans $]0, 2\pi[$, on a $|\Delta\alpha(\xi)| < \pi$;

(ii) on a

$$\sum_{\xi \in]0,2\pi[} |\Delta\alpha(\xi)| < +\infty;$$

(iii) si l'on pose $\Delta\alpha(2\pi) = \alpha(0^+) - \alpha(2\pi)$, on a $\Delta\alpha(2\pi) = -2\pi$.

L'hypothèse (H2) (i) entraîne que $\Gamma \backslash \{C(0) = C(2\pi)\}$ ne comporte pas de point de rebroussement, tandis que les hypothèses (H2)(ii) et (iii) impliquent que, comme dans le cas des courbes $\mathscr{C}^1$ par morceaux, Γ est une courbe $\mathscr{C}^1$ en $C(0) = C(2\pi)$.

En fait, dans la suite, nous utiliserons plutôt le paramétrage de Γ par le cercle unité T, défini par le changement de paramètre

$$s \in [0, 2\pi] \mapsto e^{is} \in T;$$

ce nouveau paramétrage de Γ est donné par

$$\gamma : z \in T \mapsto \gamma(z) = \int_{[1,z]} e^{i\tau(w)} dw + \gamma(1) \in \Gamma, \quad \text{où}$$
$$[1, z] = \{e^{i\varphi} : 0 \leqq \varphi \leqq \theta\}$$

si l'on pose $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta \leqq 2\pi$ et τ est la fonction définie sur T par

$$\tau(w) = \alpha(s) - s + \pi/2 \quad \text{si } w = e^{is}, s \in]0, 2\pi[,$$
$$\tau(1) = \alpha(2\pi) - 3\pi/2.$$

Ainsi, sur T, τ est une fonction continue à gauche et limitée à droite (dans le sens trigonométrique) qui peut se mettre sous la forme

$$\tau(z) = \tau^C(z) + \sum_{u \in]1,z[} \Delta\tau(u), \quad \text{où}$$

$$\Delta\tau(u) = \tau(u + 0) - \tau(u) \in]-\pi, \pi[\quad \text{et}$$
$$]1, z[= \{e^{i\varphi} : 0 < \varphi < \theta\}$$

lorsque $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta \leqq 2\pi$. De plus, on remarquera que la fonction τ est continue en 1.

Nous désignerons par Ψ une représentation conforme du disque unité $\mathbf{D}$ sur Ω qui vérifie $\Psi(1) = \gamma(1)$ et telle que l'application $\gamma^{-1} \circ \Psi$ conserve l'orientation de $\partial\mathbf{D}$. Ensuite, pour $\epsilon \in]0, 2\pi[$, nous définissons une fonction F_ϵ, holomorphe dans $\mathbf{D}$ et continue dans $\overline{\mathbf{D}}$, en posant :

$$F_\epsilon(z) = \frac{\Psi(ze^{i\epsilon}) - \Psi(z)}{ze^{i\epsilon} - z}, \quad z \in \overline{\mathbf{D}};$$

cette fonction ne s'annule nulle part dans $\overline{\mathbf{D}}$ et on remarque que quel que soit z dans $\mathbf{D}$, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(z) = \Psi'(z).$$

Nous définissons par ailleurs la fonction $\arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)$ sur $\partial\mathbf{D}$ de la façon suivante : si $\Psi(e^{it}) = \gamma(e^{is})$, $s \in]0, 2\pi]$, nous posons

$$\arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) = s;$$

ceci implique en particulier que

$$\arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(1) = 2\pi.$$

Enfin, nous poserons :

$$\rho = \sup_{u \in T} |\Delta\tau(u)|;$$

en vertu des hypothèses, on a $\rho < \pi$.

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.1. *Soit Ω un domaine de la classe $\mathcal{C}$. Quel que soit le nombre réel η vérifiant* $0 < \eta < (\pi - \rho)/10$, *il existe un nombre réel strictement positif ϵ_0 et un choix de déterminations continues* $\{\arg F_\epsilon\}_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ *de l'argument des fonctions F_ϵ dans $\overline{\mathbf{D}}$ tels que*

1°) *quel que soit ϵ dans* $]0, \epsilon_0[$ *et quel que soit e^{it} sur* $\partial\mathbf{D}$, $0 < t \leqq 2\pi$, *on a* :

$$|\arg F_\epsilon(e^{it}) - \tau(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) + t - \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it})| < \pi - 6\eta;$$

2°) *si e^{it}*, $0 < t \leqq 2\pi$, *est un point de $\partial\mathbf{D}$ où la fonction $\tau \circ \gamma^{-1} \circ \Psi$ est continue, il existe un nombre réel strictement positif $\epsilon(t)$ tel que si* $0 < \epsilon < \epsilon(t)$, *on a* :

$$|\arg F_\epsilon(e^{it}) - \tau(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) + t - \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it})| < 4\eta.$$

Démonstration. En vertu de l'hypothèse (H2) (ii) sur Γ, il existe dans $]0, 2\pi[$ une suite croissante et finie $\{t_j\}_{j=1}^N$ telle que si l'on pose

$$z_j = (\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it_j}),$$

on a :

$$(17) \quad \sum_{z \neq z_j} |\Delta\tau(z)| < \eta.$$

Pour la partie 1°) du lemme, on choisira ϵ_0 de telle sorte que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, on a :

(a) $|e^{it_j} - e^{it_{j+1}}| < |e^{it_j} - e^{i(t_{j+2}-\epsilon)}|$ si $j = 1, \dots, N - 2$,

$$|e^{it_{N-1}} - e^{it_N}| < |e^{it_{N-1}} - e^{i(t_1-\epsilon)}|$$

et

$$|e^{it_N} - e^{it_1}| < |e^{it_N} - e^{i(t_2-\epsilon)}|;$$

(b) sur chaque arc T_δ, $\delta > 0$, de $\partial\mathbf{D}$, de la forme

$$T_\delta = \{e^{i\theta} \in \partial\mathbf{D}: \delta \leqq \theta \leqq 2\pi - \delta\},$$

si e^{it} et $e^{it'}$ sont deux points de T_δ et qu'on désigne par $I(e^{it}, e^{it'})$ l'arc joignant e^{it} à $e^{it'}$ dans T_δ, l'hypothèse

$$|I(e^{it}, e^{it'})| < \epsilon$$

entraîne

$$|\arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) - \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it'})| < \eta$$

et

$$|\tau^C(e^{it}) - \tau^C(e^{it'})| < \eta;$$

(c) en vue du choix de $\arg F_\epsilon$, on choisit l'argument du terme $e^{i\epsilon} - 1$ du dénominateur de F_ϵ de telle sorte que l'hypothèse $0 < \epsilon < \epsilon_0$ implique

$$\pi/2 - \eta < \arg(e^{i\epsilon} - 1) < \pi/2 + \eta.$$

Démontrons maintenant la partie 1°) du lemme. Nous désignons par I_j, $j = 1, \dots, N$, les intervalles

$$I_j =]e^{it_j}, e^{i(t_{j+2}-\epsilon)}] \quad \text{si } j = 1, \dots, N - 2,$$

$$I_{N-1} =]e^{it_{N-1}}, e^{i(t_1-\epsilon)}]$$

et

$$I_N =]e^{it_N}, e^{i(t_2-\epsilon)}];$$

on vérifiera aisément en utilisant la condition (a) sur ϵ_0 que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, on a :

$$\bigcup_{j=1}^{N} I_j = \partial\mathbf{D}.$$

On remarquera que l'on a :

$$(18) \quad F_\epsilon(e^{it}) = \frac{i}{e^{i\epsilon} - 1} \int_{\arg(\gamma^{-1}\circ\Psi)(e^{it})}^{\arg(\gamma^{-1}\circ\Psi)(e^{i(t+\epsilon)})} e^{i[\tau(e^{i\theta}) - t + \theta]} d\theta,$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$, et on désignera par $\arg F_\epsilon$ une détermination continue de l'argument de F_ϵ.

Maintenant, si l'on désigne par $\alpha_\epsilon(e^{it})$ la fonction dont le module figure au premier membre de l'inégalité à démontrer, on démontre facilement en utilisant les conditions (a), (b) et (c) sur ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, et l'expression (18) de $F_\epsilon(e^{it})$ que quel que soit $j = 1, \ldots, N$, il existe un entier m_j tel que quel que soit e^{it} sur I_j, on a :

$$-4\eta < \alpha_\epsilon(e^{it}) + 2m_j\pi < \Delta\tau(z_{j+1}) + 4\eta < \pi - 6\eta$$

quand $\Delta\tau(z_{j+1})$ est positif, ou bien

$$-\pi + 6\eta < \Delta\tau(z_{j+1}) - 4\eta < \alpha_\epsilon(e^{it}) + 2m_j\pi < 4\eta$$

quand $\Delta\tau(z_{j+1})$ est négatif. On conclut alors que $m_1 = \ldots = m_N$, parce que les intervalles I_j se recoupent : ceci démontre la partie 1°) du lemme.

Démontrons ensuite la partie 2°). Soit e^{it} un point de $\partial\mathbf{D}$ où la fonction $\tau \circ \gamma^{-1} \circ \Psi$ est continue; on choisit le nombre réel strictement positif $\epsilon(t)$ inférieur à ϵ_0 et tel qu'il n'y ait aucun point de la suite $\{z_j\}$ définie en (17) dans l'arc de $\partial\mathbf{D}$ joignant $(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it})$ à $(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{i(t+\epsilon(t))})$ dans le sens trigonométrique.

On obtient alors en raisonnant comme dans la démonstration de la partie 1°) que quel que soit ϵ dans $]0, \epsilon(t)[$, on a :

$$|\arg F_\epsilon(e^{it}) - \tau(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) + t - \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it})| < 4\eta.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 2.1.

Maintenant, si l'on rappelle que le nombre η de l'énoncé du Lemme 2.1 peut être choisi arbitrairement petit, on déduit de la partie 2°) de ce lemme le corollaire suivant :

COROLLAIRE. 1°) *Il existe un nombre réel strictement positif* ϵ_0 *et un choix de déterminations continues* $\{\arg F_\epsilon\}_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ *de l'argument des fonctions* F_ϵ *dans* $\overline{\mathbf{D}}$ *tels que, en tout point* e^{it} *de* $\partial\mathbf{D}$ *où la fonction* $\tau \circ \gamma^{-1} \circ \Psi$ *est continue, la limite de* $\arg F_\epsilon(e^{it})$ *existe quand* ϵ *tend vers zéro*, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *et est égale à*

$$\beta(e^{it}) = \tau(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}) - t + \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{it}), \text{ où } 0 < t \leqq 2\pi.$$

2°) *Il existe une détermination harmonique* $\arg \Psi'$ *de l'argument de* Ψ' *dans* $\mathbf{D}$ *telle que la fonction* $\arg \Psi'(e^{it})$ *définie sur* $\partial\mathbf{D}$ *par les valeurs au bord de* $\arg \Psi'$ *est égale à* $\beta(e^{it})$.

Démonstration. La partie 1°) est une conséquence immédiate de la partie 2°) du Lemme 2.1.

Démontrons la partie 2°). Dans l'égalité

$$(19) \quad \arg F_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} \arg F_\epsilon(e^{it})dt, \quad z \in \mathbf{D},$$

quand on fait tendre ϵ vers zéro, on peut, en vertu de la partie 1°) du Lemme 2.1, appliquer le théorème de convergence dominée au second membre; comme l'ensemble des points de discontinuité de $\tau \circ \gamma^{-1} \circ \Psi$ est dénombrable, on obtient alors en vertu de la partie 1°) que l'on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \arg F_\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} \beta(e^{it}) dt.$$

Il s'ensuit que lorsque ϵ tend vers zéro, $\log F_\epsilon$ converge dans $\mathbf{D}$ vers une limite qui est nécessairement une détermination holomorphe $\log \Psi'$ du logarithme de Ψ' dans $\mathbf{D}$: le corollaire est de ce fait démontré.

Remarque. Dans le cas où Γ est une courbe $\mathscr{C}^1$, la partie 2°) du corollaire précédent est bien connue (cf. par exemple [**10**]).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soit Ω un domaine de la classe $\mathscr{C}$. Quel que soit p dans $]1, +\infty[$, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1°) *le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^q(\Omega)$, $q = p$ ou p';*

2°) *le projecteur de Bergman P_Ω de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^q(\Omega)$, $q = p$ ou p';*

3°) *quel que soit e^{it} sur le cercle unité T, on a* :

$$-2 < \Delta\tau(e^{it})(p - 2)/\pi < 2(p - 1).$$

Remarques. 1°) En vertu d'un résultat de C. Pommerenke [**11**], on démontre que tout élément Ω de $\mathscr{C}$ est un domaine de Smirnov et que la fonction $\log \Psi'$ appartient à BMOA($\partial\mathbf{D}$) : en effet, la frontière Γ de Ω satisfait la condition corde-arc de Lavrent'ev, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que quels que soient deux points z_1 et z_2 de Γ, on a l'inégalité :

$$(20) \qquad l(z_1, z_2) \leqq C|z_1 - z_2|,$$

où $l(z_1, z_2)$ désigne la longueur du plus petit des deux arcs de Γ qui joignent z_1 à z_2. La dénomination "domaine de Lavrent'ev" utilisée dans le titre de ce paragraphe désigne un domaine simplement connexe dont la frontière satisfait précisément la condition (20).

2°) A. A. Solov'ev ([**13**] et [**14**]) a démontré le théorème précédent dans les deux cas particuliers suivants : a) Γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux; b) Γ est convexe. Dans ce dernier cas, cet auteur a établi que le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^p(d\lambda)$ sur $A^p(\Omega)$ (resp. de $L^p(d\sigma)$ sur $E^p(\Omega)$), quel que soit p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$; nous démontrerons plus loin un résultat meilleur.

Démonstration. En vertu de la remarque 1°) et des Lemmes 1.2 et 1.6, il suffit de démontrer que dans un domaine Ω de la classe $\mathscr{C}$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $-2 < \Delta\tau(e^{it})(p - 2)/\pi < 2(p - 1)$,
quel que soit e^{it} sur $\partial\mathbf{D}$;

(ii) $|\Psi'|^{2-p} \in B_p(\mathbf{D})$;

(iii) $|\Psi'|^{(2-p)/2} \in A_p(\partial\mathbf{D})$.

Ici, comme Ψ' est une fonction extérieure de l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ il découle du Théorème 1.2 que (iii) implique (ii); il suffit alors pour conclure de prouver que (i) $\rightarrow$ (iii) et (ii) $\rightarrow$ (i).

Démontrons d'abord que (i) implique (iii). Comme log Ψ' est une fonction de $H^1(\mathbf{D})$, on obtient en vertu de la partie 2°) du corollaire du Lemme 2.1 que

$$\log|\Psi'(e^{i\theta})| = -\tilde{\beta}(e^{i\theta}),$$

où $\tilde{\beta}(e^{i\theta})$ désigne la fonction conjuguée de

$$\beta(e^{i\theta}) = (\tau \circ \gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{i\theta}) - \theta + \arg(\gamma^{-1} \circ \Psi)(e^{i\theta}),\ \theta \in]0, 2\pi].$$

Il s'agit maintenant de démontrer que le poids

$$\exp\{ (p - 2)\tilde{\beta}(e^{i\theta})/2\}$$

appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$ quand on suppose (i). Pour cela, remarquons que la fonction β est continue à gauche et limitée à droite (dans le sens trigonométrique) et que les points de discontinuité de β sont les images par $\Psi^{-1} \circ \gamma$ de ceux de τ, avec les même sauts; en particulier, la fonction β est continue en 1. De plus, nous poserons :

$$\Delta\beta(e^{it}) = \beta(e^{i(t+0)}) - \beta(e^{it}).$$

Maintenant, soit η un nombre réel strictement positif inférieur à $(\pi - \rho)/10$. Comme

$$\sum |\Delta\beta(e^{it})| < +\infty,$$

il existe sur $\partial\mathbf{D}$ une suite finie

$$\{e^{i\theta_j}\}_{j=1}^{N}, \quad 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_N < 2\pi,$$

telle que

$$\sum_{\zeta \neq e^{i\theta_j}} |\Delta\beta(\zeta)| < \eta.$$

Nous utiliserons l'égalité $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, où pour θ dans $[0, 2\pi]$, on a :

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-007-1 Published online by Cambridge University Press

$$\beta_1(e^{i\theta}) = \beta(e^{i\theta}) + \sum_{\{t\in]0,2\pi[:0\leqq\theta<t\}} \theta\frac{\Delta\beta(e^{it})}{2t}$$

$$- \sum_{\{t\in]0,2\pi[:t\leqq\theta\leqq 2\pi\}} (2\pi - \theta)\frac{\Delta\beta(e^{it})}{2(2\pi - t)},$$

$$\beta_2(e^{i\theta}) = - \sum_{\{j=1,\ldots,N:0\leqq\theta<\theta_j\}} \theta\frac{\Delta\beta(e^{i\theta_j})}{2\theta_j}$$

$$+ \sum_{\{j=1,\ldots,N:\theta_j\leqq\theta\leqq 2\pi\}} (2\pi - \theta)\frac{\Delta\beta(e^{i\theta_j})}{2(2\pi - \theta_j)}$$

et

$$|\beta_3(e^{i\theta})| \leqq C \sum_{\{t\in]0,2\pi[:t\neq\theta_j\}} |\Delta\beta(e^{it})| < C'\eta.$$

Nous obtenons ainsi que

$$\|\widetilde{\beta}_3\|_{\mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D})} \leqq C\eta;$$

d'autre part, en remarquant que β_1 est continu sur $\partial\mathbf{D}$, nous déduisons que la fonction $\widetilde{\beta}_1$ appartient à VMO($\partial\mathbf{D}$) (pour la définition de VMO, cf. [**12**]). Ainsi, en vertu de l'inégalité de John et Nirenberg, quel que soit q dans $]1, +\infty[$, si l'on choisit η assez petit, on obtient que le poids

$$\exp\{ (p - 2)q(\widetilde{\beta}_1 + \widetilde{\beta}_3)(e^{i\theta})/2\}$$

appartient à la classe $A_p(\partial\mathbf{D})$.

Maintenant, en vertu de l'inégalité de Hölder, il suffit pour conclure de démontrer que pour une valeur de p_1 dans $]1, +\infty[$, assez proche de 1, le poids

$$\exp\{ (p - 2)p_1\widetilde{\beta}_2(e^{i\theta})/2\}$$

appartient également à $A_p(\partial\mathbf{D})$. Dans ce but, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME 2.2. *Il existe une constante C telle que quel que soit $e^{i\theta}$ sur $\partial\mathbf{D}$, on a :*

$$\widetilde{\beta}_2(e^{i\theta}) = \log\left\{\prod_{j=1}^{N} \left|\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)\right|^{\Delta\beta(e^{i\theta_j})/\pi}\right\} + \epsilon(e^{i\theta}),$$

où $|\epsilon(e^{i\theta})| \leqq C.$

Démonstration du Lemme 2.2. On utilise la formule :

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-007-1 Published online by Cambridge University Press

$$\widetilde{\beta}_2(e^{i\theta}) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} 1/\pi \int_{\epsilon<|\theta-\varphi|<\pi} \frac{\beta_2(e^{i\varphi})}{2tg\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)} d\varphi$$

et on conclut en intégrant par parties le second membre précédent : la fonction

$$\log\left\{\prod_{j=1}^{N}\left|\sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)\right|^{\Delta\beta(e^{i\theta_j})/\pi}\right\}$$

provient alors des termes tout intégrés, tandis que le reste donne lieu à la fonction bornée $\epsilon(e^{i\theta})$.

Revenons à la démonstration de l'implication (i) $\rightarrow$ (iii). En vertu du Lemme 2.2, il suffit maintenant de démontrer que si l'on choisit p_1 dans $]1, +\infty[$, assez proche de 1, le poids

$$\prod_{j=1}^{N}\left|\sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)\right|^{\Delta\beta(e^{i\theta_j})(p-2)p_1/2\pi}$$

appartient à $A_p(\partial\mathbf{D})$: ceci est immédiat quand on suppose (i).

Démontrons enfin que (ii) implique (i). Si l'on rappelle que $\log \Psi'$ appartient à $H^1(\mathbf{D})$ et qu'on désigne par $\beta_2(z)$ et $\widetilde{\beta}_2(z)$, $z \in \mathbf{D}$, les intégrales de Poisson respectives des fonctions $\beta_2(e^{it})$ et $\widetilde{\beta}_2(e^{it})$ définies ci-dessus, on obtient en reprenant le raisonnement précédent que le poids $|\Psi'|^{2-p}$ appartient à $B_p(\mathbf{D})$ si et seulement s'il en est de même pour $\exp\{(p-2)\widetilde{\beta}_2(z)\}$.

Ensuite, comme pour le Lemme 2.2, on démontre que quel que soit z dans $\mathbf{D}$, on a :

$$\widetilde{\beta}_2(z) = \log\left\{\prod_{j=1}^{N}|e^{i\theta_j}-z|^{\Delta\beta(e^{i\theta_j})/\pi}\right\} + \epsilon(z),$$

où $\epsilon(z)$ désigne une fonction bornée dans $\mathbf{D}$. Il s'ensuit que $|\Psi'|^{2-p}$ appartient à $B_p(\mathbf{D})$ si et seulement s'il en est de même pour

$$\prod_{j=1}^{N}|e^{i\theta_j}-z|^{(p-2)\Delta\beta(e^{i\theta_j})/\pi};$$

il est alors facile de vérifier que (ii) implique (i) : ceci achève la démonstration du Théorème 2.1.

3. Le cas des domaines convexes bornés. En premier lieu, on remarquera que tout domaine convexe borné Ω appartient à la classe $\mathscr{C}$ définie au paragraphe 2; de plus, il résulte du Théorème 2.1 que le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^p(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^p(\Omega)$ (resp. de $L^p(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^p(\Omega)$), quel que soit p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$: ce résultat a été obtenu par A. A. Solov'ev (**[13]** et **[14]**). Dans ce paragraphe, nous allons démontrer un résultat meilleur; auparavant, introduisons quelques définitions.

Tout d'abord, si l'on désigne par Ψ une représentation conforme de **D** sur Ω, il est facile de vérifier que le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ (resp. le projecteur de Bergman P_Ω) de Ω s'étend en un opérateur défini sur $L^1(d\sigma)$ (resp. sur $L^1(d\lambda)$) s'il existe une constante strictement positive C telle que $|\Psi'| \geqq C$.

Dans ce cas, si l'on désigne par π_r, $0 < r < 1$, la projection de $\partial\Omega$ sur la courbe

$$\Gamma_r = \Psi(\{z \in \mathbf{D}:|z| = r\}) \subset \Omega,$$

définie par

$$\pi_r(w) = \Psi(r\Psi^{-1}(w)), \quad w \in \Omega,$$

on dira que le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$ de Ω s'étend à $L^1(d\sigma)$ en un opérateur de type faible (1, 1) s'il existe une constante C telle que quel que soit $\alpha > 0$, on a :

$$(21) \quad \sigma(\{w \in \partial\Omega: \sup_{0<r<1} |P_{\partial\Omega}f(\pi_r(w))| > \alpha\}) \leqq C/\alpha \int_{\partial\Omega} |f| d\sigma.$$

De même, on dira que le projecteur de Bergman P_Ω de Ω s'étend à $L^1(d\lambda)$ en un opérateur de type faible (1, 1) s'il existe une constante C telle que quel que soit $\alpha > 0$, on a :

$$(22) \quad \lambda(\{w \in \Omega:|P_\Omega f(w)| > \alpha\}) \leqq C/\alpha \int_\Omega |f| d\lambda.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit Ω un domaine convexe borné.*

Le projecteur de Bergman P_Ω (resp. le projecteur de Szegö $P_{\partial\Omega}$) de Ω s'étend à $L^1(d\lambda)$ (resp. à $L^1(d\sigma)$)

1°) *en un opérateur qui reproduit la classe de Bergman $A^1(\Omega)$ (resp. la classe de Smirnov $E^1(\Omega)$),*

2°) *en un opérateur de type faible* (1, 1).

Remarque. En utilisant le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, on déduit de la partie 2°) du Théorème 3.1 le corollaire suivant qui améliore le résultat du Théorème 2.1 pour les domaines convexes bornés :

COROLLAIRE 1. *Soit Ω un domaine convexe borné. Il existe une constante C telle que quel que soit p dans $]1, +\infty[$, $p \neq 2$, le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^p(d\lambda)$ sur $A^p(\Omega)$ (resp. de $L^p(d\sigma)$ sur $E^p(\Omega)$) de norme inférieure à C.*

Pour la démonstration du Théorème 3.1, nous introduisons les classes de poids $A_1(\mathbf{D})$, $B_1(\mathbf{D})$ et $A_1(\partial\mathbf{D})$.

Une fonction positive ω définie dans $\mathbf{D}$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A_1(\mathbf{D})$ si, quel que soit z dans $\mathbf{D}$, on a

$$M\omega(z) \leqq C\omega(z),$$

où $M\omega$ désigne la fonction maximale (de Hardy-Littlewood) de ω définie par

$$M\omega(z) = \sup_S \frac{1}{|S|} \int_S \omega d\lambda,$$

le sup portant sur tous les secteurs angulaires S de la forme (3), centrés en z.

Par ailleurs, nous dirons que la fonction ω appartient à la classe $B_1(\mathbf{D})$ si, quel que soit z dans $\mathbf{D}$, on a :

$$m\omega(z) \leqq C\omega(z),$$

où

$$m\omega(z) = \sup_S \frac{1}{|S|} \int_S \omega d\lambda,$$

le sup portant cette fois sur tous les secteurs angulaires $S = S(z, R)$ de la forme (3), ce centre z et tels que $R \geqq 1 - |z|$.

Ainsi, la classe $B_1(\mathbf{D})$ contient strictement la classe $A_1(\mathbf{D})$; néanmoins, comme pour les classes $A_p(\mathbf{D})$ et $B_p(\mathbf{D})$ (Lemme 1.1), si F est une fonction holomorphe dans $\mathbf{D}$ qui ne s'annule nulle part, les propriétés $|F| \in B_1(\mathbf{D})$ et $|F| \in A_1(\mathbf{D})$ sont équivalentes.

Enfin, une fonction positive ω, définie sur $\partial\mathbf{D}$, appartient à la classe de Muckenhoupt $A_1(\partial\mathbf{D})$ si $\omega^* \leqq C\omega$, où ω^* est la fonction maximale de ω définie en (7).

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 3.1. *Soit Ω un domaine de Jordan à bord rectifiable tel que, si l'on désigne par Ψ une représentation conforme de* $\mathbf{D}$ *sur Ω, le poids $|\Psi'|^2$ (resp. $|\Psi'|$) appartient à la classe $B_1(\mathbf{D})$ (resp. à la classe $A_1(\partial\mathbf{D})$).*

Alors P_Ω (resp. $P_{\partial\Omega}$) s'étend à $L^1(d\lambda)$ (resp. à $L^1(d\sigma)$) en un opérateur de type faible (1, 1).

Démonstration. On remarque d'abord que si $|\Psi'|^2$ (resp. $|\Psi'|$) appartient à $B_1(\mathbf{D})$ (resp. à $A_1(\partial\mathbf{D})$), il existe une constante strictement positive C telle que $|\Psi'| \geqq C$ dans $\mathbf{D}$ (resp. sur $\partial\mathbf{D}$) : il s'ensuit que dans ce cas, P_Ω (resp. $P_{\partial\Omega}$) s'étend en un opérateur défini sur $L^1(d\lambda)$ (resp. sur $L^1(d\sigma)$).

Maintenant, si l'on se transporte sur $\mathbf{D}$ par Ψ^{-1}, la conclusion du lemme est équivalente au fait que si l'on désigne par $P_{\mathbf{D}}$ (resp. par $P_{\partial\mathbf{D}}$) le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de $\mathbf{D}$, il existe une constante C telle que quel que soit $\alpha > 0$, on a :

$$\int_{\{z\in\mathbf{D}:|P_{\mathbf{D}}g(z)||\Psi'(z)|^{-1}>\alpha\}} |\Psi'(z)|^2 d\lambda(z)$$

$$\leqq C/\alpha \int_{\mathbf{D}} |g(z)||\Psi'(z)|d\lambda(z)$$

(resp.

$$\int_{\{e^{i\theta}\in\partial\mathbf{D}:|\Psi'(e^{i\theta})|^{-1/2}\sup_{0<r<1}|P_{\partial\mathbf{D}}g(re^{i\theta})|>\alpha\}} |\Psi'(e^{i\theta})|d\theta$$

$$\leqq C/\alpha \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})||\Psi'(e^{i\theta})|d\theta.)$$

Le lemme se déduit alors de résultats de **[2]** et d'inégalités à poids démontrées en appendice dans **[3]**.

Nous démontrons ensuite l'analogue $p = 1$ du Théorème 1.2 :

PROPOSITION 3.1. *Soit F une fonction extérieure de l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ telle que le poids $|F|$ appartient à la classe de Muckenhoupt $A_1(\partial\mathbf{D})$. Alors $|F|^2$ appartient à la classe $B_1(\mathbf{D})$.*

Démonstration. Il est bien connu que la classe $A_1(\partial\mathbf{D})$ est contenue dans l'intersection des classes $A_p(\partial\mathbf{D})$, $1 < p < +\infty$. Ainsi, soit z un point de $\mathbf{D}$; il découle du Lemme 1.8 que quel que soit le secteur angulaire $S = S(z, R)$ de la forme (3), de centre z et tel que $R \geqq 1 - |z|$, si l'on pose $I = \bar{S} \cap \partial\mathbf{D}$, on a :

$$\left(\frac{1}{|S|}\int_S |F|^2 d\lambda\right)^{1/2} \leqq \frac{|C}{|I|}\int_I |F|d\sigma$$

$$\leqq C \inf_{e^{it}\in I} |F(e^{it})|,$$

où cette dernière inégalité découle de l'appartenance de $|F|$ à $A_1(\partial\mathbf{D})$.

De plus, si l'on pose $z = re^{i\theta}$ et qu'on désigne par I_z l'arc de $\partial\mathbf{D}$ centré en $e^{i\theta}$ et de longueur $2\pi(1 - r)$, I_z est contenu dans I et quel que soit le nombre réel strictement positif δ, on a :

$$\inf_{e^{it}\in I} |F(e^{it})| \leqq \left(\frac{1}{|I_z|}\int_{I_z} |F|^\delta d\sigma\right)^{1/\delta}.$$

Maintenant, comme la fonction $f = \log F$ appartient à $\mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D})$, on conclut en vertu du lemme suivant, démontré dans **[11]** :

LEMME 3.2. *Pour $f \in \mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D})$, il existe un nombre réel strictement positif δ pour lequel il existe une constante C telle que quel que soit z dans $\mathbf{D}$, on a :*

$$\frac{1}{|I_z|}\int_{I_z}\exp(\delta\ \mathrm{Re}\, f)d\sigma \leqq C\exp(\delta\ \mathrm{Re}\, f(z)).$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.1.

On déduit alors du Lemme 3.1 et de la Proposition 3.1 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. *Dans un domaine de Smirnov* Ω, *si* $P_{\partial\Omega}$ *s'étend à* $L^1(d\sigma)$ *en un opérateur de type faible* (1, 1), *il en est de même pour* P_Ω *sur* $L^1(d\lambda)$.

Maintenant, pour établir la partie 2°) du Théorème 3.1, il suffit de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. *Soit* Ω *un domaine convexe borné. Si l'on désigne par* Ψ *une représentation conforme de* $\mathbf{D}$ *sur* Ω, *alors* Ψ' *est une fonction extérieure de l'espace de Hardy* $H^1(\mathbf{D})$ *et le poids* $|\Psi'|$ *appartient à la classe de Muckenhoupt* $A_1(\partial\mathbf{D})$.

Démonstration. Le fait que Ψ' est une fonction extérieure de $\mathrm{H}^1(\mathbf{D})$ découle de l'appartenance de Ω à la classe $\mathscr{C}$ définie au paragraphe 2. Il reste alors à démontrer que le poids $|\Psi'|$ appartient à $A_1(\partial\mathbf{D})$.

En effet, soit $e^{i\theta}$ un point de $\partial\mathbf{D}$ et soit I un arc de $\partial\mathbf{D}$ centré en $e^{i\theta}$; posons $|I| = 2\pi R$ et désignons par z_I le point de $\mathbf{D}$ défini par

$$z_I = (1 - R)e^{i\theta}.$$

Comme la courbe $\partial\Omega$ vérifie la condition corde-arc de Lavrent'ev, on obtient en vertu d'un lemme de C. Pommerenke **[11]** que

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\Psi'|d\sigma \leqq C|\Psi'(z_I)|.$$

On conclut ensuite en vertu du lemme suivant :

LEMME 3.3. *Soit* Ω *du domaine convexe borné. Si l'on désigne par* Ψ *une représentation conforme de* $\mathbf{D}$ *sur* Ω, *l'application*

$$r \in [0, 1[\rightarrow r|\Psi'(re^{i\theta})|,$$

où le point $e^{i\theta}$ *de* $\partial\mathbf{D}$ *est fixé, est croissante.*

Le Lemme 3.3 est bien connu; par exemple, il est démontré dans **[10]**, p. 46, sous la forme équivalente suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ \mathrm{Im}\ \log(re^{i\theta}\Psi'(re^{i\theta})) > 0.$$

Ainsi, la partie 2°) du Théorème 3.1 est démontrée. Démontrons maintenant la partie 1°). Il s'agit de prouver que quelle que soit la fonction f de $A^1(\Omega)$ (resp. la fonction f de $E^1(\Omega)$), on a :

$$P_\Omega(f) = f \quad (\text{resp. } P_{\partial\Omega}(f) = f);$$

ceci se ramène à démontrer que le projecteur de Bergman (resp. le projecteur de Szegö) de $\mathbf{D}$ reproduit la fonction $(f \circ \Psi)\Psi'$ (resp. la fonction $(f \circ \Psi)\Psi'^{1/2}$). En fait, il suffit pour conclure de prouver que $(f \circ \Psi)\Psi'$ est intégrable dans $\mathbf{D}$ (resp. $(f \circ \Psi)\Psi'^{1/2}$ appartient à $H^1(\mathbf{D})$). Ceci découle d'une part du fait que $(f \circ \Psi)\Psi'^2$ est intégrable dans $\mathbf{D}$ parce que f appartient à $A^1(\Omega)$ (resp. $(f \circ \Psi)\Psi'$ est dans $H^1(\mathbf{D})$ parce que f appartient à $E^1(\Omega)$), d'autre part du fait qu'il existe une constante strictement positive C telle que $|\Psi'| \geqq C$, en raison de l'appartenance de $|\Psi'|$ à $A_1(\partial\mathbf{D})$, établie dans la Proposition 3.2 : ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.

Remarque finale. Dans les hypothèses (H1) et (H2) faites au début du paragraphe 2 sur la frontière Γ d'un domaine Ω de la classe $\mathscr{C}$, nous avons exclu la présence de points de rebroussement. En fait, sous certaines conditions, le Théorème 2.1 est encore vérifié lorsqu'on admet que dans l'hypothèse (H2) (i) sur Γ, $\Delta\alpha$ peut également prendre les deux valeurs $\pm\pi$ en un nombre fini de points $s_1, \dots, s_n$ de $]0, 2\pi[$: c'est le cas par exemple, lorsque Γ est une courbe analytique par morceaux (cf. [**16**]).

Pour décrire d'autres domaines qui illustrent cette remarque, nous dirons qu'un domaine Ω est convexe dans une direction donnée (Δ) au voisinage d'un point w de $\partial\Omega$ s'il existe un voisinage V de w qui possède la propriété suivante : si une droite L de direction (Δ) a une intersection non vide avec $V \cap \Omega$, alors cette intersection est un intervalle. Dans le cas où V contient Ω, on dit que le domaine Ω est convexe dans la direction (Δ); à ce sujet, on trouvera dans [**10**] une étude des domaines convexes dans la direction de l'axe imaginaire de $\mathbf{C}$.

Soit Ω un domaine de Jordan dont la frontière Γ, de longueur 2π, possède un paramétrage par le cercle unité T (défini au paragraphe 2 à partir du paramétrage par la longueur d'arc $s \in [0, 2\pi]$) de la forme

$$\gamma : z \in T \mapsto \gamma(z) = \int_{[1, z]} e^{i\tau(\zeta)} d\zeta + \gamma(1),$$

où τ est une fonction continue sur $T \backslash \{z_0\}$ $z_0 = e^{i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < 2\pi$, qui admet une limite à gauche et à droite (dans le sens trigonométrique) en z_0 et dont le saut

$$\Delta\tau(z_0) = \tau(z_0^+) - \tau(z_0^-)$$

est égale à l'une des deux valeurs $\pm\pi$.

Si l'on se réfère par exemple à [**15**], on démontre qu'un tel domaine Ω est un domaine de Smirnov et la fonction $\log \Psi'$ appartient à $\mathrm{BMOA}(\partial\mathbf{D})$ (Ψ désigne à nouveau une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω) : en effet, suivant le terminologie de cet article, la frontière Γ de Ω est une courbe presque-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que quels que soient le point z de $\mathbf{C}$ et le nombre réel positif r, le paramétrage C de Γ par sa longueur d'arc s vérifie

$$|\{ s \in [0, 2\pi]:|C(s) - z| \leqq r\}| \leqq Mr.$$

Ainsi, en vertu des Lemmes 1.10 et 1.6 et du Théorème 1.1, il existe dans $]1, +\infty[$ des valeurs de p pour lesquelles les projecteurs de Bergman et Szegö de Ω s'étendent respectivement en des projecteurs continus de $L^p(d\lambda)$ sur $A^p(\Omega)$ et de $L^p(d\sigma)$ sur $E^p(\Omega)$: ici, nous nous intéresserons précisément à la caractérisation de ces valeurs de p.

En fait, nous supposerons en plus qu'au voisinage du point de rebroussement $w_0 = \gamma(z_0)$ de Γ,

(i) ou bien le domaine Ω est localement convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_0 : dans ce cas, $w_0 = \gamma(z_0)$ est un point de rebroussement saillant de Γ et on prend $\Delta\tau(z_0) = \pi$;

(ii) ou bien le domaine $\mathbf{C}\backslash\Omega$ est localement convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_0 : dans ce cas, $w_0 = \gamma(z_0)$ est un point de rebroussement rentrant de Γ et on prend $\Delta\tau(z_0) = -\pi$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. *Soit Ω un domaine borné dont la frontière satisfait les hypothèses précédentes. On suppose en particulier qu'au voisinage du point de rebroussement w_0 de Γ, Ω (resp. $\mathbf{C}\backslash\Omega$) est convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_0.*

Alors, quel que soit p dans $]1, +\infty[$ (resp. p dans $]4/3, 4[$), les projecteurs de Bergman et Szegö de Ω s'étendent respectivement en des projecteurs continus de $L^p(d\lambda)$ sur $A^p(\Omega)$ et de $L^p(d\sigma)$ sur $E^p(\Omega)$.

Démonstration. Soit Ψ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω qui vérifie $\Psi(1) = \gamma(1)$ et telle que l'application $\gamma^{-1} \circ \Psi$ conserve le sens de $\partial\mathbf{D}$. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 3.4. *La fonction* $\arg \Psi'(e^{it})$ *définie par les valeurs au bord de la fonction harmonique* $\arg \Psi' = \operatorname{Im} \log \Psi'$ *est continue sur $\partial\mathbf{D}$ en dehors du point $e^{it_0} = \Psi^{-1}(w_0)$ où elle admet un saut égal à π (resp. égal à $-\pi$) si w_0 est un point de rebroussement saillant (resp. un point de rebroussement rentrant) de Γ.*

Démonstration du Lemme 3.4. Soit η un nombre réel strictement positif; il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que si l'on pose $w_0 = \gamma(e^{i\theta_0})$, $0 < \theta_0 < 2\pi$, on a :

$$(23) \quad 0 < \theta_0 - \epsilon < \theta < \theta_0 \Rightarrow |\tau(e^{i\theta}) - (e^{i(\theta_0 - 0)})| < \eta.$$

et

$$\theta_0 < \theta < \theta_0 + \epsilon < 2\pi \Rightarrow |\theta(e^{i\theta}) - (e^{i(\theta_0 + 0)})| < \eta.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-007-1 Published online by Cambridge University Press

Désignons par V un voisinage de w_0 pour lequel le domaine $V \cap \Omega$ (resp. le domaine $V \cap (\mathbf{C}\backslash\Omega)$) est convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_0; on peut toujours, en vertu de (23), choisir η assez petit de telle sorte que quel que soit l'intervalle I de direction (Δ), contenu dans $V \cap \Omega$ et d'extrémités $\gamma(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$, $\theta_0 - \epsilon < \theta_1 < \theta_0$ et $\theta_0 < \theta_2 < \theta_0 + \epsilon$, le domaine Ω_ϵ, limité par les arcs

$$\{\gamma(e^{i\theta}):0 \leqq \theta \leqq \theta_1\} \quad \text{et} \quad \{\gamma(e^{i\theta}):\theta_2 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

et par l'intervalle I, soit contenu dans Ω (resp. contienne Ω) et appartienne à la classe $\mathscr{C}$ définie au paragraphe 2.

Nous examinerons d'abord le cas où $w_0 = \gamma(e^{i\theta_0})$ est un point de rebroussement saillant de Γ, $\Delta\tau(e^{i\theta_0}) = \pi$. Désignons par Ψ_ϵ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω_ϵ qui vérifie $\Psi_\epsilon(1) = \gamma(1)$ et par $\mathbf{D}_\epsilon$ le sous-domaine de $\mathbf{D}$ défini par $\mathbf{D}_\epsilon = \Psi^{-1}(\Omega_\epsilon)$; nous pouvons toujours supposer que, lorsque z parcourt $\partial\mathbf{D}$ dans le sens trigonométrique, il en est de même pour $\Psi^{-1} \circ \Psi_\epsilon(z)$ sur $\partial\mathbf{D}_\epsilon$.

Maintenant, si l'on pose

$$e^{i\xi_j} = \Psi_\epsilon^{-1}(\gamma(e^{i\theta_j})), \quad 0 < \xi_j < 2\pi, j = 1, 2,$$

il découle de l'appartenance de Ω_ϵ à la classe $\mathscr{C}$ qu'en vertu du corollaire du Lemme 2.1, la fonction $\arg \Psi'_\epsilon$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}]$$

et qu'en vertu de (23), on a :

(24) $$\pi - 2\eta < \arg \Psi'_\epsilon(e^{i(\xi_2+0)}) - \arg \Psi'_\epsilon(e^{i(\xi_1-0)}) < \pi + 2\eta.$$

Mais si l'on considère la représentation conforme

$$f_\epsilon = \Psi^{-1} \circ \Psi_\epsilon$$

de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}_\epsilon$, on a

$$\Psi \circ f_\epsilon = \Psi_\epsilon,$$

d'où l'on déduit l'égalité dans $\mathbf{D}$:

(25) $$\arg \Psi'_\epsilon = \arg \Psi' \circ f_\epsilon + \arg f'_\epsilon.$$

Ainsi, on déduira de (25) que la fonction $\arg \Psi'$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash f_\epsilon([e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}])$$

si l'on sait démontrer que la fonction $\arg f'_\epsilon$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}].$$

Pour démontrer cette dernière assertion, on utilise le fait que, comme Γ admet une tangente en $\gamma(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$, la transformation Ψ est conforme aux points

$$e^{it_j} = \Psi^{-1}(\gamma(e^{i\theta_j}))$$

et par suite, l'angle que fait l'intervalle I avec l'arc

$$\Gamma_1 = \{\gamma(e^{i\theta}):0 \leqq \theta \leqq \theta_1\}$$

de Γ en $\gamma(e^{i\theta_1})$ (resp. avec l'arc

$$\Gamma_2 = \{\gamma(e^{i\theta}):\theta_2 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

de Γ en $\gamma(e^{i\theta_2})$) est égal à l'angle que fait l'arc analytique $\Psi^{-1}(I)$ contenu dans $\mathbf{D}$ avec l'arc

$$T_1 = \{e^{it} \in \partial\mathbf{D}:0 \leqq t \leqq t_1\}$$

en e^{it_1} (resp. avec l'arc

$$T_2 = \{e^{it} \in \partial\mathbf{D}:t_2 \leqq t \leqq 2\pi\}$$

en e^{it_2}) : pour la démonstration de ce fait, cf. par exemple [**10**], p.p. 302-303. Ainsi, le domaine $\mathbf{D}_\epsilon$ appartient également à la classe $\mathscr{C}$ et sa frontière $\partial\mathbf{D}_\epsilon$ est analytique en dehors des points $e^{it_j}, j = 1, 2$; il s'ensuit en vertu du corollaire du Lemme 2.1 que la fonction $\arg f_\epsilon'$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}]$$

et que si l'on prend ϵ assez petit, on a :

$$(26) \quad 0 < \arg f_\epsilon'(e^{i(\xi_2+0)}) - \arg f_\epsilon'(e^{i(\xi_1-0)}) < \eta.$$

On déduit ensuite de (24), (25) et (26) que

$$\pi - 2\eta < \arg \Psi'(e^{i(t_2+0)}) - \arg \Psi'(e^{i(t_1-0)}) < \pi + 3\eta$$

et on conclut alors, en faisant tendre t_1 et t_2 vers t_0 et en utilisant le fait que le nombre η est arbitrairement petit, que la fonction $\arg \Psi'(e^{it})$ admet un saut égal à π en e^{it_0} : ceci achève la démonstration du lemme dans le cas où w_0 est un point de rebroussement saillant de Γ.

Nous examinons ensuite le cas où

$$w_0 = \gamma(e^{i\theta_0}), \quad 0 < \theta_0 < 2\pi,$$

est un point de rebroussement rentrant de Γ,

$$\Delta\tau(e^{i\theta_0}) = -\pi.$$

Dans ce cas, le domaine Ω_ϵ défini ci-dessus contient Ω et appartient à la classe $\mathscr{C}$.

Nous désignerons par Ψ_ϵ une représentation conforme de $\mathbf{D}$ sur Ω_ϵ qui vérifie $\Psi_\epsilon(1) = \gamma(1)$ et par $\mathbf{D}_\epsilon$ le sous-domaine de $\mathbf{D}$ défini par

$$\mathbf{D}_\epsilon = \Psi_\epsilon^{-1}(\Omega);$$

nous pouvons toujours supposer que, lorsque z parcourt $\partial\mathbf{D}$ dans le sens trigonométrique, il en est de même pour $\Psi_\epsilon^{-1} \circ \Psi(z)$ sur $\partial\mathbf{D}_\epsilon$.

Ensuite, si l'on pose

$$e^{i\xi_j} = \Psi_\epsilon^{-1}(\gamma(e^{i\theta_j})), \quad 0 < \xi_j < 2\pi, j = 1, 2,$$

on démontre en utilisant le corollaire du Lemme 2.1 que la fonction $\arg \Psi'_\epsilon$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}]$$

et que l'inégalité (24) est à nouveau vérifiée.

Maintenant, si l'on considère la représentation conforme $f_\epsilon = \Psi_\epsilon^{-1} \circ \Psi$ de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}_\epsilon$, on a

$$\Psi_\epsilon \circ f_\epsilon = \Psi,$$

d'où l'on déduit l'égalité dans $\mathbf{D}$:

$$(25') \quad \arg \Psi' = \arg \Psi'_\epsilon \circ f_\epsilon + \arg f'_\epsilon.$$

On déduira alors de (25′) que la fonction $\arg \Psi'$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{it_1}, e^{it_2}],$$

où

$$e^{it_j} = \Psi^{-1}(\gamma(e^{i\theta_j})), \quad j = 1, 2,$$

si l'on sait démontrer que la fonction $\arg f'_\epsilon$ y est continue.

Pour démontrer cette dernière assertion, on part du fait que si l'on choisit η assez petit, la valeur absolue de l'angle interne formé par le domaine Ω_ϵ aux coins $\gamma(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$, est égale à $\pi\alpha_j$, $1 < \alpha_j < 2$; il s'ensuit que l'angle interne formé par le domaine $\mathbf{D}_\epsilon = \Psi_\epsilon^{-1}(\Omega)$ en $e^{i\xi_j}$, $j = 1, 2$, a pour valeur absolue π/α_j : pour la démonstration de ce fait, cf. [**10**], problème 3, p. 311. Ainsi, le domaine $\mathbf{D}_\epsilon$ appartient également à la classe $\mathscr{C}$ et sa frontière $\partial\mathbf{D}_\epsilon$ est $\mathscr{C}^1$ en dehors des points $e^{i\xi_j}$, $j = 1, 2$: ceci démontre le fait que la fonction $\arg f'_\epsilon$ est continue sur

$$\partial\mathbf{D}\backslash[e^{it_1}, e^{it_2}]$$

et que si l'on prend ϵ assez petit, on a :

$$(26') \quad 0 < \arg f'_\epsilon(e^{i(t_2+0)}) - \arg f'_\epsilon(e^{i(t_1-0)}) < \eta.$$

On termine ensuite la démonstration du lemme en faisant tendre t_1 et t_2 vers t_0 et en utilisant (24), (25′), (26′) et le fait que le nombre η est arbitrairement petit.

Fin de la démonstration du Théorème 3.2. On reprend le raisonnement de la démonstration du Théorème 2.1 en remplaçant le corollaire du Lemme 2.1 par le Lemme 3.4.

En fait, la démonstration du Théorème 3.2 permet de généraliser le Théorème 2.1 à la classe $\mathscr{C}'$ des domaines Ω dont la frontière Γ, de longueur 2π, vérifie deux hypothèses, dont la première est la suivante :

(H1) Γ possède un paramétrage par le cercle unité T (défini à partir de son paramétrage par la longueur d'arc, cf. section 2) de la forme

$$\gamma : z \in T \mapsto \gamma(z) = \int_{[1,z]} e^{i\tau(w)} dw + \gamma(1),$$

où τ est une fonction continue à gauche et limitée à droite (dans le sens trigonométrique) sur T qui peut se mettre sous la forme

$$\tau(z) = \tau^C(z) + \sum_{u \in]1,z[} \Delta\tau(u),$$

avec

$$\Delta\tau(u) = \tau(u + 0) - \tau(u) \in [-\pi, \pi],$$

quel que soit u dans $T \backslash \{1\}$.

La seconde hypothèse sur Γ se compose de trois propriétés :

(H2) (i) $\Delta\tau$ peut prendre l'une des deux valeurs $\pm\pi$ en un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ de $T \backslash \{1\}$ et on suppose qu'au voisinage des points $w_j = \gamma(z_j)$, $j = 1, \dots, n$,

1°) ou bien Ω est localement convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_j : dans ce cas, on prend $\Delta\tau(z_j) = \pi$;

2°) ou bien $\mathbf{C} \backslash \Omega$ est localement convexe dans une direction (Δ) différente de celle définie par les deux demi-tangentes à Γ en w_j : on prend alors

$$\Delta\tau(z_j) = -\pi.$$

(H2) (ii) On a

$$\sum_{z \in T \backslash \{1\}} |\Delta\tau(z)| < +\infty \quad \text{et}$$

(iii) la fonction τ est continue au point 1.

Il est clair que la classe $\mathscr{C}'$ contient strictement la classe $\mathscr{C}$ définie au paragraphe 2. Le théorème suivant étend à la classe $\mathscr{C}'$ les conclusions du Théorème 2.1.

THÉORÈME 3.3. *Soit Ω un domaine de la classe $\mathscr{C}'$. Quel que soit p dans* $]1, +\infty[$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1°) *le projecteur de Szegö de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\sigma)$ sur la classe de Smirnov $E^q(\Omega)$, $q = p$ ou p'*;

2°) *le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un projecteur continu de $L^q(d\lambda)$ sur la classe de Bergman $A^q(\Omega)$, $q = p$ ou p'*;

3°) *quel que soit z sur le cercle unité T, on a* :

$$-2 < \Delta\tau(z)(p - 2)\pi < 2(p - 1).$$

Démonstration. Il suffit pour conclure, de démontrer que le corollaire du Lemme 2.1 est encore valable dans tout domaine de la classe $\mathscr{C}'$. Dans ce but, on remarque d'abord que le Lemme 3.4 se généralise au cas où le bord Γ du domaine Ω est $\mathscr{C}^1$ en dehors d'un nombre fini de points de rebroussement $w_j = \gamma(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, c'est à dire que la fonction $\arg \Psi'(e^{it})$ est continue sur $\partial\mathbf{D}$ en dehors des points $\zeta_j = \Psi^{-1}(w_j)$ et qu'en chaque point ζ_j, elle admet le même saut, égal à π ou $-\pi$, que la fonction τ en z_j : pour le voir, il suffit d'appliquer au voisinage de chacun des points w_j, le raisonnement utilisé dans la démonstration de ce lemme au voisinage de l'unique point de rebroussement.

En fait, ce raisonnement au voisinage des points de rebroussement permet également de conclure dans le cas général d'un domaine de la classe $\mathscr{C}'$, lorsqu'on le combine en dehors des points de rebroussement avec le raisonnement de la démonstration du Lemme 2.1.

Bibliographie

1. D. Békollé, *Intégrales singulières et inégalités à poids*, Thèse de 3ème cycle, Orléans (1978).

2. ——— *Inégalités à poids pour le projecteur de Bergman de la boule unité de* $\mathbf{C}^n$, Studia Math. *71* (1982), 305-323.

3. A. Bonami et N. Lohoué, *Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations* L^p, Compositio Math. *46* (1982), 159-226.

4. D. Campbell, J. Cima et K. Stephenson, *A Bloch function in all* H^p *classes, but not in* BMOA, Proc. Amer. Math. Soc. *78* (1980), 229-230.

5. R. Coifman et C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. *51* (1974), 241-250.

6. R. Coifman, R. Rochberg et G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. Math. *103* (1976), 611-635.

7. P. Duren, *Theory of* H^p *spaces* (Academic Press, New York, 1970).

8. R. Hunt, B. Muckenhoupt et R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. *176* (1973), 227-252.

9. F. John et L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. *14* (1961), 415-426.

10. C. Pommerenke, *Univalent functions* (Göttingen, Vandenhoek et Ruprecht, 1975).

11. ——— *Schlichte Funktionen und analytische Funktionen vom* BMO, Comm. Math. Helv. *52* (1977), 591-602.

12. D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. *207* (1975), 391-405.

13. A. A. Solov'ev, L^p *estimates of integral operators associated with spaces of analytic and harmonic functions*, Soviet Math. Dokl. *19* (1978), 764-768.

14. ——— *On the continuity of an integral operator with Bergman kernel in the* L^p *space*, Vest. Leningrad Universiteta *19* (1978), 77-80 (en russe).

15. M. Zinsmeister, *Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes*, Ann. Inst. Fourier (à paraître).

16. A. M. Shikhvatov, *L^p spaces of functions analytic in a region with piecewise analytic boundary*, Math. Zametki *20* (1976) (traduction anglaise dans Math. Notes *20* (1976), 858-864).

17. G. Weiss et R. Coifman, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes* (Lecture Notes, Springer Verlag, 1971).

Université de Bretagne Occidentale,
Brest, France