

SUR LES NOYAUX DE DIRICHLET CONTINUS

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction et préliminaires

Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et supposons qu'il existe une mesure de Radon positive ξ partout dense dans X . Dans toute la suite X et ξ seront fixés.

Une noyau-fonction continue (relatif à X et à ξ) est, par définition, une fonction non-négative G continue au sens large, localement $\xi \times \xi$ -sommable dans l'espace produit $X \times X$ et finie en dehors de l'ensemble diagonal de $X \times X$. On dit que G est symétrique si, quels que soient x et y de X , on a $G(x, y) = G(y, x)$. Quelques principes pour les potentiels par rapport à une noyau-fonction continue ont été étudiés (voir, par exemple, [5] et [6]).

On se propose ici d'étudier les conditions pour qu'une noyau-fonction continue G soit un noyau de Dirichlet (relatif à X et à ξ); c'est-à-dire, il existe un espace de Dirichlet D (relatif à X et à ξ) tel que, quelle que soit f de M_K , le potentiel de $f\xi$ dans D soit égal au potentiel Gf de $f\xi$ par rapport au noyau G . M_K désigne l'ensemble des fonctions ξ -mesurables, bornées dans X , à valeurs réelles et à support compact.

Pour une mesure de Radon réelle μ dans X , le potentiel G_μ de μ par rapport au noyau G est défini par

$$G_\mu(y) = \int G(x, y) d\mu(x)$$

dès que l'intégrale a un sens pour tout x de X .

On note M la totalité de fonctions réelles et localement ξ -sommables dans X , et la relation d'équivalence $f \sim g$ est définie par $f = g$ ξ -p.p. sur X . On désigne par $\tilde{M} = M/\sim$, et un élément de \tilde{M} sera souvent écrit par son élément représentatif.

Un espace fonctionnel H (relatif à X et à ξ) est, par définition, un

Received June 21, 1971.

espace hilbertien dont tout l'élément est de \tilde{M} et qui vérifie la condition suivante :

(a) A un compact K de X , on peut associer une constante $C(K) > 0$ telle que, quelle que soit u de H ,

$$\int_K |u| d\xi \leq C(K) \|u\| .$$

Un espace de Dirichlet D est, par définition, un espace fonctionnel qui vérifie les deux conditions suivantes :

(b) $C_K \cap D$ est dense dans C_K et dans D .

(c) Quelles que soient u de D et T une contraction normale de la droite réelle R , $T \cdot u$ appartient à D et on a $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$.

Ceux sont les définitions de A. Beurling et J. Deny [1]. On note $\|u\|$ la norme de u et (u, v) le produit scalaire associé. C_K désigne l'espace des fonctions finies, continues dans X et à support compact. On dit qu'une transformation de R à elle-même est une contraction normale si l'on a $T(0) = 0$ et $|T(a_1) - T(a_2)| \leq |a_1 - a_2|$ ($a_1, a_2 \in R$).

D'après le théorème de Riesz, à une fonction f de M_K , on associe un élément u_f de H , et un seul tel que, quelle que soit v de H ,

$$(u_f, v) = \int v f d\xi ,$$

et u_f s'appelle le potentiel de $f\xi$ dans H . Si, pour une mesure de Radon réelle μ dans X , il existe un élément u_μ dans D tel que, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$(u_\mu, \varphi) = \int \varphi d\mu ,$$

il est alors unique et s'appelle le potentiel de μ dans D .

On introduira les deux principes suivants pour les potentiels par rapport à une noyau-fonction continue G .

Principe complet du maximum: G satisfait au principe complet du maximum si, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans X , l'inégalité $G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + 1$ est satisfaite partout sur X dès que $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$ et que $G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + 1$ sur le support S_μ de μ .

Principe d'énergie: G satisfait au principe d'énergie si, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X , $\int G_\mu(x) d\mu(x) \geq 0$ dès que

$\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$, et si l'on a $\int G_{\mu}(x)d\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$.

On dira qu'une noyau-fonction continue G est faiblement régulière si, quels que soit x de X et $a > 0$,

$$\inf_K \text{cap}_G (\{y \in \mathcal{C}K ; G(x, y) > a\}) = 0 .$$

où K est compact. Pour un ensemble capacitabile A , on note $\text{cap}_G(A)$ la capacité de A relative au noyau G .

2. Le théorème principal

Commençons avec notre résultat principal.

THÉORÈME. *Pour qu'une noyau-fonction continue G soit un noyau de Dirichlet, il faut et il suffit que G vérifie les trois conditions suivantes :*

- (1) G est symétrique.
- (2) G satisfait au principe complet du maximum et au principe d'énergie.
- (3) G est faiblement régulière.

On connaît bien que si une noyau-fonction continue symétrique G satisfait au principe complet du maximum, G est de type positif; c'est-à-dire, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X , $\int G_{\mu}(x)d\mu(x) \geq 0$ dès que $\int G_{|\mu|}(x)d|\mu|(x) < +\infty$ (cf. [3], [6]). Supposons que G est symétrique et de type positif. Alors, en complétant l'ensemble $\{Gf ; f \in M_K\}$ par la norme

$$\|Gf\| = \left(\int Gf(x)f(x)d\xi(x) \right)^{1/2} ,$$

on obtient un espace fonctionnel, que s'appelle celui associé au noyau G et s'écrit $H(G)$. Il est, d'autre part, caractérisé par l'espace fonctionnel tel que, quelle que soit f de M_K , $u_f = Gf$.

LEMME 1. *On suppose que $D = H(G)$ est un espace de Dirichlet. On a alors :*

- (a) *Quels que soient x de X et $a > 0$, $\inf (G\varepsilon_x, a) \in H(G)$, où ε_x est la mesure de Dirac au point x .*
- (b) *Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X , u_{μ} a un sens, alors $\int G_{\mu}(x)d\mu(x) < +\infty$ et $u_{\mu} = G_{\mu}$.*

En effet, soient $(V_\alpha)_\alpha$ une famille filtrante à gauche d'ouverts relativement compacts avec $\bigcap_\alpha V_\alpha = \{x\}$, et f_α une fonction de M_K^+ portée par V_α et avec $\int_\alpha f_\alpha d\xi = 1$, où M_K^+ est le sous-ensemble des fonctions non-négatives dans M_K . Alors, pour $a > 0$, il existe une mesure de Radon positive ν_α^a dans X telle que $\inf(Gf_\alpha, a) = u_{\nu_\alpha^a}$ et $\int d\nu_\alpha^a \leq 1$ (cf. [1]). Donc il existe une mesure de Radon positive ν_x^a dans X telle que $\inf(G\varepsilon_x, a) = u_{\nu_x^a}$ et $\int d\nu_x^a \leq 1$, d'où (a).

Pour une fonction f de M_K^+ , la fonction

$$G_a f(x) = \int \inf(G(x, y), a) f(y) d\xi(y)$$

appartient à D . On peut supposer ici que la mesure μ dans l'énoncé (b) est à support compact. On a donc

$$(u_\mu, G_a f) = \int G_a f(x) d\mu(x).$$

La famille $(G_a f)_{a>0}$ converge fortement vers Gf dans $H(G)$ avec $a \rightarrow +\infty$, et elle converge d'une manière croissante vers Gf dans X . Donc

$$(u_\mu, Gf) = \int Gf(x) d\mu(x).$$

Considérons l'application

$$\{Gf \in D; f \in M_K\} \ni Gf \rightarrow \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x).$$

Alors, d'après

$$\left| \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x) \right| = \left| \int Gf(x) d\mu(x) \right| \leq \|u_\mu\| \|Gf\|,$$

cette application peut être prolongée sur D , et ce prolongement est linéaire et borné sur D . Le théorème de Riesz implique $G_\mu \in D$. On a donc

$$(u_\mu, G_\mu) = \lim_{a \rightarrow \infty} (u_\mu, G_a \mu) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int G_a \mu d\mu = \int G_\mu d\mu < +\infty$$

et, quelle que soit f de M_K , $(Gf, G_\mu) = (Gf, u_\mu)$, d'où $u_\mu = G_\mu$.

Soit D un espace de Dirichlet. Pour un ouvert ω de X , la capacité $\text{cap}_D(\omega)$ de ω relative à D est définie par

$$\text{cap}_D(\omega) = \inf \{ \|u\|^2; u \in D, u \geq 1 \text{ } \xi\text{-p.p. dans } \omega \}$$

ou $\text{cap}_D(\omega) = +\infty$ d'accord avec $\{u \in D; u \geq 1 \text{ } \xi\text{-p.p. dans } \omega\} \neq \emptyset$ ou $=\emptyset$ (cf. [1]). La capacité extérieure d'un ensemble quelconque est définie de la manière usuelle. On dit qu'une propriété a lieu D -q.p. sur un ensemble A si elle a lieu sur A excepté à un ensemble de capacité extérieure nulle.

On connaît bien qu'à u de D , on associe une fonction quasi-continue dans X et qui est égale ξ -p.p. à u . Elle s'appelle un raffinement de u (cf. [1]), et s'écrit u^* .

COROLLAIRE 1. *Soit $H(G)$ le même que dans le lemme 1. Si, pour une mesure de Radon positive $\mu, u_\mu \in H(G)$, alors, quelle que soit ν une mesure de Radon positive dans X ,*

$$\int u_\mu^* d\nu = \int G_\mu d\nu$$

dès que $u_\nu \in H(G)$.

On peut supposer que S_a est compact. On a, quel que soit $a > 0$,

$$(u_\nu, G_a \mu) = \int G_a \mu d\nu,$$

car $G_a \mu$ est continue. Faisant $a \rightarrow \infty$, on arrive à

$$\int u_\mu^* d\nu = (u_\mu, u_\nu) = \lim_{a \rightarrow \infty} (G_a \mu, u_\nu) = \int G_\mu d\nu.$$

COROLLAIRE 2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 1, l'application $X \ni x \rightarrow u_x^a$ est vaguement continue pour tout $a > 0$.*

En effet, on a d'abord $\|u_{x_0^a}\| \leq a^{1/2}$ et, quelle que soit f de M_K ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (u_{x_0^a}, Gf) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \int \inf(G(x, y), a) f(y) d\xi(y) \\ &= \int \inf(G(x_0, y), a) f(y) d\xi(y) = (u_{x_0^a}, Gf). \end{aligned}$$

L'ensemble $\{Gf \in H(G); f \in M_K\}$ étant dense dans $H(G)$, l'application $x \rightarrow u_{x_0^a}$ est faiblement continue dans $H(G)$, d'où notre corollaire.

LEMME 2. *Soit $H(G)$ le même que ci-dessus. Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X , $\int G_\mu d\mu < +\infty$, alors u_μ a un sens et $u_\mu = G_\mu$.*

On le montrera en séparant aux parties suivantes :

(1) Il existe une mesure de Radon positive ν dans X telle que u_ν ait un sens et $u_\nu = G_\mu$.

En effet l'application

$$\{Gf \in H(G); f \in M_K\} \ni Gf \rightarrow \int G_\mu(x)f(x)d\xi(x)$$

est bornée, car, quelle que soit a une constante > 0 ,

$$\left| \int G_a\mu(x)f(x)d\xi(x) \right| \leq \|G_a\mu\| \|Gf\|$$

et

$$\begin{aligned} \|G_a\mu\|^2 &= \iiint \inf(G(z, y), a) d\mu(y) d\nu_x^a(z) d\mu(x) \\ &\leq \iint G_\mu(z) d\nu_x^a(z) d\mu(x) = \iiint G(z, y) d\nu_x^a(z) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \iint \inf(G(x, y), a) d\mu(x) d\mu(y) \leq \iint G_\mu(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int G_\mu(x)f(x)d\xi(x) \right|^2 \leq \left(\int G_\mu(x) d\mu(x) \right) \left(\int Gf(x)f(x)d\xi(x) \right).$$

Donc cette application peut être prolongée sur $H(G)$, et ce prolongement est linéaire et borné. En vertu du théorème de Riesz, G_μ appartient à $H(G)$ et $G_a\mu$ converge fortement vers G_μ dans $H(G)$ avec $a \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $\mu_a = \int \nu_x^a d\mu(x)$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive ν dans X avec $a \rightarrow +\infty$, et alors u_ν a un sens et $G_\mu = u_\nu$.

(2) Les supports de μ et de ν sont égaux, et, quel que soit A un ensemble μ -mesurable de X , si la capacité intérieure de A relative à $H(G)$ est nulle, alors $\mu(A) = 0$.

En effet, $G_a\mu(x)$ converge d'une manière croissante vers $G_\mu(x)$ et donc, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans X telle que u_λ ait un sens dans $H(G)$,

$$\int G_\mu(x)d\lambda(x) = \int u_\lambda^*(x)d\lambda(x).$$

Supposons $S_\mu \neq S_\nu$. Alors il existe une mesure de Radon positive λ dans X et un ouvert ω de X tels que u_λ ait un sens et que l'on ait

$$\int (G_\lambda(x) - G_{\lambda'}(x))d\mu(x) \neq \int (G_\lambda(x) - G_{\lambda'}(x))d\nu(x) ,$$

où λ' est la mesure balayée de λ sur $\mathcal{C}\omega$ relativement à l'espace de Dirichlet $H(G)^{(1)}$, mais cela est une contradiction.

Supposons ensuite $\mu(A) \neq 0$. Alors il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mu(K) > 0$. On a évidemment $\int G_{\mu_K}d\mu_K < +\infty$, où μ_K est la restriction de μ sur K , et donc il existe une mesure de Radon positive ν_K portée par K et telle que u_{ν_K} ait un sens et $G_{\mu_K} = u_{\nu_K}$, mais cela est en contradiction avec $\text{cap}_{H(G)}(K) = 0$.

(3) $\mu = \nu$.

Pour cela, il suffit de montrer que u_μ a un sens dans $H(G)$. Soit φ une fonction de $C_K \cap H(G)$. Alors il existe une mesure de Radon positive λ dans X telle que u_λ ait un sens dans $H(G)$ et que l'on ait

$$|\varphi(x)| \leq u_\lambda(x) \text{ } \xi\text{-p.p. sur } X \text{ et } \|\varphi\| \geq \|u_\lambda\|$$

(voir [2]). On a donc $|\varphi| \leq u_\lambda^*$ D -q.p. sur X , et par suite, d'après (2),

$$\int |\varphi|d\mu \leq \int u_\lambda^*d\mu .$$

On a ensuite

$$\int u_\lambda^*d\mu = \int G_\lambda d\mu = \int G_\mu d\lambda = \int G_\nu d\lambda \leq \|u_\lambda\| \|u_\nu\| \leq \|u_\nu\| \|\varphi\| ,$$

et donc, l'application

$$\varphi \in C_K \cap D \rightarrow \int \varphi d\mu$$

est linéaire et bornée dans $H(G)$, et elle est prolongée sur $H(G)$. En vertu du théorème de Riesz, u_μ a un sens dans $H(G)$, d'où $\mu = \nu$. La démonstration du lemme 2 est ainsi complète.

On obtient, en même temps, que si, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X , $\int G_\mu d\mu < +\infty$, alors

⁽¹⁾ Soit D un espace de Dirichlet. Pour une mesure de Radon positive μ dans X telle que u_μ ait un sens et pour un fermé F de X , il existe une mesure de Radon positive μ' portée par F , et une seule telle que l'on ait $u_\mu^* \geq u_{\mu'}^*$ D -q.p. sur X et $u_\mu^* = u_{\mu'}^*$ D -q.p. sur F . On dit que μ' est la mesure balayée de μ sur F relativement à D .

$$\mu_a = \int \nu_x^a d\mu(x)$$

converge vaguement vers μ avec $a \rightarrow +\infty$. Cela indique aussi que la capacité intérieure d'ensemble $\{x \in X; \nu_x^a \not\rightarrow \varepsilon_x\}$ est nulle, où ε_x est la mesure de Dirac au point x .

Mais on ne connaît pas si, pour une mesure de Radon réelle μ dans X telle que $\int G_\mu d\mu < +\infty$, u_μ a un sens.

Considérons les noyau-fonctions continues qui satisfont au principe complet du maximum.

LEMME 3. *Soit G une noyau-fonction continue, symétrique et satisfaisant au principe du maximum. Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X , $\int G_\mu d\mu < +\infty$, G_μ appartient à $H(G)$ et on a*

$$\|G_\mu\|^2 \leq \int G_\mu(x) d\mu(x).$$

En effet, on peut supposer évidemment que S_μ est compact. On remarque ici que G satisfait au principe de continuité⁽²⁾, et donc on peut supposer que G_μ est finie et continue dans X . Donc, quelle que soit f de M_K ,

$$\iint G(x, y) d|\mu - f\xi|(y) d|\mu - f\xi|(x) < +\infty.$$

Considérons l'application

$$\{Gf; f \in M_K\} \ni Gf \rightarrow \int G_\mu(x) f(x) d\xi(x).$$

Alors, G étant de type positif, cette application est bornée et par suite, de la même manière que dans le lemme 2, G_μ appartient à $H(G)$ et on a

$$\|G_\mu\|^2 \leq \int G_\mu(x) d\mu(x).$$

Remarque. En ce moment, on ne connaît pas s'il existe une mesure de Radon positive μ dans X telle que

$$\|G_\mu\|^2 < \int G_\mu(x) d\mu(x).$$

⁽²⁾ Cela signifie que, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X à support compact, G_μ est finie et continue dès que la restriction de G_μ sur S_μ l'est aussi. (cf. [5].)

LEMME 4. Soit H un espace fonctionnel qui vérifie la condition (c) dans l'introduction. Si $H \cap M_K$ est dense dans H et si $H \cap C_K$ est dense dans C_K , H est alors un espace de Dirichlet.

En effet, H_0 désigne l'adhérent de $C_K \cap H$ dans H , et alors H_0 est évidemment un espace fonctionnel qui vérifie la condition (b) dans l'introduction. Pour une fonction u de H_0 , il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap H$ ($= C_K \cap H_0$) qui converge fortement vers u dans H avec $n \rightarrow +\infty$. On a, quelle que soit T une contraction normale de R , $T \cdot \varphi_n \in C_K \cap H$ et $\|T \cdot \varphi_n\| \leq \|\varphi_n\|$. Donc la suite $(T \cdot \varphi_n)$ est bornée dans H_0 . D'autre part, on peut supposer que (φ_n) converge ξ -p.p. vers u dans X avec $n \rightarrow +\infty$, et donc $(T \cdot \varphi_n)$ converge aussi ξ -p.p. vers $T \cdot u$ dans X . Pour une fonction f de M_K , u_f et $u_f^{(0)}$ désignent le potentiel de f dans H et le potentiel de f dans H_0 . On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (T \cdot \varphi_n, u_f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_f^{(0)}, T \cdot \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int T \cdot \varphi_n(x) f(x) d\xi(x) \\ &= \int T \cdot u(x) f(x) d\xi(x), \end{aligned}$$

et donc $(T \cdot \varphi_n)$ converge faiblement vers $T \cdot u$ dans H avec $n \rightarrow +\infty$, d'où $T \cdot u \in H_0$ et $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$. Par conséquent, H_0 est un espace de Dirichlet.

Montrons ensuite $H = H_0$. Soit $H^{(1)}$ (resp. $H_0^{(1)}$) l'espace fonctionnel obtenu par la complété de l'ensemble $\{u_f + f; f \in M_K\}$ (resp. $\{u_f^{(0)} + f; f \in M_K\}$) par la norme

$$\begin{aligned} \|u_f + f\|_1 &= \left(\int (u_f + f) f d\xi \right)^{1/2} \\ \left(\text{resp. } \|u_f^{(0)} + f\|_{0,1} &= \left(\int (u_f^{(0)} + f) f d\xi \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$H^{(1)} = \{u + f; u \in H, f \in L^2(\xi)\},$$

où $L^2(\xi)$ est l'espace hilbertien des fonctions dont les carrés sont ξ -sommables et muni de la norme usuelle. On a, quelles que soient u de H et f de $L^2(\xi)$,

$$\|u + f\|_1 \leq \left(\|u\|^2 + \int |f|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Les mêmes énoncés pour $H_0^{(1)}$ ont lieu. Par conséquent, $H_0^{(1)}$ est dense

dans $H^{(1)}$, car $H_0^{(1)} \supset M_K$ et M_K est dense dans H . Pour une fonction $u + f$ de $H_0^{(1)}$, la norme de u dans $H^{(1)}$ est évidemment égale à la norme de u dans $H_0^{(1)}$, et par suite, $H_0^{(1)}$ est un sous-espace fermé de $H^{(1)}$. Par conséquent $H_0^{(1)} = H^{(1)}$ et donc, quelle que soit f de M_K ,

$$\int u_f^{(0)} f \, d\xi + \int |f|^2 \, d\xi = \int u_f f \, d\xi + \int |f|^2 \, d\xi,$$

d'où $u_f^{(0)} = u_f$. Cela implique $H_0 = H$.

Remarque. Au lieu de la première hypothèse dans le lemme, il suffit de supposer que $H \cap L^2$ est dense dans H . Cela résulte du fait que la "résolvante" associée à H est égale à celle associée à H_0 . Voir [4].

Démonstration du théorème. On suppose d'abord que G vérifie les conditions (1), (2), (3). D'après (1), (2), G est de type positif, et donc il existe l'espace fonctionnel $H(G)$ associé au noyau G . Montrons que $H(G)$ vérifie la condition (c) dans l'introduction. Pour cela, il suffit de montrer que, quelles que soient f, g de M_K^+ , $Gf \leq Gg + 1$ ξ -p.p. sur X dès que $Gf \leq Gg + 1$ ξ -p.p. sur l'ensemble $\{x \in X; f(x) > 0\}$. Cela est un résultat de [2]. On choisit une suite croissante (K_n) des compacts de X telle que l'on ait

$$K_n \subset \{x \in X; f(x) > 0, Gg(x) + 1 \geq Gf(x)\}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(K_n) = \xi(\{x \in X; f(x) > 0\}).$$

On a alors $Gf_n(x) \leq Gg(x) + 1$ partout sur S_{f_n} , où f_n est la restriction de f sur K_n , et donc, d'après le principe complet du maximum pour G , $Gf_n(x) \leq Gg(x) + 1$ partout sur X . Faisant $n \rightarrow +\infty$, on obtient immédiatement $Gf(x) \leq Gg(x) + 1$ partout sur X .

Soient μ une mesure de Radon positive dans X , à support compact et avec $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$, et F un fermé de X . On prend une suite croissante (K_n) des compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$, et alors, il existe une mesure de Radon positive μ'_n portée par K_n , et une seule telle que l'on ait

$$G_\mu(x) \geq G_{\mu'_n}(x) \quad \text{partout sur } X$$

et

$$G_\mu(x) = G_{\mu'_n}(x) \text{ G-p.p.p. sur } K_n^{(3)}$$

(voir [5] et [6]). L'unicité de μ'_n résulte du principe d'énergie pour G . On dit que μ'_n est la mesure balayée de μ sur K_n relativement au noyau G . En ce moment, si $n \leq m$, on a $\int d\mu'_n \leq \int d\mu'_m \leq \int d\mu$ et $\mu'_n \geq \mu'_m$ sur K_n , car μ'_n est aussi la mesure balayée de μ'_m sur K_n relativement au noyau G . Pour une mesure de Radon positive ν dans X , à support compact et telle que G_ν soit finie et continue dans X , on a, quelle que soit c une constante > 0 ,

$$\inf_K \text{cap}_G (\{x \in \mathcal{C}K; G_\nu(x) \geq c\}) = 0,$$

où K est compact, et on a $G_\nu(x) \leq C$ sur X , où C est une autre constante > 0 . Pour deux nombres $c > 0$ et $\delta > 0$ donnés, il existe un compact K de X tel que

$$\text{cap}_G (\{x \in \mathcal{C}K; G_\nu(x) \geq c\}) < \delta^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int G_\nu(x) d\mu'_n(x) &= \int_K G_\nu(x) d\mu'_n(x) + \int_{\mathcal{C}K} G_\nu(x) d\mu'_n(x) \\ &\leq \int_K G_\nu(x) d\mu'_n(x) + c \int d\mu'_n + C \left(\int G_\mu(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \delta. \end{aligned}$$

Faisant $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \int G_\nu(x) d\mu'(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int G_\nu(x) d\mu'_n(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int G_\nu(x) d\mu'_n(x) \\ &\leq \int_K G_\nu(x) d\mu'(x) + c \int d\mu + C \left(\int G_\mu(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \delta, \end{aligned}$$

car $(\mu'_n)_{n=n_0}^\infty$ converge d'une manière décroissante vers μ' sur K avec $n \rightarrow +\infty$, où $K \cap F \subset K_{n_0}$. Faisant $\delta \rightarrow 0$ et ensuite $c \rightarrow 0$, on arrive à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_\nu(x) d\mu'_n(x) = \int G_\nu(x) d\mu'(x).$$

On a évidemment $G_\mu(x) \geq G_{\mu'}(x)$ partout sur X . On montrera $G_\mu(x) = G_{\mu'}(x)$ G-p.p.p. sur F . Pour une mesure de Radon positive ν portée par F , à support compact et avec $\int G_\nu(x) d\nu(x) < +\infty$, il existe un compact

⁽³⁾ Une propriété a lieu G-p.p.p. sur un ensemble A de X si, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans X telle que l'on ait $\int G\lambda(x) d\lambda(x) < +\infty$ et $S_\lambda \subset A$, elle a lieu presque partout pour λ .

K_n de X tel que $\nu(\mathcal{C}K_n) < 1/n$ et que G_{ν_n} soit fini et continu dans X , où ν_n est la restriction de ν sur K_n . On a donc

$$\int G_\mu(x) d\nu_n(x) = \int G_{\mu'}(x) d\nu_n(x)$$

Faisant $n \rightarrow +\infty$, on arrive à

$$\int G_\mu(x) d\nu(x) = \int G_{\mu'}(x) d\nu(x),$$

d'où $G_\mu(x) = G_{\mu'}(x)$ G -p.p.p. sur F . Une telle mesure μ' est uniquement déterminée, qui résulte du principe d'énergie pour G . La mesure μ' s'appelle aussi la mesure balayée de μ sur F relativement au noyau G . On a évidemment $G_\mu \neq G_{\mu'}$ dès que $S_\mu \not\subset F$.

Montrons ensuite que $C_K \cap H(G)$ est dense dans C_K . Pour cela, il suffit de voir que, quels que soient x_0 de X et V un voisinage de x_0 , il existe une fonction non-négative et non-zéro de $C_K \cap H(G)$ et portée par V . Soit $G(x_0, x_0) = +\infty$. Pour un voisinage V ouvert et relativement compact de x_0 , il existe une mesure de Radon positive $\nu_V (\neq 0)$ dans X , à support $\subset V$ et telle que G_{ν_V} soit finie et continue dans X et que

$$G_{\nu_V}(x_0) - G_{\nu_V^*}(x_0) > \max_{x \in V^*} (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu_V^*}(x)),$$

où ν_V^* est la mesure balayée de ν_V sur CV relativement au noyau G et V^* est la frontière de V . Posons

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} G_{\nu_V}(x) - G_{\nu_V^*}(x) - \inf (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu_V^*}(x), m_V) & x \in V, \\ 0 & x \in \mathcal{C}V, \end{cases}$$

où $m_V = \max_{x \in V^*} (G_{\nu_V}(x) - G_{\nu_V^*}(x))$. Alors φ_V appartient à $C_K \cap H(G)$ et on a $S_{\varphi_V} \subset \bar{V}^{(4)}$, car $H(G)$ vérifie la condition (c) dans l'introduction. Soit $G(x_0, x_0) < +\infty$. Alors il existe un ouvert $w \ni x_0$ tel que, quel que soit (x, y) de $w \times w$, $G(x, y) < +\infty$. Quels que soient V un voisinage ouvert, relativement compact de x_0 et avec $\bar{V} \subset w$, et ν_V une mesure de Radon positive ($\neq 0$) dans X et à support $\subset V$,

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} G_{\nu_V}(x) - G_{\nu_V^*}(x) & x \in V \\ 0 & x \in \mathcal{C}V \end{cases}$$

⁽⁴⁾ La continuité de G_{ν_V} dans V résulte du fait que, quel que soit $a > 0$, $\int G_{\nu_V^*} d\nu_V(y)$ est continue.

appartient à $C_K \cap H(G)$ et on a $S_{\varphi_V} \subset \bar{V}$, car G_{ν_V} est finie et continue dans ω . On obtient ainsi que $C_K \cap H(G)$ est dense dans C_K .

Montrons finalement que $H(G) \cap M_K$ est dense dans $H(G)$. D'après le principe de continuité et le principe complet du maximum pour G , l'ensemble $\{Gf; f \in M_K, Gf \text{ est fini et continu}\}$ est dense dans $H(G)$, et Gf est borné. Donc il suffit de montrer que l'on a, quelles que soient μ une mesure de Radon positive dans X , à support compact et telle que G_μ soit continu et borné, et (ω_n) une suite croissante d'ouverts relativement compacts de X et avec $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) = 0,$$

où μ'_n est la mesure balayée de μ sur $\mathcal{C}\omega_n$ relativement au noyau G (cf. le lemme 3). Soient $c > 0$ et $\delta > 0$ deux nombres donnés. Alors il existe un compact K de X tel que

$$\text{cap}_G (\{x \in \mathcal{C}K; G_\mu(x) \geq c\}) < \delta^2.$$

Pour un entier n tel que $\omega_n \supset K$, on a

$$\begin{aligned} \int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) &= \int G_\mu(x) d\mu'_n(x) \\ &\leq c \int d\mu'_n + C \left(\int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) \right)^{1/2} \delta \\ &\leq c \int d\mu + C \left(\int G_\mu(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \delta, \end{aligned}$$

où C est une contante > 0 telle que $C \geq G_\mu(x)$ sur X . Par conséquent, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_{\mu'_n}(x) d\mu'_n(x) = 0,$$

d'où $H(G) \cap M_K$ est dense dans $H(G)$. En utilisant le lemme 4, on obtient que $H(G)$ est un espace de Dirichlet.

Réciproquement, soit G un noyau de Dirichlet. D désigne l'espace de Dirichlet au noyau G . G est évidemment symétrique. On suppose que, pour deux mesures de Radon positives μ, ν dans X et à support compact, $G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + 1$ sur S_μ et $\int G_\mu(x) d\mu(x) < +\infty$. On prend un nombre $\delta > 0$ fixé. On désigne par μ_n la restriction de μ sur

$$\left\{ x \in X ; G_{n\nu}(x) + 1 + \delta = \int \inf(G(x, y), n) d\nu(y) + 1 + \delta \geq G_\mu(x) \right\} .$$

Alors on a

$$G_{\mu_n}(x) \leq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta \quad \text{sur } S_{\mu_n} \text{ et } \int G_{\nu_n}(x) d\nu_n(x) < +\infty ,$$

où ν_n est la mesure définie dans le lemme 2. D'après le corollaire 1, on a, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans X et telle que u_λ ait un sens,

$$\int G_{\mu_n}(x) d\lambda(x) = \int u_{\mu_n}^*(x) d\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int G_{\nu_n}(x) d\lambda(x) = \int G_{\nu_n}(x)_\nu d\lambda(x) = \int u_{\nu_n}^* d\lambda(x) .$$

En utilisant les mesures balayées relativement à D , on obtient $G_{\mu_n}(x) \leq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta$ ξ -p.p. sur X . La fonction $G_{n\nu} + (1 + \delta) - G_{\mu_n}$ étant continue dans $\mathcal{C}S_{\mu_n}$, on a

$$G_{\mu_n}(x) \leq G_{n\nu}(x) + 1 + \delta \leq G_\nu(x) + 1 + \delta$$

partout sur X . La suite (μ_n) converge d'une manière croissante vers μ dans X avec $n \rightarrow +\infty$, et donc $G_{\mu_n}(x) \leq G_\nu(x) + 1 + \delta$ partout sur X . Faisant $\delta \rightarrow 0$, on arrive à la conclusion que $G_\mu(x) \leq G_\nu(x) + 1$ partout sur X , d'où G satisfait au principe complet du maximum.

Si l'on a, pour une mesure de Radon réelle μ dans X , $\int G_{|\mu|}(x) d|\mu|(x) < +\infty$, alors G_μ appartient à D et

$$\int G_\mu(x) d\mu(x) = \|G_\mu\|^2 \geq 0$$

(cf. le lemme 2). Si $\int G_\mu(x) d\mu(x) = 0$, alors $G_\mu = 0$, d'où $\mu = 0$, car $C_K \cap D$ est dense dans D . Cela implique ce que G satisfait au principe d'énergie.

Montrons finalement que G est faiblement régulière. Supposons qu'il existe un point x_0 de X et un nombre $c_0 > 0$ tels que

$$\inf_K \text{cap}_G(\{y \in \mathcal{C}K ; G(x_0, y) > c_0\}) > 0 .$$

Pour un nombre $c > c_0$, on a

$$\{y \in \mathcal{C}K ; G(x_0, y) > c\} = \{y \in \mathcal{C}K ; G_{c, x_0}(y) = \inf(G(x_0, y), c) > c_0\} .$$

G_{c, x_0} appartenant à D , il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap D$ qui converge

fortement vers $G_{c_\varepsilon x_0}$ dans D avec $n \rightarrow +\infty$. Soit (K_n) une suite croissante de compacts de X telle que l'on ait $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$ et $K_n \supset \bigcup_{k=1}^n S_{\varphi_k}$. D'après notre hypothèse, il existe une mesure de Radon positive μ_n dans X , à support compact et telle que l'on ait

$$S_{\mu_n} \subset \{y \in \mathcal{C}K_n; G_{c_\varepsilon x_0}(y) > c_0\}$$

et

$$a \leq \int G_{\mu_n}(x) d\mu_n(x) = \int d\mu_n \leq b,$$

où a, b sont constantes positives. On peut supposer que la suite (G_{μ_n}) converge faiblement vers une fonction u de D dans D avec $n \rightarrow +\infty$, et donc

$$(u, G_{c_\varepsilon x_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{\mu_n}, G_{c_\varepsilon x_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int G_{c_\varepsilon x_0}(y) d\mu_n(y) > ac_0 > 0.$$

D'autre part, on a

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n, u_{\mu_n}) = (G_{c_\varepsilon x_0}, u),$$

d'où une contradiction. Par conséquent, G est faiblement régulière. La démonstration est ainsi complète.

Remarque. Lorsque G est symétrique, faiblement régulière et satisfait au principe complet du maximum, on ne peut pas toujours affirmer que G satisfait au principe d'énergie. Si X est connexe et si $G \neq 0$, le présent énoncé a-t-il lieu?

PROPOSITION. *Soit G une noyau-fonction continue qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) dans le théorème. Alors pour que G soit un noyau d'algèbre de Dirichlet, il faut et il suffit que G soit bornée.*

On dit qu'un espace de Dirichlet D est une algèbre de Dirichlet si, quelles que soient u et v de D , uv appartient à D et s'il existe une constante $C(D) > 0$ telle que $\|uv\| \leq C(D)\|u\|\|v\|$.

Démonstration de la proposition. On désigne par D l'espace de Dirichlet au noyau G . On suppose d'abord que D est une algèbre de Dirichlet. Pour un point x de X , on choisit une famille $(V_\alpha)_\alpha$ filtrante à gauche d'ouverts relativement compacts de X telle que $\bigcap_\alpha \bar{V}_\alpha = \bigcap_\alpha V_\alpha = \{x\}$. Il existe une mesure de Radon positive ν_α portée par \bar{V}_α telle que

$$\int d\nu_\alpha = \int G_{\nu_\alpha}(x) d\nu_\alpha(x) = \text{cap}_D(V_\alpha)$$

(cf. [1] et le lemme 1). On a donc

$$\text{cap}_D(V_\alpha) = \int (G_{\nu_\alpha}(x))^2 d\nu_\alpha \leq C(D) (\text{cap}_D(V_\alpha))^{3/2},$$

d'où

$$\text{cap}_D(V_\alpha) \geq \left(\frac{1}{C(D)}\right)^2.$$

Par conséquent, tout le point vaguement adhérent de $(\nu_\alpha)_\alpha$ n'est pas égal à 0, et il est portée par $\{x\}$. Cela implique $G(x, x) \leq (C(D))^2$, d'où G est bornée sur $X \times X$.

On suppose réciproquement que G est bornée, et alors, quel que soit x de X , u_{ε_x} a un sens et il existe une constante C telle que $\|u_{\varepsilon_x}\| \leq C$. On a donc, quelle que soit φ de $C_K \cap D$,

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x)| = \sup_{x \in X} |(u_{\varepsilon_x}, \varphi)| \leq \sup_{x \in X} \|u_{\varepsilon_x}\| \|\varphi\| \leq C \|\varphi\|,$$

et par suite, toute la fonction u de D est continue et bornée dans X et on a

$$\sup_{x \in X} |u(x)| \leq C \|u\|.$$

Quelles que soient u et v deux fonctions de D ,

$$|u(x)v(x)| \leq (\sup_{x \in X} |u(x)|) |v(x)| + (\sup_{x \in X} |v(x)|) |u(x)|$$

et

$$|u(x)v(x) - u(y)v(y)| \leq (\sup_{x \in X} |u(x)|) |v(x) - v(y)| + (\sup_{x \in X} |v(x)|) |u(x) - u(y)|.$$

Donc, en utilisant un théorème de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]), on a $uv \in D$ et

$$\|uv\|^2 \leq (\sup_{x \in X} |u(x)|) \|v\| + (\sup_{x \in X} |v(x)|) \|u\| \leq 2C \|u\| \|v\|,$$

d'où D est une algèbre de Dirichlet. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 3. *Soit G une noyau-fonction continue qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) dans le théorème. Alors, pour que G soit finie*

dans $X \times X$, il faut et il suffit que, quel que soit ω un ouvert relativement compact de X , le sous-espace fermé $H_\omega(G)$ obtenu par la complété de $\{\varphi \in C_K \cap H(G); S_\varphi \subset \omega\}$ soit une algèbre de Dirichlet relatif à ω et à ξ .

Cela peut être montré immédiatement de la présente proposition.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45**, 1959, p. 208–215.
- [2] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**, 1965, p. 87–98.
- [3] M. Itô, Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J. **44**, 1971, p. 133–164.
- [4] —, Sur les noyaux d'ordre fractionnaire associés au noyau de Dirichlet, Hiroshima Math. J., **1**, 1971, 123–143.
- [5] M. Kishi, Maximum principles in the potential theory, Nagoya Math. J., **23**, 1963, p. 165–187.
- [6] N. Ninomiya, Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. Ser. A, **8**, 1957, p. 147–179.

Institut Mathématique, Université de Nagoya