Compositio Math. 144 (2008) 439–483
doi:10.1112/S0010437X07002990

Facteurs epsilon p-adiques

Adriano Marmora

Abstract

We develop and study the epsilon factor of a 'local system' of p-adic coefficients over the spectrum of a complete discrete valuation field K with finite residue field of characteristic $p > 0$. In the equal characteristic case, we define the epsilon factor of an overconvergent F-isocrystal over $\mathrm{Spec}(K)$, using the p-adic monodromy theorem. We conjecture a global formula, the p-adic product formula, analogous to Deligne's formula for étale ℓ-adic sheaves proved by Laumon, which explains the importance of this local invariant. Namely, for an overconvergent F-isocrystal over an open subset of a projective smooth curve X, the constant of the functional equation of the L-series is expressed as a product of the local epsilon factors at the points of X. We prove the conjecture for rank-one overconvergent F-isocrystals and for finite unit-root overconvergent F-isocrystals. In the mixed characteristic case, we study the behavior of the epsilon factor by deformation to the field of norms.

1. Introduction

Dans cet article, nous développons la théorie des *facteurs epsilon* des « systèmes locaux » p-adiques sur $\mathrm{Spec}(K)$, où K est un corps de valuation discrète complet, de corps résiduel k fini de caractéristique $p > 0$.

Soient C un corps de caractéristique zéro, $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial, μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C. À toute C-représentation (D, ρ) du groupe de Weil absolu W_K de K, Langlands [Lan70, Theorem 1] et Deligne [Del73, théorème 4.1] associent un invariant $\varepsilon(D, \psi, \mu)$ dans C^*, appelé facteur epsilon. C'est une généralisation de la constante locale de la thèse de Tate en dimension 1 (voir [Tat67, Theorem 2.4.1]). Cette définition s'étend aux représentations de Weil–Deligne (D, ρ, N), où N est un endomorphisme nilpotent de D satisfaisant à une donnée de compatibilité avec ρ, cf. § 2.2.

Considérons d'abord le cas où K est de caractéristique nulle. Les systèmes locaux p-adiques sur $\mathrm{Spec}(K)$ sont les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu G_K de K, qui sont de de Rham dans la classification de Fontaine. Grâce au théorème de monodromie p-adique (cf. [And02], [Berg02], [Ked04] et [Meb02]), on sait qu'elles sont potentiellement semi-stables. La définition des conducteurs et du facteur epsilon d'une telle représentation V est due à Fontaine et Perrin-Riou (cf. [Fon94b, § 1.3.5] et [Per95, appendice C, § 1.4]) : soient C le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $\mathrm{W}(k)$ de k, et C^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de C. On considère le module de Fontaine $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ associé à V : il est muni d'une structure de C^{nr}-*module de Deligne de* K (i.e. un C^{nr}-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire discrète de G_K, d'un isomorphisme de Frobenius et d'un opérateur de monodromie, vérifiant les compatibilités usuelles), et il est de dimension égale à celle de V, car V est potentiellement semi-stable. En linéarisant

Received 23 August 2006, accepted in final form 3 March 2007, published online 7 February 2008.
2000 Mathematics Subject Classification 12H25 (primary), 11S15, 14F30 (secondary).
Keywords: overconvergent F-isocrystals, epsilon factors, product formula, de Rham representations, norms field theory.
Part of this work has been supported by JSPS postdoctoral fellowship number PE06005.

l'action discrète de G_K par le Frobenius, on obtient une C^{nr}-représentation de Weil–Deligne $D = (\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V), \rho, N)$. On définit le facteur epsilon $\varepsilon(V, \psi, \mu)$ comme étant égal à $\varepsilon(D, \psi, \mu)$.

Supposons maintenant que K soit de caractéristique $p > 0$. Les représentations du groupe de Galois ne fournissent alors qu'une sous-catégorie de celle qu'on est amené à étudier. Soient C une extension finie du corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $\mathrm{W}(k)$ de k, munie d'un endomorphisme de Frobenius fixant une uniformisante, C^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de C, et $\mathcal{R}$ l'anneau de Robba sur K à coefficients dans C. La catégorie naturelle des systèmes locaux p-adiques sur $\mathrm{Spec}(K)$ est celle des *F-isocristaux surconvergents* sur $\mathrm{Spec}(K)$. Précisément, il s'agit des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$, i.e. des modules libres de rang fini sur $\mathcal{R}$, munis d'une connexion et d'un endomorphisme de Frobenius compatibles. Parmi ceux-ci, les F-isocristaux surconvergents unités correspondent aux représentations galoisiennes à monodromie géométrique locale finie, cf. [Tsu98a].

Pour associer des facteurs epsilon aux F-isocristaux surconvergents sur $\mathrm{Spec}(K)$, on procède d'une façon analogue au cas d'inégales caractéristiques. Par le théorème de monodromie p-adique (cf. [And02], [Ked04] et [Meb02]), tout (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ admet une base de sections horizontales sur le « revêtement universel » $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{R}(L)[\log T]$ de $\mathcal{R}$, où la limite est prise sur les extensions galoisiennes finies L de K, et $\mathcal{R}(L)$ est l'anneau de Robba sur L, cf. § 3.2.2. L'espace $S(M)$ des sections horizontales de $M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ hérite d'une structure de C^{nr}-module de Deligne de K. On obtient ainsi un foncteur $M \mapsto S(M)$ de la catégorie des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$ vers celle des C^{nr}-modules de Deligne de K, qu'on montre être une équivalence. Le module de Deligne $S(M)$ fournit, comme en inégales caractéristiques, une C^{nr}-représentation de Weil–Deligne, notée $\mathrm{WD}(M)$. On définit le facteur epsilon $\varepsilon(M, \psi, \mu)$ comme étant égal à $\varepsilon(\mathrm{WD}(M), \psi, \mu)$.

Pour un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$, Robba et Christol-Mebkhout ont défini l'irrégularité p-adique sur le modèle des équations différentielles classiques [CM02, théorème 14.11]. Par un théorème de Matsuda et Tsuzuki (cf. [Mat02, Theorem 8.6] et [Tsu98b, Theorem 7.2.2]), l'irrégularité coïncide avec le conducteur de Swan. On s'intéresse dans cet article à l'analogue de ce théorème pour le facteur epsilon ; autrement dit on cherche une interprétation différentielle du facteur epsilon. Notre approche est de nature globale. On note $\mathbb{P}^1$ la droite projective sur k, $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif sur k, et pour tout point fermé x de $\mathbb{P}^1$, K_x le corps des fractions du complété de l'anneau local de $\mathbb{P}^1$ en x, $\eta_x = \mathrm{Spec}(K_x)$. Tout F-isocristal M sur $\mathbb{G}_m$ surconvergent le long $\{0, \infty\}$, fournit par image inverse un (φ, ∇)-module M_{η_x} sur $\mathcal{R}(\eta_x)$, où $\mathcal{R}(\eta_x)$ est l'anneau de Robba sur K_x. Inversement, Matsuda [Mat02] a construit un foncteur d'extension canonique $M \mapsto M^{\mathrm{can}}$, analogue p-adique de l'extension canonique de Katz-Gabber : c'est un foncteur de la catégorie des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$ vers celle des F-isocristaux sur $\mathbb{G}_m$ surconvergents le long $\{0, \infty\}$, tel que l'image inverse de M^{can} en 0 (respectivement ∞) soit isomorphe à M (respectivement moderée). Dans le cas des F-isocristaux surconvergents unités, une construction de l'extension canonique avait été donnée par Crew [Cre92]. Les objets dans l'image essentielle du foncteur d'extension canonique sont appelés F-isocristaux *spéciaux* sur $\mathbb{G}_m$. Le choix d'une forme différentielle méromorphe ω sur $\mathbb{P}^1$ non-nulle détermine, pour tout point fermé x de $\mathbb{P}^1$, un caractère additif ψ_x de K_x. On en déduit une famille de facteurs epsilon $\varepsilon(M^{\mathrm{can}}_{\eta_x}, \psi_x)$, dont celui en $x = 0$ est le facteur epsilon de M. Comme dans le cas étale ℓ-adique, il est raisonnable de s'attendre à ce que ces facteurs soit reliés par une formule. En effet, pour un faisceau constructible ℓ-adique sur une courbe propre et lisse X sur k, Deligne a conjecturé que la constante globale de l'équation fonctionnelle de sa série L s'exprime comme le produit des facteurs epsilon locaux aux points fermés de X. Cette conjecture a été démontrée par Laumon [Lau87, théorème 3.2.1.1]. On formule un analogue p-adique de cette formule pour les F-isocristaux sur un ouvert non-vide U de X surconvergeant le long de $X \backslash U$, cf. conjecture 4.3.5. On démontre cette conjecture dans deux cas : pour les F-isocristaux surconvergents de rang 1 ; et pour les F-isocristaux surconvergents unités finis, i.e. ayant monodromie globale finie. La démonstration du premier cas consiste à comparer l'équation fonctionnelle en cohomologie rigide avec l'équation fonctionnelle de Tate. Le deuxième cas se ramène au premier par induction de Brauer.

Nous revenons à la fin de cet article au cas d'inégales caractéristiques. Dans un travail précédent, nous avons établi un théorème de comparaison entre conducteur de Swan et irrégularité dans l'esprit du théorème de Matsuda–Tsuzuki, cf. [Mar04, théorème 1]. Soient, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $K_r = K(\mu_{p^r})$ l'extension de K obtenue en ajoutant les racines p^r-ièmes de l'unité, V une représentation de de Rham de G_K, $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ le (φ, ∇)-module associé à V par Berger, V_r la restriction de V au groupe de Galois absolu G_{K_r} de K_r. Alors la suite $(\mathrm{sw}(V_r))_{r\in\mathbb{N}}$ des conducteurs de Swan est stationnaire de limite égale à l'irrégularité de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Dans la dernière section de cet article, on étend ce résultat aux facteurs epsilon. On se donne une extension arithmétiquement profinie K_∞ de K, qu'on peut supposer totalement ramifiée pour simplifier. On note, pour tout $r \in \mathbb{N}$, K_r la r-ième sous-extension élémentaire de K_∞, $\mathcal{O}_{K_r}$ l'anneau des entiers de K_r, et E_K (respectivement $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$) le corps des normes associé à K_∞ (respectivement l'anneau des entiers de E_K). Le corps E_K est de valuation discrète, complet, d'égale caractéristique, de corps résiduel égal à k et de groupe de Galois absolu G_{E_K} canoniquement isomorphe à celui de K_∞, noté H_K. Soient C le corps des fractions de $\mathrm{W}(k)$ et C^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de C. On pose $D = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et on note D_∞ la restriction de D à H_K, considérée comme C^{nr}-module de Deligne de E_K, qu'on appelle *déformation* de D au corps des normes. Ce module correspond, par l'équivalence décrite plus haut, à un F-isocristal surconvergent M sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{E}_K)$. Notre but est d'étudier les facteurs epsilon des restrictions V_r de V à G_{K_r} et de les comparer au facteur epsilon de M. La difficulté tient dans le choix des caractères additifs $\theta\colon \mathrm{E}_K \to C^*$ et, pour tout r, $\psi_r\colon K_r \to C^*$. Pour ce faire, on introduit la notion de *tour admissible* de caractères additifs : c'est une suite de caractères additifs $(\psi_r\colon K_r \to C^*)_{r\in\mathbb{N}}$, satisfaisant une condition qui permet d'en déduire un caractère additif limite $\psi_\infty\colon \mathrm{E}_K \to C^*$. On montre que tout caractère additif θ de E_K est limite d'une telle tour. Soient V une représentation de de Rham de G_K, $\theta\colon \mathrm{E}_K \to C^*$ un caractère additif non-trivial, $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible convergente vers θ, et pour tout $r \in \mathbb{N}$, μ_r (respectivement μ_∞) une mesure de Haar sur K_r (respectivement E_K) à valeurs dans C, normalisée par $\mu_r(\mathcal{O}_{K_r}) = \mu_\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K})$. On montre que la suite des facteurs epsilon $(\varepsilon(V_r, \psi_r, \mu_r))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite $\varepsilon(M, \theta, \mu_\infty)$. En particulier, si K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K, alors $M = \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on obtient une généralisation de [Mar04, théorème 1] aux facteurs epsilon.

Ce texte est divisé en cinq sections, la première étant cette introduction. La deuxième section contient des rappels sur les représentations de Weil–Deligne et leurs constantes locales. La troisième est consacrée aux F-isocristaux sur un corps local d'égale caractéristique, appelés aussi (φ, ∇)-modules. On démontre l'équivalence tannakienne entre la catégorie des (φ, ∇)-modules sur l'anneau de Robba et la catégorie des modules de Deligne. Dans § 3.3, on fait le lien avec le théorème de classification de Tsuzuki pour les (φ, ∇)-modules unités. Dans § 3.4, on définit les constantes locales associées à un F-isocristal. La quatrième section concerne la formule du produit pour les F-isocristaux surconvergents sur une courbe. Après des rappels sur les F-isocristaux et leurs fonctions L, on énonce la conjecture de la formule du produit (conjecture 4.3.5), et on la démontre pour les F-isocristaux surconvergents de rang 1 (théorème 4.3.14), et pour les F-isocristaux surconvergents unités finis (théorème 4.3.15). La cinquième section traite de la déformation au corps des normes du facteur epsilon. Enfin dans § 5.4, on donne les applications au facteur epsilon d'une représentation de de Rham.

1.1 Conventions

Soient G un groupe, A un anneau commutatif, M un A-module. Supposons que G agit à gauche sur A par des automorphismes d'anneaux. On dira que M est muni d'une action *semi-linéaire* de

G s'il est muni d'un homomorphisme $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ tel que pour tout $\gamma \in G$, $a \in A$ et $m \in M$, on a $\rho(\gamma)(am) = \gamma(a)\rho(\gamma)(m)$.

Si A est muni d'un endomorphisme σ, on dit qu'un homomorphisme de groupes $f\colon M \to N$ est un morphisme *σ-linéaire* si pour tout $m \in M$ et $a \in A$, on a $f(am) = \sigma(a)f(m)$.

2. Constantes locales des représentations de Weil–Deligne

2.1 On désigne par K un corps de valuation discrète complet. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K, $\mathfrak{m}_K$ son idéal maximal et k son corps résiduel qu'on suppose fini de cardinal $q = p^f$. On note v_K la valuation de K normalisée par $\mathrm{v}_K(K^*) = \mathbb{Z}$, et $\|x\|_K = q^{-\mathrm{v}_K(x)}$ la valeur absolue d'un élément x de K.

Soient K^{sep} une clôture séparable de K, k^{sep} le corps résiduel de K^{sep} (qui est une clôture séparable de k), G_K (respectivement G_k) le groupe de Galois de K^{sep} sur K (respectivement k^{sep} sur k) et I_K le groupe d'inertie de K. On note σ le Frobenius absolu de k^{sep}, défini par $\sigma(x) = x^p$. L'automorphisme $\mathrm{F}^* = \sigma^{-f}$ est un générateur topologique de G_k, qui l'identifie à $\widehat{\mathbb{Z}}$, et induit ainsi un homomorphisme $\nu : G_K \to \widehat{\mathbb{Z}}$. On appelle groupe de Weil de K^{sep} sur K et on note W_K le sous-groupe de G_K image inverse de $\mathbb{Z}$ par ν. Cette définition ne dépend pas du générateur topologique de G_k choisi. On appellera *Frobenius géométrique* tout élément de W_K qui relève F^*.

Pour toute extension finie L de K, W_L est un sous-groupe d'indice fini de W_K ; si de plus L/K est galoisienne, alors W_L est distingué dans W_K et le quotient s'identifie au groupe de Galois de L sur K.

2.2 Soit C un corps de caractéristique 0. On dit qu'une représentation de W_K dans un C-espace vectoriel de dimension finie est une *représentation de Weil* si elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K. On notera $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ la catégorie abélienne des C-représentations de Weil de K.

Une *C-représentation de Weil–Deligne* de K est la donnée d'une représentation de Weil (V, ρ) de K, munie d'une application C-linéaire $N\colon V \to V$ nilpotente, telle que, pour tout w dans W_K, on ait $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = q^{\nu(w)}N$. On note $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$ la catégorie des C-représentations de Weil–Deligne de K, les morphismes étant les applications linéaires qui commutent aux actions de W_K et N.

Une C-représentation de Weil de K est une représentation de Weil–Deligne en prenant $N = 0$. On identifie ainsi $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ à une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$. Le foncteur $(V, \rho, N) \mapsto (\mathrm{Ker}\, N, \rho_{|\,\mathrm{Ker}\, N})$, de $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$ dans $\mathrm{Rep}_C(W_K)$, est un adjoint à droite de l'inclusion et aussi un quasi-inverse à gauche.

La proposition suivante est bien connue, cf. [Lau87, preuve de la proposition 3.2.1.7] et [Mar06, partie 2, proposition 1.1.3].

Proposition 2.3. *Supposons C algébriquement clos et soit (V, ρ) une C-représentation irréductible de Weil de K. Alors il existe un caractère non ramifié $\chi\colon W_K \to C^*$ et une C-représentation (V, ρ') de W_K qui se factorise par un quotient fini, tels que $\rho = \rho' \otimes \chi$.*

2.4 La théorie du corps de classe local fournit un isomorphisme, dit de réciprocité, entre le plus grand quotient abélien W_K^{ab} de W_K et K^*, normalisé de sorte que la classe d'un Frobenius géométrique corresponde à une uniformisante de K. On note $r_K\colon W_K \to K^*$ l'homomorphisme obtenu en composant la projection canonique de W_K sur W_K^{ab} avec l'isomorphisme de réciprocité. Se donner une C-représentation de Weil de K de rang 1 revient à se donner un homomorphisme localement constant $K^* \to C^*$. Un tel homomorphisme est classiquement appelé *quasi-caractère*. Il est dit non ramifié s'il est trivial sur $\mathcal{O}_K^*$; il correspond alors à une C-représentation de Weil non-ramifiée de rang 1.

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

2.5 Soit Γ un groupe commutatif. On note Γ_p (respectivement Γ_{p^∞}) le sous-groupe de Γ des éléments d'ordre p (respectivement une puissance de p). On appelle *caractère additif de K à valeurs dans* Γ un homomorphisme localement constant du groupe additif de K dans Γ, K étant muni de la topologie induite par la valuation v_K. Un tel homomorphisme se factorise par Γ_{p^∞} (en fait par Γ_p si K est de caractéristique p). On s'intéresse surtout aux cas $\Gamma = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et $\Gamma = C^*$. Dans le second cas, on notera $\mu_{p^\infty}(C) = \Gamma_{p^\infty}$ et $\mu_p(C) = \Gamma_p$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, \Gamma)$ le groupe des caractères additifs de K à valeurs dans Γ.

Soit ψ un caractère additif non-trivial de K à valeurs dans Γ. On appelle codifférente de ψ et on note $\mathcal{D}(\psi)^{-1}$, l'idéal fractionnaire de K défini par $\mathcal{D}(\psi)^{-1} = \{x \in K \mid \forall y \in \mathcal{O}_K, \psi(xy) = 1\}$. L'inverse de la codifférente, noté $\mathcal{D}(\psi)$, est appelé différente ; on étend cette définition en posant $\mathcal{D}(1_K) = (0)$, où 1_K est le caractère trivial. On appelle ordre de ψ et on note $d(\psi)$, la valuation de la différente $d(\psi) = \mathrm{v}_K(\mathcal{D}(\psi)) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \psi(\mathfrak{m}_K^{-n}) = 1\}$.

L'action de K sur lui même par multiplication induit une action de K sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, \Gamma)$ qui en fait un K-espace vectoriel.

PROPOSITION 2.6 [Tat67, Lemma 2.2.1]. *La dimension de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ *sur K est égale à* 1. *La dimension de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, C^*)$ *sur K est inférieure ou égale à* 1 *; si C est algébriquement clos, elle vaut* 1.

2.7 Supposons K de caractéristique p. Il existe alors un homomorphisme canonique $k \to \mathcal{O}_K$ inverse à gauche de l'homomorphisme de reduction $\mathcal{O}_K \to k$. On désigne par $\Omega^1_{K/k}$ l'espace vectoriel des différentielles de K/k, et par $d\colon K \to \Omega^1_{K/k}$ la dérivation canonique. Observons que $\Omega^1_{K/k}$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 car k est parfait.

Il existe un homomorphisme canonique, $\mathcal{O}_K$-linéaire, $\mathrm{Res}_k\colon \Omega^1_{K/k} \to k$, appelé résidu, défini par la propriété suivante : pour toute uniformisante π de K et tout entier m, $\mathrm{Res}_k(\pi^m d\pi) = \delta_{m,-1}$, où $\delta_{m,-1}$ est le symbole de Kronecker.

Il existe une application canonique, notée abusivement $\mathrm{v}_K\colon \Omega^1_{K/k} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, définie par la propriété suivante: pour tout $a \in K$ et toute uniformisante π de K, $\mathrm{v}_K(a d\pi) = \mathrm{v}_K(a)$.

On observe que tout caractère additif $K \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ se factorise par le sous-groupe $\frac{1}{p}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}_p$.

LEMME 2.8 [Lau87, remarque 3.1.3.6]. *Supposons K de caractéristique p. L'application de $\Omega^1_{K/k}$ dans* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, \mathbb{F}_p)$*, qui à ω associe le caractère additif* $\psi_\omega\colon x \mapsto \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(\mathrm{Res}_k(x\omega))$*, est un isomorphisme. L'ordre de ψ_ω est égal à* $\mathrm{v}_K(\omega)$.

2.9 Soit $\phi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial d'ordre d. Par la proposition 2.6, l'homomorphisme

$$\Phi(\phi)\colon K \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, C^*),$$

qui à η associe le caractère $x \mapsto \phi(\eta x)$ est un isomorphisme. Si $\eta \in K$, alors $d(\Phi(\phi)(\eta)) = d + \mathrm{v}_K(\eta)$. Donc $\Phi(\phi)$ envoie $\mathcal{O}_K$ dans le sous-groupe $\mathrm{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, C^*)$. On note abusivement cette restriction

$$\Phi(\phi)\colon \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathrm{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*).$$

On vérifie facilement que c'est un isomorphisme. Pour tout $n \leqslant -d$, l'homomorphisme composé de $\Phi(\phi)$ avec la restriction $\mathrm{res}_n\colon \mathrm{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_K^{n}/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$ a pour noyau

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{res}_n \circ \Phi(\phi)) = \{\eta \in \mathcal{O}_K \mid \phi(\eta\mathfrak{m}_K^{n}) = 1\} = \mathfrak{m}_K^{-n}\mathcal{D}(\phi)^{-1} = \mathfrak{m}_K^{-n-d}.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

On obtient ainsi un monomorphisme

$$\Phi_n(\phi)\colon \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$$

entre groupes de même ordre, donc un isomorphisme. Pour résumer, on a le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\Phi(\phi)"', "\wr"] & \mathcal{O}_K \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi(\phi)"', "\wr"] & \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \arrow[d, "\Phi_n(\phi)"', "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_c(K, C^*) & \mathrm{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}_n"] & \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)
\end{tikzcd}$$

2.10 Soit (V, ρ) une C-représentation de Weil de W_K. On note $\mathrm{sw}(V)$ (respectivement $\mathrm{ar}(V)$) le conducteur de Swan (respectivement Artin) de la restriction de ρ à I_K (cf. [Ser67, § 19]). Si F^* est un Frobenius géométrique de W_K, on pose,

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(\mathrm{F}^*) \mid V^{I_K})^{-1} \in C[\![t]\!].$$

Cette série formelle ne dépend évidemment pas du Frobenius choisi.

2.11 Soit μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C (cf. [Del73, § 6.1]). Pour tout $x, y \in K$, on a $\mu(x + y\mathcal{O}_K) = \|y\|_K \mu(\mathcal{O}_K)$. Donc μ est déterminé par $\mu(\mathcal{O}_K)$, et si μ' est une mesure de Haar sur K, il existe $a \in C^*$, tel que $\mu' = a\mu$.

Définition 2.12 [Del73, § 3.4.3]. Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère, $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial, μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C et π une uniformisante de K. On appelle *facteur epsilon* de (χ, ψ, μ) l'élément de C^* défini par

$$\varepsilon(\chi, \psi, \mu) = \begin{cases} \chi(\pi)^{d(\psi)} q^{d(\psi)} \mu(\mathcal{O}_K) & \text{si } \chi \text{ est non-ramifié ;} \\ \displaystyle\int_{K^*} \chi^{-1}\psi\mu & \text{si } \chi \text{ est ramifié.} \end{cases}$$

Cela ne dépend pas du choix de l'uniformisante π.

2.13 Pour une catégorie abélienne A, on notera $\mathbf{Gr}(A)$ son groupe de Grothendieck. Pour tout objet V de A, on notera $[V]$ la classe de V dans $\mathbf{Gr}(A)$. On appelle C-représentation *virtuelle* de Weil de K un élément de $\mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_K))$.

Théorème 2.14 [Del73, théorème 4.1]. *Soient $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C. Il existe un unique homomorphisme*

$$\varepsilon(\,\cdot\,, \psi, \mu)\colon \mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_K)) \longrightarrow C^*$$

vérifiant les conditions suivantes :

(1) *pour tout $a \in C^*$ et toute C-représentation virtuelle de Weil λ de K, on a*

$$\varepsilon(\lambda, \psi, a\mu) = a^{\dim\lambda}\varepsilon(\lambda, \psi, \mu) ;$$

(2) *pour toute extension séparable finie L de K contenue dans K^{sep}, pour toute C-représentation virtuelle de Weil λ de L de rang 0, on a*

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda, \psi, \mu) = \varepsilon(\lambda, \psi \circ \mathrm{tr}_{L/K}, \mu),$$

où $\mathrm{tr}_{L/K}$ désigne la trace de L à K et $\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda$ la C-représentation virtuelle de Weil de K induite par λ ;

(3) *si V est de rang 1, de quasi-caractère associé $\chi\colon K^* \to C^*$, alors $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ est la constante $\varepsilon(\chi, \psi, \mu)$ définie dans définition 2.12.*

Remarque 2.15. (i) Dans [Del73, théorème 4.1], le corps C est supposé algébriquement clos. On montre immédiatement par descente galoisienne que cette hypothèse est superflue (cf. aussi [Del73, théorème 6.5]).

(ii) Si λ est de dimension zéro, $\varepsilon(\lambda, \psi, \mu)$ ne dépend pas de μ en vertu de (1) ; on le notera $\varepsilon(\lambda, \psi)$. Pour $V \in \mathrm{Rep}_C(W_K)$, on notera simplement $\varepsilon(V, \psi, \mu)$ au lieu de $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ et on l'appellera *facteur epsilon* de la C-représentation de Weil V.

2.16 Soit (V, ρ, N) une C-représentation de Weil–Deligne de K. On note abusivement par V la C-représentation de Weil–Deligne (V, ρ, N) et par V° la C-représentation de Weil (V, ρ). Soit F^* un Frobenius géométrique de W_K. On définit les conducteurs d'Artin et de Swan de V par les formules [Del73, (8.12.1)] :

$$\begin{aligned}\mathrm{ar}(V) &= \mathrm{sw}(V^\circ) + \dim_C V - \dim_C (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K},\\ \mathrm{sw}(V) &= \mathrm{sw}(V^\circ).\end{aligned}$$

On appelle *fonction* L de V et on note $L(V, t)$, la série formelle définie par [Del73, (8.12.2)]

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(\mathrm{F}^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K})^{-1} \in C[\![t]\!].$$

Pour un caractère additif non-trivial $\psi\colon K \to C^*$ et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C, on pose [Del73, §§ 5.1 et 8.12]

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V^\circ, \psi, \mu) \det_C(-\rho(\mathrm{F}^*) \mid (V^{I_K}/(\mathrm{Ker}\, N)^{I_K})).$$

On définit aussi le *facteur epsilon modifié* par la formule [Del73, (8.12.4)]

$$\varepsilon_0(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V, \psi, \mu) \det_C(-\rho(\mathrm{F}^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}).$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix du Frobenius géométrique F^*. Lorsque $N = 0$, elles coïncident avec les définitions données plus haut pour une représentation de Weil, cf. §§ 2.2 et 2.10 et le théorème 2.14.

2.17 On pose $U_K(0) = \mathcal{O}_K^*$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $U_K(n) = 1 + \mathfrak{m}_K^n$. Soit $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère. On note $\mathrm{ar}(\chi)$ le plus petit entier naturel tel que $U_K(\mathrm{ar}(\chi)) \subseteq \mathrm{Ker}\, \chi$; c'est le conducteur d'Artin de la C-représentation de Weil de rang 1 associée à χ.

Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère et $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial. On note c la partie entière de $\mathrm{ar}(\chi)/2$ et $c^+ = \mathrm{ar}(\chi) - c \geqslant c$. Pour tout $y, z \in K$ tels que $\mathrm{v}_K(y) \geqslant c^+$ et $\mathrm{v}_K(z) \geqslant c^+$, on vérifie facilement que $\chi(1 + y + z) = \chi(1 + y)\chi(1 + z)$, cf. [Del73, lemme 4.16]. On en déduit un homomorphisme

$$\begin{aligned}\overline{\chi}\colon \mathfrak{m}_K^{c^+}/\mathfrak{m}_K^{\mathrm{ar}(\chi)} &\longrightarrow C^*\\ \mathrm{cl}(y) &\longmapsto \chi(1 + y).\end{aligned}$$

On vérifie par § 2.9 (cf. [Del73, lemme 4.16]) qu'il existe un élément $a \in K^*$ tel que :

$$\forall y \in K \mid 2\mathrm{v}_K(y) \geqslant \mathrm{ar}(\chi), \quad \chi(1 + y) = \psi(ay). \tag{2.17.1}$$

On appelle un élément $a \in K^*$ satisfaisant (2.17.1) une *ψ-jauge* de χ. On vérifie que $\mathrm{v}_K(a) = -\mathrm{ar}(\chi) - d(\psi)$, que sa classe dans $K^*/U_K(c)$ est uniquement déterminée et que tout élément de cette classe est une ψ-jauge.

PROPOSITION 2.18 [DH81, § 1.2]. *Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère, $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial et a une ψ-jauge de χ. On note 1_K le quasi-caractère trivial de K.*

(1) *Si* $\mathrm{ar}(\chi) = 2c$ *est pair, on a*

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \frac{\psi(a)}{\chi(a)}.$$

(2) *Si* $\mathrm{ar}(\chi) = 2c + 1$ *est impair, on a*

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \sum_{\overline{\beta} \in U_K(c)/U_K(c+1)} \frac{\psi(a\beta)}{\chi(a\beta)},$$

où β *est un relèvement de* $\overline{\beta}$ *dans* $U_K(c)$.

Proposition 2.19 [Del73, § 5, (5.4) et (5.5.3)]. *Soient* V *une* C*-représentation de Weil de* K*,* $\psi \colon K \to C^*$ *un caractère additif non-trivial et* μ *une mesure de Haar sur* K *à valeurs dans* C*.*

(1) *Pour tout* $a \in K^*$*,*

$$\varepsilon(V, \psi(a\,\cdot), \mu) = \det V(a) q^{\mathrm{v}_K(a) \dim V} \varepsilon(V, \psi, \mu),$$
$$\varepsilon_0(V, \psi(a\,\cdot), \mu) = \det V(a) q^{\mathrm{v}_K(a) \dim V} \varepsilon_0(V, \psi, \mu),$$

où $\det V(a)$ *désigne la valeur en* a *du quasi-caractère associé à* $\det V$*.*

(2) *Si* (W, ρ) *est une* C*-représentation de Weil de* K *non ramifiée, alors*

$$\varepsilon(V \otimes W, \psi, \mu) = \det \rho(\mathrm{F}^{*\,\mathrm{ar}(V) + d(\psi) \dim V}) \varepsilon(V, \psi, \mu)^{\dim W},$$
$$\varepsilon_0(V \otimes W, \psi, \mu) = \det \rho(\mathrm{F}^{*\,\mathrm{sw}(V) + (d(\psi)+1) \dim V}) \varepsilon_0(V, \psi, \mu)^{\dim W} \;;$$

où F^* *est un Frobenius géométrique de* W_K*. En particulier,*

$$\varepsilon(W, \psi, \mu) = \det \rho(\mathrm{F}^{*\,d(\psi)}) q^{d(\psi) \dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W},$$
$$\varepsilon_0(W, \psi, \mu) = \det \rho(\mathrm{F}^{*\,d(\psi)+1}) (-1)^{\dim W} q^{d(\psi) \dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W}.$$

3. *F*-isocristaux sur un corps local

3.0.1 Dans cette section, K désigne un corps de valuation discrète, complet de caractéristique $p > 0$, à corps résiduel k parfait. A partir de § 3.4, on supposera k fini de cardinal $q = p^f$. On reprend les notations de § 2.1. On fixe une uniformisante de K, ce qui détermine un isomorphisme $\mathcal{O}_K \cong k[\![T]\!]$. Par extension finie séparable de K, on sous-entend une extension finie contenue dans K^{sep}. Pour une telle extension L, on notera $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L (respectivement $\mathfrak{m}_L$) le corps résiduel (respectivement l'idéal maximal) de $\mathcal{O}_L$ et G_L le groupe de Galois de K^{sep} sur L.

3.0.2 Soient $h \geqslant 1$ un entier tel que k contienne un sous-corps de cardinal[1] p^h qu'on note $\mathbb{F}$, et Λ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}$. On note $\mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et on pose $C = \Lambda \otimes_{\mathrm{W}(\mathbb{F})} \mathrm{W}(k)$. C'est un corps de valuation discrète complet de corps résiduel k. On note $\mathcal{O}_C$ (respectivement $\mathfrak{m}_C$) l'anneau des entiers de C (respectivement l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$), v_C la valuation de C normalisée par $\mathrm{v}_C(C^*) = \mathbb{Z}$ et $\|x\| = p^{-h\mathrm{v}_C(x)}$ la valeur absolue d'un élément $x \in C$. On munit C de l'endomorphisme $\sigma_C = \mathrm{Id}_\Lambda \otimes \sigma^h$, où σ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{W}(k)$. Le sous-corps de C fixé par σ_C est Λ. On dit que σ_C est un Frobenius *d'ordre* h de C. Soit π une uniformisante de Λ, donc π est une uniformisante de C telle que $\sigma_C(\pi) = \pi$. On pose $e = [C : \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k)] = [\Lambda : \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathbb{F})]$. Les corps C et Λ apparaîtront dans la suite comme des *corps de coefficients.*

[1] Il est usuel de poser $q = p^h$. Nous n'utilisons pas cette notation pour éviter toute confusion avec le cardinal de k dans le cas où ce dernier est fini.

3.1 Modules de Deligne

3.1.1 Un φ-module sur C est un C-espace vectoriel de dimension finie M muni d'une application σ_C-linéaire injective $\varphi\colon M \to M$. Comme M est de dimension finie et σ_C est un isomorphisme, φ est un isomorphisme σ_C-linéaire, qu'on appelle *Frobenius* de M. Un morphisme de φ-modules sur C est une application linéaire commutant aux Frobenius. On désigne par $\Phi M(C)$ la catégorie des φ-modules sur C.

Un (φ, N)-module sur C est un φ-module M sur C, muni d'un endomorphisme N du C-espace vectoriel sous-jacent à M, tel que $N\circ\varphi = p^h\varphi\circ N$. Comme M est de dimension finie, N est nilpotent. On appellera N l'*opérateur de monodromie* de M. Un morphisme de (φ, N)-modules sur C est un morphisme de φ-modules commutant aux opérateurs de monodromie. On désigne par $\Phi M_{\log}(C)$ la catégorie des (φ, N)-modules sur C.

3.1.2 Soit L une extension finie séparable de K. On note C_L l'extension finie non-ramifiée de C de corps résiduel k_L. Elle est unique à isomorphisme unique près. En fait C_L est isomorphe à $C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k_L)$, car C et $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_L)$ sont linéairement disjoints sur $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k)$. On pose $C^{\mathrm{nr}} = \varinjlim C_L$, où la limite est prise sur toutes les extensions L/K finies et séparables contenues dans K^{sep}. On note $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ le complété p-adique de C^{nr}, il s'identifie à $C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}})$. On munit $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ de l'action de G_K produit tensoriel de l'action triviale sur C et de l'action naturelle sur $\mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}})$ via $G_K \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$. Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}}))$ est trivial, cf. [Ser68b, Lemma, p. III-33]. On en déduit que le sous-corps de $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ fixé par G_L est C_L. Le Frobenius σ_C de C s'étend de façon unique à C^{nr} et par continuité à $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$; on le note encore σ_C.

Définition 3.1.3 [Fon94b, § 1]. (1) Un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K est la donnée d'un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

(i) une action semi-linéaire continue de G_K triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K ;

(ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

(iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(2) Un C^{nr}-module de Deligne de K est la donnée d'un C^{nr}-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

(i) une action semi-linéaire discrète de G_K, i.e. telle que le stabilisateur de tout élément de V soit ouvert dans G_K ;

(ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

(iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(3) Soit L une extension finie galoisienne de K. Un C_L-module de Deligne de K est la donnée d'un C_L-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

(i) une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$;

(ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

(iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

Dans chacun de ces cas, on appelle N (respectivement φ) l'*opérateur de monodromie* (respectivement le *Frobenius*) de V.

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Un morphisme de modules de Deligne de K est une application linéaire équivariante qui commute aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On note $\mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$ la catégorie des C_L-modules de Deligne de K, $\mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$ la catégorie des C^{nr}-modules de Deligne de K, et de même pour $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. On vérifie aisément que ces catégories sont abéliennes et Λ-linéaires.

Remarque 3.1.4. Fontaine a introduit les modules de Deligne pour un corps local K d'inégale caractéristique [Fon94b, § 1]. Il appelle (φ, N, G_K)-modules les C^{nr}-modules de Deligne de K et p-modules de Deligne les $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de K. On uniformise ici la nomenclature en raison du rôle similaire que ces objets joueront dans la suite.

Exemple 3.1.5. On note $C^{\mathrm{nr}}(1)$ le C^{nr}-module de Deligne $(C^{\mathrm{nr}}, \pi^{-eh}\sigma_C, 0)$ de K. Pour tout C^{nr}-module de Deligne (V, φ, N) et tout entier n, on note $V(n)$ le C^{nr}-module de Deligne $(V, \pi^{-neh}\varphi, N)$. De même pour les $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules (respectivement C_L-modules) de Deligne de K.

3.1.6 Soient L une extension galoisienne finie de K, $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. L'extension des scalaires $V \mapsto V \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ induit un foncteur

$$-\otimes_{C_L}\widetilde{C}^{\mathrm{nr}} \colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)$$

définit comme suit: soit $(V, \varphi_V, N_V) \in \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$, on muni $W = V \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ de l'opérateur de monodromie $N_W = N_V \otimes \mathrm{Id}$, du Frobenius $\varphi_W = \varphi_V \otimes_{\sigma_C} \sigma_C$ et de l'action semi-linéaire diagonale de G_K. On vérifie facilement que (W, φ_W, N_W) est un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Comme $(\widetilde{C}^{\mathrm{nr}})^{G_L} = C_L$, ce foncteur est pleinement fidèle.

De façon analogue, l'extension des scalaires de C^{nr} à $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ induit un foncteur de complétion [Fon94b, § 1.2.1]

$$\underline{Co} \colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K).$$

Proposition 3.1.7 [Fon94b, proposition 1.2.2]. (1) *Soient $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, V un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Il existe une extension galoisienne finie L/K et un C_L-module de Deligne W de K, tel que $W \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}} \cong V$. On dit que V est* trivialisé *par L et que W est* une descente *de V à L.*

(2) *Le foncteur $\underline{Co}$ est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par*

$$\underline{D\acute{e}co} \colon \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K),$$

où, pour tout $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne V, $\underline{D\acute{e}co}(V)$ est le sous-ensemble de V formé des éléments de stabilisateur ouvert.

Démonstration. La démonstration est la même qu'en inégales caractéristiques. Il suffit de calquer la preuve de [Fon94b, proposition 1.2.2]. □

3.1.8 Soient $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ et V un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Par hypothèse, l'action de I_K sur V est linéaire et se factorise par un quotient fini. On peut donc définir son conducteur et ses pentes de Swan, cf. [Kat88, ch. 1, définitions 1.2 et 1.6] ; ces définitions ne dépendent pas du quotient choisi. On appelle ces invariants le *conducteur* et les *pentes de Swan* de V ; on note le premier $\mathrm{sw}(V)$.

3.2 (φ, ∇)-modules

3.2.1 Pour tout nombre rationnel $0 \leqslant \rho < 1$, on pose

$$\mathcal{A}([\rho, 1[) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in C, \forall \rho' \in [\rho, 1[, \lim_{n \to \pm\infty} \|a_n\| \rho'^n = 0 \right\}$$

l'anneau des séries convergentes sur la couronne $[\rho, 1[$ à coefficients dans C. C'est une C-algèbre topologique qui est un espace de Fréchet pour la topologie donnée par la famille des normes $\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n\|_{\rho'} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|\rho'^n$, pour $\rho \leqslant \rho' < 1$. On l'appelle anneau des *fonctions analytiques* sur la couronne $[\rho, 1[$. On appelle *anneau de Robba*, et on note $\mathcal{R}$, la réunion des $\mathcal{A}([\rho, 1[)$ pour ρ dans un voisinage (à gauche) de 1. C'est une C-algèbre topologique pour la topologie limite inductive.

On pose

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{R} \;\middle|\; \exists b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{Z}, \|a_n\| < b \right\}.$$

C'est un corps dit *corps des fonctions surconvergentes bornées*. Il est muni de la valuation discrète donnée par $\mathrm{v}_1(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n) = \min_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{v}_C(a_n)$. On note $\|\cdot\|_1 = p^{-h\mathrm{v}_1(\cdot)}$ la norme associée à v_1, dite *norme de Gauss*. L'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ de $\mathcal{E}^\dagger$ est hensélien. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à $k(\!(T)\!)$, donc à K par l'isomorphisme $K \cong k(\!(T)\!)$ fixé dans § 3.0.1. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est une $\mathcal{O}_C[\![T]\!][T^{-1}]$-algèbre et s'identifie à un sous-anneau du complété de $\mathcal{O}_C[\![T]\!][T^{-1}]$ pour la topologie $(\mathfrak{m}_C)$-adique.

On appelle *Frobenius d'ordre h* de $\mathcal{E}^\dagger$ un relèvement σ_C-linéaire et continu à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ du Frobenius $\sigma^h \colon x \mapsto x^{p^h}$ de K. Un tel homomorphisme se prolonge évidemment de façon unique à $\mathcal{E}^\dagger$. Tout Frobenius de $\mathcal{E}^\dagger$ se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu de $\mathcal{R}$, cf. [Mat02, § 2.2] ; on l'appelle *Frobenius* de $\mathcal{R}$. Dans la suite, on fixe un Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ d'ordre h de $\mathcal{E}^\dagger$; on notera $\sigma_{\mathcal{R}}$ son prolongement à $\mathcal{R}$.

Pour A un des anneaux $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{E}^\dagger$, on note $\widehat{\Omega}^1_{A/C}$ le A-module des différentielles continues de A sur C, $d\colon A \to \widehat{\Omega}^1_{A/C}$ la dérivation canonique. Par construction C s'identifie au *corps des constantes* $\mathrm{Ker}(d)$ de A. Par universalité, il existe un morphisme σ_A-linéaire, noté encore $\sigma_A \colon \widehat{\Omega}^1_{A/C} \to \widehat{\Omega}^1_{A/C}$ qui rend commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & \widehat{\Omega}^1_{A/C} \arrow[d, "\sigma_A"] \\ A \arrow[r, "d"] & \widehat{\Omega}^1_{A/C} \end{tikzcd}$$

Par la définition de Frobenius, la série $\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h}$ appartient à $1 + \mathfrak{m}_C\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$. Donc la série $\log(\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h})$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$. Soit $\mathcal{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans $\mathcal{R}$. On prolonge $\sigma_{\mathcal{R}}$ et $d\colon \mathcal{R} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ en un homomorphisme d'anneaux $\sigma_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X]$ et une C-dérivation $d\colon \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X] \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$, en posant

$$\sigma_{\mathcal{R}}(X) = p^h X + \log \frac{\sigma_{\mathcal{R}}(T)}{T^{p^h}},$$
$$dX = \frac{dT}{T}.$$

Dans la suite, on désignera par $\log T$ la variable X. On appelle *monodromie* de $\mathcal{R}[\log T]$, et on note $N\colon \mathcal{R}[\log T] \to \mathcal{R}[\log T]$, la $\mathcal{R}$-dérivation qui envoie $\log T$ en 1. On a $N\sigma_{\mathcal{R}} = p^h\sigma_{\mathcal{R}}N$. On définit, de façon analogue, un anneau $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$ muni d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie, et une dérivation $d\colon \mathcal{E}^\dagger[\log T] \to \mathcal{E}^\dagger[\log T] \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{E}^\dagger/C}$.

3.2.2 Soit L une extension finie séparable de K. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est hensélien de corps résiduel K, il existe une extension finie, séparable et non-ramifiée $\mathcal{E}^\dagger(L)$ de $\mathcal{E}^\dagger$ de corps résiduel L ; elle est unique à isomorphisme unique près. L'injection canonique $k_L \hookrightarrow L$ détermine un homomorphisme

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

$\mathrm{W}(k_L) \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ qui rend commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W}(k_L) \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^\dagger(L) \\ \mathrm{W}(k) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^\dagger \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On obtient donc une injection $C_L \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ fonctorielle en L, qui prolonge celle de C dans $\mathcal{E}^\dagger$.

On pose $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(L)$; c'est une extension étale finie de $\mathcal{R}$, donc $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} = \mathcal{R}(L) \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$. Comme $\mathcal{E}^\dagger$ est hensélien, les Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ et $\sigma_{\mathcal{R}}$ s'étendent de façon unique à $\mathcal{E}^\dagger(L)$ et $\mathcal{R}(L)$ respectivement, cf. [Mat02, § 2.2].

On pose $\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} = \varinjlim \mathcal{E}^\dagger(L)$, où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K. Suivant les notations de [Cre06], on pose

$$\mathcal{B}_0 = \varinjlim_{L/K} \mathcal{R}(L) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0[\log T]$$

où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K. On appelle $\mathcal{B}$ l'anneau des *hyperfonctions*. Par construction, les anneaux $\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}$, $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont des C^{nr}-algèbres. On a

$$\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{B}_0/C^{\mathrm{nr}}} = \varinjlim_{L/K} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} = \mathcal{B}_0\, dT,$$

et de même pour $\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}$. On définit une C^{nr}-dérivation $d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}_0} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{B}_0/C^{\mathrm{nr}}}$ en posant $d\log T = dT/T$.

Définition 3.2.3. Un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ est la donnée d'un triplet (M, ∇, φ) où :

(i) M est un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini ;

(ii) $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ est une connexion ;

(iii) $\varphi\colon M \to M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$-linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}$ et telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \arrow[d, "\varphi\otimes\sigma_{\mathcal{R}}"] \\ M \arrow[r, "\nabla"] & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \end{tikzcd}$$

On note $\Phi M(\mathcal{R})$ la catégorie des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$, les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius. On notera abusivement M au lieu de (M, ∇, φ).

3.2.4 On définit de même qu'en définition 3.2.3, les notions de (φ, ∇)-module sur $\mathcal{E}^\dagger$, ou sur $\mathcal{E}^\dagger(L)$, ou sur $\mathcal{R}(L)$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur $\mathcal{B}_0$ (voir § 3.2.2). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$, $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L))$, $\Phi M(\mathcal{R}(L))$ et $\Phi M(\mathcal{B}_0)$ les catégories des (φ, ∇)-modules sur ces anneaux.

On appelle aussi $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$ (respectivement $\Phi M(\mathcal{R})$) la catégorie des *F-isocristaux surconvergents* (respectivement *analytiques*) sur $\mathrm{Spec}(K)|C$.

Définition 3.2.5. Un (φ, ∇, N)-module sur $\mathcal{R}[\log T]$ est la donnée du quadruplet $(M, \nabla, \varphi, N_M)$ où :

(i) M est un $\mathcal{R}[\log T]$-module libre de rang fini ;

(ii) $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ est une connexion ;

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

(iii) $\varphi\colon M \to M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$-linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}[\log T]$ et telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \arrow[d, "\varphi\otimes\sigma_{\mathcal{R}}"] \\ M \arrow[r, "\nabla"] & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \end{tikzcd}$$

(iv) $N_M\colon M \to M$ est une N-dérivation de M (i.e. une application additive telle que, pour tout $m \in M$, $\alpha \in \mathcal{R}[\log T]$, on a $N_M(\alpha m) = N(\alpha)m + \alpha N_M(m)$), qui soit horizontale et telle que

$$N_M \circ \varphi = p^h \varphi \circ N_M.$$

On appelle N_M l'*opérateur de monodromie* de M. On note $\Phi M(\mathcal{R}[\log T])$ la catégorie des (φ, ∇, N)-modules sur $\mathcal{R}[\log T]$, les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On notera abusivement M au lieu de $(M, \nabla, \varphi, N_M)$.

3.2.6 On définit de même qu'en définition 3.2.5, les notions de (φ, ∇, N)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$, ou sur $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$, ou sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur $\mathcal{B}$ (voir § 3.2.2). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])$ et $\Phi M(\mathcal{B})$ les catégories des (φ, ∇, N)-modules sur ces anneaux.

3.2.7 On donne dans ce numéro une variante équivariante de la définition § 3.2.6, qui sera cruciale pour la classification des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$. Soient L/K une extension galoisienne finie, $(M, \varphi, \nabla, N_M)$ un (φ, ∇, N)-module sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$. Une *donnée de descente* sur M est la donnée d'une action semi-linéaire ρ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur M, commutant à φ et à N_M et qui soit horizontale au sens semi-linéaire, c'est-à-dire que pour tout γ dans $\mathrm{Gal}(L/K)$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\rho(\gamma)"'] & M \otimes_{\mathcal{R}(L)} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} \arrow[d, "\rho(\gamma)\otimes\gamma"] \\ M \arrow[r, "\nabla"] & M \otimes_{\mathcal{R}(L)} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} \end{tikzcd}$$

où $\gamma\colon \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L}$ est l'application γ-linéaire induite par universalité de l'action de γ sur $\mathcal{R}(L)$. On note $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$ la catégorie des (φ, ∇, N)-modules sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ muni d'une donnée de descente, les morphismes étant les morphismes de (φ, ∇, N)-modules qui sont équivariants par rapport aux données de descente. De même, on définit, *mutatis mutandis*, les catégories $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$ et $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$.

3.2.8 On résume dans le tableau suivant les anneaux introduits avec leurs opérateur de monodromie et leurs corps des constantes :

Anneau	N	$\mathrm{Ker}\, d$
$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{E}^\dagger$	0	C
$\mathcal{R}(L)$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)$	0	C_L
$\mathcal{R}[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$	$N \neq 0$	C
$\mathcal{R}(L)[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$	$N \neq 0$	C_L
$\mathcal{B}_0$	0	C^{nr}
$\mathcal{B}$	$N \neq 0$	C^{nr}

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

3.2.9 Soit M un (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$. On note M^{∇} le C-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\nabla$ des *sections horizontales* de M. On montre facilement que la dimension sur C de M^{∇} est inférieure ou égale au rang de M et cet espace hérite de M d'une structure de φ-module sur C, cf. § 3.1.1. Ceci définit un foncteur additif et exact à gauche

$$\begin{aligned}(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{R}) &\longrightarrow \Phi M(C) \\ (M,\nabla,\varphi) &\longmapsto (M^{\nabla},\varphi).\end{aligned} \tag{3.2.9.1}$$

De même, on a

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{R}(L)) \longrightarrow \Phi M(C_L) \tag{3.2.9.2}$$

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{B}_0) \longrightarrow \Phi M(C^{\mathrm{nr}}). \tag{3.2.9.3}$$

3.2.10 Soit M un (φ,∇,N)-module sur $\mathcal{R}[\log T]$. De façon analogue à § 3.2.9, le C-espace vectoriel M^{∇} des sections horizontales de M hérite d'une structure de (φ,N)-module. On en déduit un foncteur additif, exact à gauche,

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{R}[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C). \tag{3.2.10.1}$$

On montre que pour tout (φ,∇,N)-module M sur $\mathcal{R}[\log T]$, la dimension de M^{∇} sur C est inférieure ou égale au rang de M sur $\mathcal{R}[\log T]$.

De même, on a

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C_L) \tag{3.2.10.2}$$

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{B}) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C^{\mathrm{nr}}). \tag{3.2.10.3}$$

3.2.11 Un (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$ est dit *$\mathcal{R}$-soluble* s'il admet une base de sections horizontales. Pour un tel module M, l'inclusion de M^{∇} dans M induit par linéarisation un isomorphisme de (φ,∇)-modules

$$M^{\nabla}\otimes_C \mathcal{R} \longrightarrow M\ ; \tag{3.2.11.1}$$

en particulier, on a $\dim_C M^{\nabla} = \operatorname{rg} M$. On note $\Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules $\mathcal{R}$-solubles. La restriction du foncteur (3.2.9.1) des sections horizontales à $\Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}}$ est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est :

$$\begin{aligned}-\otimes_C \mathcal{R}\colon \Phi M(C) &\longrightarrow \Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}} \\ (M,\varphi) &\longmapsto (M\otimes_C \mathcal{R}, \mathrm{Id}_M\otimes d, \varphi\otimes_{\sigma_C}\sigma_{\mathcal{R}}).\end{aligned} \tag{3.2.11.2}$$

Exemple 3.2.12. On note $\mathcal{R}(1)$ le (φ,∇)-module $\mathcal{R}$-soluble $(\mathcal{R},\pi^{-eh}\sigma_{\mathcal{R}},d_{\mathcal{R}})$. Pour tout (φ,∇)-module (M,φ,∇) et tout entier n, on note $M(n)$ le (φ,∇)-module $(M,\pi^{-neh}\varphi,\nabla)$.

3.2.13 On dit qu'un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est *unipotent* si M est une extension itérée de (φ,∇)-modules $\mathcal{R}$-solubles. On dit qu'un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est *quasi-unipotent* s'il existe une extension galoisienne finie L/K telle que $M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)$ soit unipotent comme (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}(L)$. On vérifie que :

(1) M est unipotent si et seulement si $\operatorname{rg}(M) = \dim_C (M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}[\log T])^{\nabla}$;

(2) M est quasi-unipotent si et seulement si $\operatorname{rg}(M) = \dim_{C^{\mathrm{nr}}} (M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B})^{\nabla}$.

Théorème 3.2.14 (Monodromie p-adique [And02, Ked04, Meb02]). *Tout (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$ est quasi-unipotent.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

3.2.15 Soit L/K une extension galoisienne finie. Le foncteur des sections horizontales (3.2.10.2) induit un foncteur :

$$\begin{aligned}(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}} &\longrightarrow \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \\ (M,\varphi,\nabla,N_M;\rho) &\longmapsto (M^{\nabla},\varphi,N_{M|M^{\nabla}};\rho_{|M^{\nabla}}).\end{aligned} \tag{3.2.15.1}$$

De même, (3.2.10.3) induit un foncteur :

$$(-)^{\nabla}\colon \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \longrightarrow \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K). \tag{3.2.15.2}$$

3.2.16 On a un foncteur d'extension des scalaires :

$$-\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}\colon \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \tag{3.2.16.1}$$

qui envoie (M,∇,φ) sur le quintuplet

$$(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B},\varphi\otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}}\sigma_{\mathcal{B}},\nabla\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes d,\mathrm{Id}_M\otimes N;\mathrm{Id}_M\otimes\rho).$$

Soit $(M,\nabla,\varphi,N_M;\rho)\in\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$. D'après la définition de $\mathcal{B}$, on a $(\mathrm{Ker}\,N)^{G_K}=\mathcal{R}$ et donc $(\mathrm{Ker}\,N_M)^{G_K}$ est un $\mathcal{R}$-module. Il hérite de M d'une connexion et d'un Frobenius. S'il est projectif et de type fini sur $\mathcal{R}$, il est libre et appartient donc à $\Phi M(\mathcal{R})$. Dans ce cas, on pose

$$\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M)=((\mathrm{Ker}\,N_M)^{G_K},\nabla,\varphi). \tag{3.2.16.2}$$

De la même façon, pour toute extension galoisienne finie L de K, on a

$$-\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)\colon \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}} \tag{3.2.16.3}$$

qui envoie (M,∇,φ) sur le quintuplet

$$(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)[\log T],\varphi\otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}}\sigma_{\mathcal{R}},\nabla\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes d,\mathrm{Id}_M\otimes N;\mathrm{Id}_M\otimes\rho).$$

Soit $(M,\nabla,\varphi,N_M;\rho)\in\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$. Si le $\mathcal{R}$-module $(\mathrm{Ker}\,N_M)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ est projectif de type fini, on pose

$$\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M)=((\mathrm{Ker}\,N_M)^{\mathrm{Gal}(L/K)},\nabla,\varphi)\in\Phi M(\mathcal{R}). \tag{3.2.16.4}$$

Lemme 3.2.17. (1) *Les foncteurs (3.2.16.1) et (3.2.16.3) sont pleinement fidèles.*

(2) *Pour tout $M\in\Phi M(\mathcal{R})$, le (φ,∇)-module $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B})$ est défini et canoniquement isomorphe à M.*

(3) *Pour tout extension finie et séparable L de K et tout objet M de $\Phi M(\mathcal{R})$, on a*

$$\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)[\log T])\cong M.$$

Démonstration. Il est évident que ces foncteurs sont fidèles. Soient M un (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$, et $\widetilde{M}=M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}$ l'image de M par (3.2.16.1). Il est clair que $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B})$ est défini et canoniquement isomorphe à M. Comme les morphismes dans $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$ sont compatibles à la monodromie et aux données de descente, le foncteur (3.2.16.1) est plein. *Idem* pour (3.2.16.3) et $\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)[\log T])$. □

3.2.18 On note S le foncteur composé :

$$S\colon \Phi M(\mathcal{R}) \xrightarrow{(3.2.16.1)} \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \xrightarrow{(3.2.15.2)} \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K). \tag{3.2.18.1}$$

Il résulte du théorème de monodromie p-adique (théorème 3.2.14) que pour tout $M\in\Phi M(\mathcal{R})$, la dimension de $S(M)$ est égale au rang de M.

Pour une extension galoisienne finie L de K, on note $\Phi M(\mathcal{R})_L$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules qui sont unipotents sur $\mathcal{R}(L)$. On note S_L le foncteur composé :

$$S_L\colon \Phi M(\mathcal{R})_L \xrightarrow{(3.2.16.3)} \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}} \xrightarrow{(3.2.15.1)} \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)). \tag{3.2.18.2}$$

Par construction, pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})_L$, la dimension de $S_L(M)$ est égale au rang de M. Soit $M \in \Phi M(\mathcal{R})$. L'inclusion $S_L(M) \subset S(M)$ induit par linéarisation un monomorphisme de C^{nr}-modules de Deligne

$$S_L(M) \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} \longrightarrow S(M)$$

qui est un isomorphisme puisque les deux membres ont même dimension. Par suite $S_L(M)$ est une descente de $S(M)$ à L, cf. proposition 3.1.7. Donc le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \Phi M(\mathcal{R}) \arrow[r, "S"] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \\ \Phi M(\mathcal{R})_L \arrow[u, hook] \arrow[r, "S_L"] & \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \arrow[u, "-\otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}"'] \end{tikzcd} \tag{3.2.18.3}$$

commute (à isomorphisme près). On appelle usuellement $S(M)$ l'espace des *cycles proches* de M. On se propose dans la suite de montrer que S et S_L sont des équivalences de catégories et de construire des quasi-inverses.

3.2.19 Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit d'abord les foncteurs

$$\widetilde{M}\colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger),$$
$$\widetilde{M}_L\colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger),$$

par

$$V \longmapsto \widetilde{M}(V) = \left\{ x \in V \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\},$$
$$W \longmapsto \widetilde{M}_L(W) = \left\{ x \in W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in \mathrm{Gal}(L/K), g(x) = x \\ (N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

On vérifie facilement que pour tout C_L-module de Deligne W de K, on a $\widetilde{M}(W \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}) \cong \widetilde{M}_L(W)$.

Lemme 3.2.20. *Soient L/K une extension galoisienne finie et (W, N_W, φ_W) un C_L-module de Deligne de K.*

(1) *On a $\mathrm{rg}\, \widetilde{M}_L(W) = \dim_{C_L} W$; donc $\widetilde{M}_L$ est un foncteur exact.*

(2) *L'inclusion $\widetilde{M}_L(W) \subset W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$, induit par linéarisation un morphisme*

$$i\colon \widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \longrightarrow W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \tag{3.2.20.1}$$

de $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$, qui est en fait un isomorphisme. En particulier, $\widetilde{M}_L(W)$ est unipotent sur $\mathcal{E}^\dagger(L)$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)$. Montrons (1). D'abord on définit un isomorphisme de $\mathcal{E}^\dagger$-espaces vectoriels $f\colon (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G \to \widetilde{M}_L(W)$, en posant

$$f\left(\sum_l v_l \otimes \alpha_l\right) = \sum_l \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i N_W^i(v_l) \otimes \alpha_l \frac{(\log T)^i}{i!},$$

où r est un entier tel que $N_W^r = 0$. L'application inverse $g\colon \widetilde{M}_L(W) \to (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G$ est induite par la projection $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \to \mathcal{E}^\dagger(L)$ qui envoie $\log T$ sur 0. Par construction, on a $gf = \mathrm{Id}$. Il suffit donc de montrer que g est injective. Soit $x = \sum_l v_l \otimes (\sum_{i=0}^d \alpha_{i,l}(\log T)^i)$. Supposons que $g(x) = \sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$. La relation $(N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0$ équivaut à

$$\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{i,l} = -\sum_l v_l \otimes (i+1)\alpha_{i+1,l} \quad \forall i = 0, \dots, d. \tag{3.2.20.2}$$

Comme $\sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$, en appliquant $N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$, on obtient $\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{0,l} = 0$. D'où $\sum_l v_l \otimes \alpha_{1,l} = 0$, par (3.2.20.2). On en déduit par récurrence que $x = 0$.

Pour terminer la preuve de (1), il suffit de montrer que $\dim_{\mathcal{E}^\dagger}(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G = \dim_{C_L} W$. On pose $n = \dim_{C_L} W$. Comme $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^\dagger(L)/\mathcal{E}^\dagger) = G$, l'ensemble pointé de cohomologie non-commutative $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(\mathcal{E}^\dagger(L)))$ est trivial [Ser68a, ch. X, proposition 3] ; donc

$$\dim_{\mathcal{E}^\dagger} (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G = \dim_{\mathcal{E}^\dagger(L)}(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)) = n.$$

Montrons (2). Posons $B = \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$. Comme B est un anneau de polynômes à coefficients dans un corps, en tensorisant (3.2.20.1) par $\mathrm{Fr}\, B$ au dessus de B, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook] & W \otimes_{C_L} B \arrow[d, hook] \\
\widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathrm{Fr}\, B \arrow[r, "i \otimes_B \mathrm{Id}"] & W \otimes_{C_L} \mathrm{Fr}\, B
\end{tikzcd}$$

On va montrer que $i \otimes_B \mathrm{Id}$ est injective ; donc par (1) que c'est un isomorphisme. Par conséquent i est injective et son conoyau est un B-module de torsion qu'on note Q. Comme i est horizontal, le module Q est muni d'une connexion ; on montre facilement que ceci force Q à être nul. Montrons l'injectivité de $i \otimes_B \mathrm{Id}$. Soit $x = \sum_i^m v_i \otimes a_i$ un élément non-nul du noyau de $i \otimes_B \mathrm{Id}$, de longueur minimale m. On peut supposer $a_m = 1$. L'élément $|G|x - \sum_{g \in G} g(x)$ appartient au noyau de $i \otimes_B \mathrm{Id}$ et a pour longueur $m-1$, ce qui mène à un contradiction. $\square$

3.2.21 Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit des foncteurs :

$$M\colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}),$$
$$M_L\colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}),$$

par

$$V \longmapsto M(V) = \left\{ x \in V \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}$$
$$W \longmapsto M_L(W) = \left\{ x \in W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in \mathrm{Gal}(L/K), g(x) = x \\ (N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

On vérifie facilement que pour tout C_L-module de Deligne W de K, on a $M(W \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}) \cong M_L(W)$.

Lemme 3.2.22. *Soit $W \in \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$.*

(1) *L'inclusion $\widetilde{M}_L(W) \subset M_L(W)$ induit par linéarisation un isomorphisme canonique de $\Phi M(\mathcal{R})$*

$$\widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} M_L(W).$$

(2) *On a $\mathrm{rg}\, M_L(W) = \dim_{C_L} W$, donc M_L est un foncteur exact.*

(3) *L'inclusion $M_L(W) \subset W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T]$, induit par linéarisation un morphisme*

$$M_L(W) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T] \longrightarrow W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T] \tag{3.2.22.1}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

de $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$, qui est en fait un isomorphisme. En particulier, $M_L(W)$ est unipotent sur $\mathcal{R}(L)$, ou de façon équivalente, M_L se factorise par $\Phi M(\mathcal{R})_L$.

Démonstration. Montrons d'abord (1). On pose $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Comme $\widetilde{M}_L$ est exact, on peut supposer W simple, donc $N_W = 0$, $\widetilde{M}_L(W) = (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G$ et $M_L(W) = (W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L))^G$. On doit montrer que

$$(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} = (W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L))^G.$$

On pose $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)$. Comme $\mathcal{R}(L) = \mathcal{E}^\dagger(L) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$, il suffit de montrer que $U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} = (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} \longrightarrow (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G \longrightarrow (U/U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G.$$

Donc on peut supposer $U^G = 0$; il suffit de montrer que $(U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G = 0$. Soient $v_1, \dots, v_n$ une base de U sur $\mathcal{E}^\dagger$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i \in (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G$. Pour tout $g \in G$, on a $\sum_{i=1}^n (v_i - g(v_i)) \otimes a_i = 0$. En prenant la somme sur $g \in G$, on a

$$0 = \sum_{g\in G} \left(\sum_{i=1}^n (v_i - g(v_i)) \otimes a_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(|G| v_i - \sum_{g \in G} g(v_i) \right) \otimes a_i.$$

Pour tout i, on a $\sum_{g\in G} g(v_i) \in U^G = 0$, d'où $v = 0$.

Les assertions (2) et (3) sont des conséquences immédiates de (1) et du lemme 3.2.20. □

Théorème 3.2.23. *Les foncteurs S et M (respectivement S_L et M_L) sont des équivalences des catégories quasi-inverses l'une de l'autre. De plus, le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \Phi M(\mathcal{R}) \arrow[r, shift right, "S"'] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[l, shift right, "M"'] \\ \Phi M(\mathcal{R})_L \arrow[u, hook] \arrow[r, shift right, "S_L"'] & \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \arrow[l, shift right, "M_L"'] \arrow[u, "- \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}"'] \end{tikzcd} \qquad (3.2.23.1)$$

commute (à isomorphisme près).

Démonstration. La commutation du diagramme a déjà été montrée. Il suffit de montrer l'assertion pour S_L et M_L, car tout (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ est quasi-unipotent (théorème 3.2.14), tout C^{nr}-module de Deligne admet une descente, cf. proposition 3.1.7(1), et le foncteur d'extension des scalaires $- \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}$ est pleinement fidèle (§ 3.1.6). Posons $B = \mathcal{R}(L)[\log T]$. Soit M un objet de $\Phi M(\mathcal{R})_L$. L'inclusion $S_L(M) \subset M \otimes_{\mathcal{R}} B$ induit par linéarisation un morphisme de $\Phi M(B)_{\mathrm{ds}}$

$$S_L(M) \otimes_{C_L} B \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{R}} B \qquad (3.2.23.2)$$

qui est un isomorphisme par (3.2.11.1), car M unipotent sur $\mathcal{R}(L)$ par hypothèse. En composant les isomorphismes (3.2.22.1) et (3.2.23.2) on obtient

$$M_L(S_L(M)) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} S_L(M) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{R}} B.$$

En appliquant la descente $\mathrm{Des}_{B/\mathcal{R}}$ on obtient un isomorphisme $M_L \circ S_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, cf. lemme 3.2.17. Soit W un C_L-module de Deligne de K, en composant les isomorphismes (3.2.23.2) et (3.2.22.1) on obtient

$$S_L(M_L(W)) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M_L(W) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} W \otimes_{C_L} B.$$

En prenant les sections horizontales on obtient un isomorphisme $S_L \circ M_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$. □

Remarque 3.2.24. On note $\Phi M(\mathcal{B})^{\mathrm{sol}}_{\mathrm{eff}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$ des objets $\mathcal{B}$-solubles et effectifs, i.e. les modules M admettant une base de sections horizontales et tels que $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M)$ soit

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

défini et de rang égal au rang de M. Il est utile de résumer la classification du théorème précédent par le diagramme de foncteurs commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd}
 & \Phi M(\mathcal{B})^{\mathrm{sol}}_{\mathrm{eff}} \arrow[dl, shift right, "\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}"'] \arrow[dr, shift left, "(-)^{\nabla}"'] & \\
\Phi M(\mathcal{R}) \arrow[ur, shift right, "-\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}"'] \arrow[rr, shift left, "S"] & & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[ll, shift left, "M"] \arrow[ul, shift left, "-\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{B}"']
\end{tikzcd}$$

où les trois couples des foncteurs opposés sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

3.2.25 *Analytification.* On ne dispose pas en général de théorèmes de classification pour les (φ,∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger$ analogues aux théorèmes 3.2.14 et 3.2.23. Toutefois, on peut considérer le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}\colon \Phi M(\mathcal{E}^\dagger)\to\Phi M(\mathcal{R})$, et attacher des C^{nr}-modules de Deligne de K aux (φ,∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger$. Suivant [Cre06, § 4.1], on appelle le foncteur $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ foncteur d'*analytification*. C'est un foncteur essentiellement surjectif, cf. corollaire 3.2.27 et [Tsu98c, Proposition 4.2.1]. Il est clair que ce foncteur est fidèle, mais il n'est pas plein en général, comme le montre l'exemple ci-dessus.

Exemple 3.2.26. Les groupes $\mathrm{Ext}^1_{\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)}(\mathcal{E}^\dagger(1),\mathcal{E}^\dagger)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\Phi M(\mathcal{R})}(\mathcal{R}(1),\mathcal{R})$ ne sont pas isomorphes. Soit R un des deux anneaux $\mathcal{E}^\dagger$ ou $\mathcal{R}$. Considérons d'abord des modules à connexion sur R, sans donnée de Frobenius. Crew observe [Cre06, p. 37] que l'ensemble des extensions $\mathrm{Ext}^1_\nabla(R,R)$ du module à connexion trivial R de rang 1 par lui-même, est égal à $H^1_{dR}(R):=\mathrm{Coker}(R\xrightarrow{d}\widehat{\Omega}^1_{R/C})$. Or $\dim_C H^1_{dR}(\mathcal{R})=1$ et $\dim_C H^1_{dR}(\mathcal{E}^\dagger)=+\infty$. Ceci montre en particulier que l'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ n'est pas pleinement fidèle entre les catégories des modules à connexion. Pour conclure on construit l'exemple suivant. Supposons pour simplifier que $\sigma(T)=T^p$ et $\pi=p$. Soit M un $\mathcal{E}^\dagger$-espace vectoriel de base e_1,e_2. On le muni de la connexion $\nabla(e_1)=0$, $\nabla(e_2)=\sum_{n\in\mathbb{N}}T^{p^n}e_1\otimes dT/T$ et du Frobenius $\varphi(e_1)=p^{-1}e_1$, $\varphi(e_2)=-Te_1+e_2$. On vérifie facilement que M est un (φ,∇)-module sur $\mathcal{E}^\dagger$, extension de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par $\mathcal{E}^\dagger$. Comme la différentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}}T^{p^n}\otimes dT/T$ n'est pas intégrable dans $\mathcal{E}^\dagger$, M n'est pas une extension triviale de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par $\mathcal{E}^\dagger$ en tant que module à connexion et à fortiori en tant que (φ,∇)-module. Par contre, comme $\sum_{n\in\mathbb{N}}T^{p^n}\otimes dT/T$ est intégrable dans $\mathcal{R}$, l'analytification $M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ de M est $\mathcal{R}$-soluble. Donc $S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R})=(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R})^\nabla\otimes_C C^{\mathrm{nr}}$ muni de la monodromie triviale, de l'action semi-linéaire triviale de G_K et du Frobenius induit par le Frobenius de M. Par construction les pentes du Frobenius sont 0 et 1, donc par Dieudonné–Manin on a

$$\underline{Co}(S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}))=\widehat{C}^{\mathrm{nr}}(1)\oplus\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$$

en tant que φ-modules sur $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, mais aussi comme $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de K, car la monodromie et l'action de G_K sont triviales. Comme $\underline{Co}$ et S sont des équivalences, on conclut que $M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ est une extension triviale de $\mathcal{R}(1)$ par $\mathcal{R}$ dans $\Phi M(\mathcal{R})$.

Corollaire 3.2.27. *Le triangle de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\Phi M(\mathcal{R}) & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[l, "\sim", "M"'] \arrow[dl, "\widetilde{M}"] \\
\Phi M(\mathcal{E}^\dagger) \arrow[u, "-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}"] &
\end{tikzcd}$$

commute (à isomorphismes près). Par conséquent, le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ est essentiellement surjectif. Le foncteur $\widetilde{M}$ est pleinement fidèle, mais il n'est pas essentiellement surjectif.

Démonstration. Soient V un C^{nr}-module de Deligne de K, L/K une extension galoisienne finie trivialisant V et W une descente de V à L (cf. proposition 3.1.7). On a $\widetilde{M}(V) = \widetilde{M}_L(W)$ et $M(V) = M_L(W)$, cf. § 3.2.19. Donc le diagramme commute par le lemme 3.2.20(2). Le foncteur $\widetilde{M}$ est pleinement fidèle car M est une équivalence et $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ est fidèle. Il n'est pas essentiellement surjectif car sinon $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ serait une équivalence. □

3.3 (φ,∇)-modules unités

3.3.1 On dit que un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{E}^\dagger$ est *unité* si le φ-module sous-jacent est unité, i.e. s'il existe un sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$-module M' libre de M, stable par φ, tel que [Mat02, § 5.2] :

(1) $M \cong \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}} M'$;

(2) $\mathrm{Id} \otimes \varphi \colon \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}} M' \xrightarrow{\sim} M'$.

Un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est dit unité s'il existe un (φ,∇)-module unité $\widetilde{M}$ sur $\mathcal{E}^\dagger$ tel que $M \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$.

On dit qu'un module de Deligne est unité si le φ-module sous-jacent est un φ-module unité.

On note $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ (respectivement $\Phi M(\mathcal{R})^u$) la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$ (respectivement $\Phi M(\mathcal{R})$) dont les objets sont unités. De même, l'exposant ^{u} pour une catégorie de modules de Deligne désignera la sous-catégorie pleine dont les objets sont unités.

3.3.2 On rappelle qu'on a noté Λ le sous-corps de C des éléments fixés par σ_C, cf. § 3.0.2. On note $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(G_K)$ la catégorie de Λ-représentations de G_K à *monodromie géométrique finie*, i.e. telle que la restriction de l'action à I_K se factorise par un quotient fini.

Théorème 3.3.3 [Tsu98a]. *Le foncteur* $D^\dagger \colon \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(G_K) \to \Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ *défini par*

$$D^\dagger(V) = \left(V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}$$

est une équivalence de catégories.

Les énoncés qui suivent, relient les théorèmes 3.3.3 et 3.2.23.

3.3.4 Soit (D,φ,N) un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité. La relation $N\circ\varphi = p^h\varphi\circ N$ implique que $N=0$. On considère le foncteur

$$-\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \colon \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u, \tag{3.3.4.1}$$

qui associe à une Λ-représentation V de G_K à monodromie géométrique finie le module de Deligne $V\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ muni du Frobenius induit par le Frobenius σ_C de $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ et de la monodromie triviale. En sens inverse, on considère le foncteur

$$(\cdot)^{\varphi=\mathrm{Id}} \colon \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(G_K) \tag{3.3.4.2}$$

qui associe à un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité $(D,\varphi,0)$ de K, la représentation $D^{\varphi=\mathrm{Id}}$ de G_K des points fixes par φ.

Lemme 3.3.5. (1) *Le foncteur (3.3.4.1) est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est (3.3.4.2).*

(2) *Soient V une Λ-représentation de G_K à monodromie géométrique finie et $M = D^\dagger(V)$ le (φ,∇)-module unité sur $\mathcal{E}^\dagger$ correspondant à V. On a*

$$S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}) = \underline{\mathit{D\acute{e}co}}(V\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

(3) *Soit W un C^{nr}-module de Deligne unité de K. Alors*

$$D^\dagger((W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{\varphi=\mathrm{Id}}) = (W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} = \widetilde{M}(W).$$

Démonstration. (1) Il est évident que pour tout V dans $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K)$, $(V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{\varphi=\mathrm{Id}}$ est canoniquement isomorphe à V. Pour vérifier l'autre égalité il suffit de montrer que pour tout $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité W de K, on a $\dim_\Lambda (W)^{\varphi=\mathrm{Id}} = \dim_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}} W$. Ceci se déduit du théorème de classification de Dieudonné-Manin appliqué au φ-module W sur le corps $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. On remarque ici qu'il est nécessaire de travailler avec $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ plutôt que avec C^{nr}.

(2) Il est équivalent de montrer que $\underline{Co}(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})) = V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. Par définition, on a

$$\underline{Co}(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})) = ((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B})^\nabla \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}.$$

Le deuxième membre est contenu dans $((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^\nabla$; il lui est égal car ils sont de même dimension sur $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. Comme $\mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ contient $\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, en utilisant le théorème de Tsuzuki [Tsu98a, Proposition 4.2.2(1)], on a

$$\begin{aligned}
&(V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \\
&\quad = ((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} (\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})) \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}} (\mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}) \\
&\quad = V \otimes_\Lambda \mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}.
\end{aligned}$$

On conclut par la relation

$$(V \otimes_\Lambda \mathcal{B} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^\nabla = V \otimes_\Lambda C^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} = V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}.$$

(3) Par définition, on a

$$D^\dagger((W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{\varphi=\mathrm{Id}}) = ((W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}})^{\varphi=\mathrm{Id}} \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K}.$$

Par (1), le deuxième membre est égale à $(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K}$. Soit T une descente de W à L (cf. proposition 3.1.7). Alors $(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} = (T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K}$. Le $\mathcal{E}^\dagger$-espace vectoriel $(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ est contenu dans $(T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K}$, et comme il est de dimension maximale les deux sont égaux. On a

$$\begin{aligned}
(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^{\mathrm{Gal}(L/K)} = (T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} &= (T \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} \\
&= (W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} \subseteq \widetilde{M}(W).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de noter que $\dim_{\mathcal{E}^\dagger} (W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}})^{G_K} = \dim_{\mathcal{E}^\dagger} \widetilde{M}(W)$. □

PROPOSITION 3.3.6. *Le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\Phi M(\mathcal{R})^u \arrow[r, shift right, "S"'] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \arrow[l, shift right, "M"'] \arrow[d, shift right, "\underline{Co}"'] \arrow[ddl, "\widetilde{M}"'] \\
& \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \arrow[u, shift right, "\underline{D\acute{e}co}"'] \arrow[d, shift right, "(\cdot)^{\varphi=\mathrm{Id}}"'] \\
\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u \arrow[uu, "-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}"] & \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K) \arrow[l, "D^\dagger"] \arrow[u, shift right, "-\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}"']
\end{tikzcd} \tag{3.3.6.1}$$

est commutatif (à isomorphisme près), et toutes les flèches sont des équivalences des catégories.

Démonstration. Montrons d'abord que M et S induisent des foncteurs sur les sous-catégories des objets unités. Si un foncteur conserve la propriété d'être unité alors tout quasi-inverse la conserve

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

aussi. Les foncteurs $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ et $\underline{Co}$ conservent la propriété d'être unité par définition ; par conséquent $\underline{Déco}$ aussi. On déduit du lemme 3.3.5(3) que le foncteur $\widetilde{M}$ conserve la propriété d'être unité ; par conséquent les foncteurs M et S aussi. Le triangle supérieur de (3.3.6.1) est commutatif par le corollaire 3.2.27, le triangle inférieur est commutatif par le lemme 3.3.5(3) et le périmètre du carré par le lemme 3.3.5(2). Les équivalences verticales sur la droite sont données par le lemme 3.3.5(1) et la proposition 3.1.7(2), et $D^\dagger$ est une équivalence par le théorème 3.3.3. On en déduit que les restrictions de $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ et $\widetilde{M}$ aux objets unités sont aussi des équivalences de catégories. □

Corollaire 3.3.7. *La restriction du foncteur d'analytification aux* (φ,∇)*-modules de rang* 1 *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Par torsion du Frobenius on se ramène au cas unité qui est une conséquence de la proposition 3.3.6. □

3.4 Constantes locales

3.4.1 On suppose désormais que le corps résiduel k de K est fini, de cardinal $q=p^f$ et que l'ordre h du Frobenius σ_C, fixé dans § 3.0.2, divise f. Pour le reste, on conserve les notations de §§ 3.0.1 et 3.0.2. On pose $a=fh^{-1}$.

3.4.2 Soient M un (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$, $S(M)$ le C^{nr}-module de Deligne de K associé. On muni $S(M)$ d'une action C^{nr}-linéaire $\rho\colon W_K\to\mathrm{Aut}_{C^{\mathrm{nr}}}(S(M))$ en posant pour tout $g\in W_K$ et $m\in S(M)$,

$$\rho(g)(m)=g(\varphi^{a\nu(g)}(m)),$$

où $\nu(g)$ est l'entier défini dans § 2.1.

Proposition 3.4.3. *Le triplet* $(S(M),\rho,N)$ *est une* C^{nr}*-représentation de Weil–Deligne de* K*.*

Démonstration. En effet ρ est linéaire et triviale sur un sous-groupe ouvert de l'inertie. La relation $\rho(w)N=q^{\nu(w)}N\rho(w)$ résulte facilement de l'égalité $N\varphi=p^h\varphi N$ sur $S(M)$. □

Définition 3.4.4. Soit M un (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$. On appelle C^{nr}-représentation de Weil–Deligne *associée à* M, et on note $\mathrm{WD}(M)$, le triplet $(S(M),\rho,N)$ de la proposition 3.4.3. On appelle *constantes locales de* M les constante locales de $\mathrm{WD}(M)$; plus précisément on pose, d'après § 2.16 :

(i) $L(M,t)=L(\mathrm{WD}(M),t)$;

(ii) $\mathrm{ar}(M)=\mathrm{ar}(\mathrm{WD}(M))$;

(iii) pour un caractère additif non-trivial $\psi\colon K\to C^*$ et une mesure de Haar μ sur K à valeur dans C,

$$\varepsilon(M,\psi,\mu)=\varepsilon(\mathrm{WD}(M),\psi,\mu),$$
$$\varepsilon_0(M,\psi,\mu)=\varepsilon_0(\mathrm{WD}(M),\psi,\mu).$$

Proposition 3.4.5. *Soient* (M,φ,∇) *un* (φ,∇)*-module sur* $\mathcal{R}$, $S(M)=(S(M),\varphi,N)$ *le* C^{nr}*-module de Deligne associé et* $\mathrm{WD}(M)=(S(M),\rho,N)$ *la* C^{nr}*-représentation de Weil–Deligne associée. On désigne par* $\mathrm{Ker}\,N$ *le noyau de* N *sur* $S(M)$ *: il est stable sous l'action semi-linéaire de* G_K*, sous l'action* C^{nr}*-linéaire* ρ *de* W_K *et par le Frobenius.*

(1) *On a un isomorphisme canonique* $M^\nabla\cong(\mathrm{Ker}\,N)^{G_K}$ *de* φ*-modules sur* C*.*

(2) *On a un isomorphisme canonique,* G_k*-équivariant,* $M^\nabla\otimes_C C^{\mathrm{nr}}\cong(\mathrm{Ker}\,N)^{I_K}$*, de* φ*-modules sur* C^{nr}*.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

(3) *On a :*

$$\mathrm{ar}(M) = \mathrm{irr}(M) + \mathrm{rg}(M) - \dim_C(M^\nabla) \ ; \tag{3.4.5.1}$$

$$L(M,t) = \det_C(1 - t\varphi^a \mid M^\nabla)^{-1} \in 1 + tC[\![t]\!] \ ; \tag{3.4.5.2}$$

$$\det_{C^{\mathrm{nr}}}(\rho(\mathrm{F}^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}) = \det_C(\varphi^a \mid M^\nabla), \quad \text{où } \mathrm{F}^* = \sigma^{-f} \in G_k \ ; \tag{3.4.5.3}$$

$$\varepsilon(M,\psi,\mu) = \varepsilon_0(M,\psi,\mu)\det_C(-\varphi^a \mid M^\nabla)^{-1} \ ; \tag{3.4.5.4}$$

$$\varepsilon_0(M,\psi,\mu) = \varepsilon_0(\mathrm{WD}(M)^\circ,\psi,\mu) \ ; \tag{3.4.5.5}$$

où $\mathrm{irr}(M)$ *désigne l'irrégularité de* M *(voir [CM02, théorème 14.11]).*

Démonstration. Montrons (1). D'après le théorème 3.2.23, on a

$$M \cong M(S(M)) = \left\{ x \in S(M) \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} M^\nabla &\cong \left\{ x \in S(M) \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N(x) = 0 \\ \mathrm{Id} \otimes d(x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ x \in S(M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N(x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= (\mathrm{Ker}\, N)^{G_K}. \end{aligned}$$

Montrons (2). Fixons une extension galoisienne finie L/K qui rend M unipotent et on pose $D = S_L(M)$. D'après le théorème 3.2.23, on a $M \cong M_L(D)$ et $M^\nabla \cong (\mathrm{Ker}\, N)^{G_K} = (\mathrm{Ker}\, N_D)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$. Comme $H^1(\mathrm{Gal}(k_L/k), \mathrm{GL}_r(C_L))$ est trivial, on en déduit que

$$(\mathrm{Ker}\, N_D)^{\mathrm{Gal}(L/K)} \otimes_C C_L \cong (\mathrm{Ker}\, N_D)^{I(L/K)}.$$

D'où $M^\nabla \otimes_C C^{\mathrm{nr}} = (\mathrm{Ker}\, N_D)^{I(L/K)} \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} = (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}$. Par construction cet isomorphisme est équivariant et commute aux Frobenius respectifs.

Traitons (3.4.5.1). Par la définition $\mathrm{ar}(M) = \mathrm{sw}(\rho) + \dim_{C^{\mathrm{nr}}} \mathrm{WD}(M) - \dim_{C^{\mathrm{nr}}} (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}$. Par un théorème de Matsuda–Tsuzuki, cf. [Mat02, Theorem 8.6] et [Tsu98b, Theorem 7.2.2] on a $\mathrm{irr}(M) = \mathrm{sw}(\rho)$; on conclut par (1) et (2).

Traitons (3.4.5.2). Par la définition de ρ, on a $\rho(\mathrm{F}^*) = \mathrm{F}^* \circ \varphi^a$ sur $(\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}$, où $\mathrm{F}^* = \sigma^{-f} \in G_k$. On remarque que l'endomorphisme $\sigma_C^a \colon C^{\mathrm{nr}} \to C^{\mathrm{nr}}$ est égale à $\mathrm{Id}_C \otimes \sigma^f$, cf. §§ 3.0.2 et 3.1.2. En utilisant (2), on calcule

$$\begin{aligned} L(M,t) &= \det_{C^{\mathrm{nr}}}(1 - t\rho(\mathrm{F}^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K})^{-1} \\ &= \det_{C^{\mathrm{nr}}}(1 - t(\mathrm{F}^* \circ \varphi^a) \mid (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K})^{-1} \\ &= \det_{C^{\mathrm{nr}}}(1 - t(\mathrm{Id}_M \otimes \sigma^{-f}) \circ (\varphi^a \otimes \sigma_C^a) \mid M^\nabla \otimes_C C^{\mathrm{nr}})^{-1} \\ &= \det_{C^{\mathrm{nr}}}(1 - t(\varphi^a \otimes \mathrm{Id}_{C^{\mathrm{nr}}}) \mid M^\nabla \otimes_C C^{\mathrm{nr}})^{-1} \\ &= \det_C(1 - t\varphi^a \mid M^\nabla)^{-1}. \end{aligned}$$

De même pour (3.4.5.3). Enfin, (3.4.5.4) et (3.4.5.5) sont évidents d'après (2) et § 2.16. ☐

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

4. Formule du produit

4.1 Rappels sur les F-isocristaux

4.1.1 Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On reprend les notations de § 3.0.2 concernant le corps de coefficients C. À partir de § 4.2, on supposera k fini de cardinal $q = p^f$ et que l'ordre h du Frobenius σ_C divise f ; on posera $a = h^{-1}f$.

Soient X un k-schéma séparé de type fini, Z un sous-schéma fermé, U l'ouvert complémentaire de Z dans X qu'on suppose non vide. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ la catégorie des *F-isocristaux sur $U|C$ surconvergents le long de Z*, cf. [Bert96, définition 2.3.2]. Si $U = X$, on note cette catégorie $F\text{-Isoc}(X|C)$, et on l'appelle la catégorie des *F-isocristaux convergents sur $X|C$*.

Soient $f\colon Y \to X$ un morphisme séparé de type fini, $V = f^{-1}(U)$. On a un foncteur image inverse, (cf. [Bert96, définition 2.3.2-(iv)])

$$f^*\colon F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C).$$

Si f est une immersion ouverte on notera $M_{|Y} \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)$ l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ par f^*.

4.1.2 La catégorie $F\text{-Isoc}(\operatorname{Spec} k|C)$ est équivalente à la catégorie $\Phi M(C)$ définie dans § 3.1.1, cf. [Bert96, corollaire 2.5.8]. Tout nombre rationnel λ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda = r/seh$, avec r et s deux entiers premiers entre eux et $s > 0$ (pour $\lambda = 0$ on prend par convention $r = 0$ et $s = 1$). On note $C_\sigma[T]$ l'anneau de polynômes non commutatif défini par la relation $T\alpha = \sigma_C(\alpha)T$, pour tout α dans C. On définit le F-isocristal $C(\lambda) \in F\text{-Isoc}(\operatorname{Spec} k|C)$ comme étant le C-espace vectoriel $C_\sigma[T]/(T^s - \pi^{-r})$, muni du Frobenius défini par la multiplication à gauche par T. Pour tout k-schéma $f\colon X \to \operatorname{Spec} k$ et tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on note $\mathcal{O}_X^\dagger(\lambda) \in F\text{-Isoc}(X|C)$ l'image inverse $f^*C(\lambda)$; pour tout ouvert non-vide U de X, on a $\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda) = \mathcal{O}_X^\dagger(\lambda)_{|U} \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. Pour tout $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on définit le *décalé* $M(\lambda)$ de M par la *pente* λ, comme étant le produit tensoriel de M avec $\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)$.

4.1.3 Dans la suite de cette section, on supposera désormais que X soit une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur k. On note g son genre, η son point générique, et $\bar{\eta}$ un point géométrique au dessus de η. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X. Pour U un ouvert non vide de X et Z un fermé de X tel que $X = U \cup Z$, on appelle *F-isocristal surconvergent sur $U|C$*, tout F-isocristal sur $U|C$ surconvergent le long de Z. Pour un tel F-isocristal M, on note $H^i_{\mathrm{rig}}(U, M)$ (respectivement $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M)$) la cohomologie rigide (respectivement rigide à support propre) de M.

Théorème 4.1.4 [Cre98, Theorem 9.5]. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et $M^\vee$ son dual. Alors les C-espaces vectoriels $H^i_{\mathrm{rig}}(U, M)$, $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M)$ sont de dimension finie, nuls pour $i \neq 0, 1, 2$, et on a un accouplement parfait canonique*

$$H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M) \times H^{2-i}_{\mathrm{rig}}(U, M^\vee) \longrightarrow C(-1)$$

de φ-modules sur C.

4.1.5 Soit x un point fermé de X. On pose $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x, $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal, $k(x)$ son corps résiduel, $i_x\colon \operatorname{Spec} k(x) \to X$ l'injection canonique. On note $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_x$-adique, K_x le corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\widehat{X}_{(x)} = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\eta_x = \operatorname{Spec}(K_x)$ le point générique de $\widehat{X}_{(x)}$, $\overline{\eta}_x$ (respectivement $\bar{x}$) un point géométrique au dessus de η_x

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

(respectivement x). On fixe une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, ce qui détermine un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k(x)[\![t]\!]$. On note $k(\eta)$ le corps des fonctions méromorphes sur X.

On pose $C(x) = C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k(x))$, $\mathcal{R}(\eta_x)$ (respectivement $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$) l'anneau de Robba (respectivement l'anneaux des fonctions surcovergentes bornées) relativement à K_x, cf. § 3.2.1. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ,∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$ et $F\text{-Isoc}^\dagger_{an}(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ,∇)-modules sur $\mathcal{R}(\eta_x)$.

4.1.6 Soient U un ouvert non vide de X, x un point fermé de U. On a un foncteur

$$i_x^*\colon F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}(\operatorname{Spec} k(x)|C) \cong \Phi M(C(x)).$$

On note (M_x,φ_x) l'image par ce foncteur d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$.

4.1.7 Soient U un ouvert non vide de X, x un point fermé de X. On pose $U\backslash\{x\} = U\cap(X\backslash\{x\})$, de sorte qu'on ait le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \eta_x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U\backslash\{x\} \arrow[d] \\ \widehat{X}_{(x)} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On a un foncteur de localisation [Cre98, § 7.2]

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C). \tag{4.1.7.1}$$

On en déduit, par composition avec le foncteur d'analityfication (voir § 3.2.25), un foncteur de localisation

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger_{an}(\eta_x|C). \tag{4.1.7.2}$$

On note $(M_{\eta_x},\varphi_{\eta_x},\nabla_x)$ (respectivement $(M^\dagger_{\eta_x},\varphi_{\eta_x},\nabla_x)$) l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U|C)$ par (4.1.7.2) (respectivement (4.1.7.1)).

DÉFINITION 4.1.8 [Cre87, § 1.9]. Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. On dit que M est *unité* si pour tout morphisme $i\colon \operatorname{Spec}\Omega \to U$, où Ω est un corps parfait, le φ-module i^*M est unité. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)^u$ la catégorie des F-isocristaux surconvergents unité sur $U|C$.

PROPOSITION 4.1.9 [Cre92, Proposition 1.2]. *Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. Si l'image inverse i^*M par un point géométrique générique $i\colon \bar\eta \to U$ est un φ-module unité, alors M est unité.*

COROLLAIRE 4.1.10. *Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$ de rang 1. Alors il existe un nombre rationnel λ dans $(1/eh)\mathbb{Z}$ et un F-isocristal surconvergent unité M' sur $U|C$, tels que $M = M'(\lambda)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in (1/eh)\mathbb{Z}$ la pente du φ-module i^*M image inverse de M par le point géométrique générique $i\colon \bar\eta \to U$. En vertu de la proposition 4.1.9, le F-isocristal $M(-\lambda)$ est unité. On prend $M' = M(-\lambda)$. □

4.1.11 Soient U un ouvert non vide de X, V un Λ-espace vectoriel de dimension finie, $\theta\colon \pi_1(U,\bar\eta) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ une représentation continue de $\pi_1(U,\bar\eta)$, et x un point de $X\backslash U$. On dit que θ a *monodromie géométrique finie en x* si le composé

$$\pi_1(\eta_x,\bar\eta_x) \longrightarrow \pi_1(U,\bar\eta_x) \cong \pi_1(U,\bar\eta) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

a monodromie géométrique finie, c'est-à-dire que sa restriction à l'inertie de $\pi(\eta_x, \bar{\eta}_x)$ a une image finie. On dit que θ a *monodromie géométrique locale finie* si pour tout point x de $X\backslash U$, θ a monodromie géométrique finie en x. On note $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(U,\bar{\eta}))$ la catégorie des Λ-représentations continues de dimension finie de $\pi_1(U,\bar{\eta})$, à monodromie géométrique locale finie.

Théorème 4.1.12 [Tsu98a, (7.2.2), Theorem 7.2.3]. *Soit U un ouvert non vide de X. Il existe une équivalence de catégories canonique*

$$G\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(U,\bar{\eta})) \longrightarrow F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U,X|C)^u$$

telle que pour tout $x \in X\backslash U$, on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(U,\bar{\eta})) \arrow[r, "G"] \arrow[d] & F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U,X|C)^u \arrow[d] \\
\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(\eta_x,\bar{\eta}_x)) \arrow[r, "D^{\dagger}_x"] & F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\eta_x|C(x))^u
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont la restriction et la localisation respectivement, et $D^{\dagger}_x$ est l'équivalence du théorème 3.3.3 relativement au corps K_x.

Définition 4.1.13. Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U,X|C)^u$. On dit que M est *fini* si la représentation de $\pi_1(U,\bar{\eta})$ associée à M par le théorème 4.1.12 se factorise par un quotient fini.

4.1.14 Soient U un ouvert non-vide de X, $f\colon V \to U$ un morphisme étale fini. On note Y la compactification lisse de V, $\bar{f}\colon Y \to X$ la compactification de f, de sorte qu'on ait le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\bar{f}"] \\
U \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

On a un foncteur exact [Cre98, § 8.2]

$$f_*\colon F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(V,Y|C) \longrightarrow F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U,X|C). \tag{4.1.14.1}$$

On note η_Y le point générique de Y, $\bar{\eta}_Y$ un point géométrique générique de Y. Soient $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(V,Y|C)^u$ et $W \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(V,\bar{\eta}_Y))$, tels que $M = G(W)$. En vertu de [Cre92, p. 436], on a

$$f_*M = G(\mathrm{Ind}^{\pi_1(U,\bar{\eta}_Y)}_{\pi_1(V,\bar{\eta}_Y)} W). \tag{4.1.14.2}$$

4.2 Rappels sur les fonctions *L* des *F*-isocristaux

4.2.1 On suppose désormais k fini de cardinal $q = p^f$ et que l'ordre h du Frobenius σ_C, fixé dans § 3.0.2, divise f. On pose $a = h^{-1}f$. Pour tout $x \in |X|$, on note $\deg(x) = [k(x) : k]$ le degré de x. Soient U un ouvert non vide de X et M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. Pour tout $x \in |X|$, $\varphi_x^{a\deg(x)}$ est la plus petite puissance de $\varphi_x\colon M_x \to M_x$ qui soit $C(x)$-linéaire. Pour tout entier i, on note F^* la puissance a-ième du Frobenius des φ-modules de cohomologie rigide $H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M)$ et $H^i_{\mathrm{rig}}(U,M)$, qui est donc une application C-linéaire.

Lemme 4.2.2 [Ete04, Lemma 3.1]. *Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. On a $\det_{C(x)}(1 - t\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x) \in 1 + tC[\![t]\!]$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Définition 4.2.3 [Kat72, § 6.0] et [ELS93, § 2.3]. Soient U un ouvert non vide de X, et M un objet de F-Isoc$^\dagger(U, X|C)$. On pose

$$L(M,t) = \prod_{x\in|U|} \det{}_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)}\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x)^{-1}.$$

Ce produit converge formellement dans $1 + tC[\![t]\!]$ car il n'y a qu'on nombre fini de points fermés de U de degré donné.

Remarque 4.2.4. On peut considérer M_x comme un C-espace vectoriel de dimension finie. On calcule

$$\det{}_C(1 - t^{\deg(x)}\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x) = N_{C(x)/C}(\det{}_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)}\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x))$$

qui est égal à $\det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)}\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x)^{\deg(x)}$ par le lemme 4.2.2. Donc par abus de langage on trouve dans la littérature l'expression

$$L(M,t) = \prod_{x\in|U|} \det{}_C(1 - t^{\deg(x)}\varphi_x^{a\deg(x)} \mid M_x)^{-1/\deg(x)}.$$

Théorème 4.2.5 (Interprétation cohomologique [ELS93, théorème 6.3 I]). *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F$-Isoc$^\dagger(U, X|C)$. On a*

$$L(M,t) = \prod_i \det{}_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{(-1)^{i+1}}.$$

Corollaire 4.2.6 (Équation fonctionnelle). *Soient U un ouvert non vide de X, M un objet de F-Isoc$^\dagger(U, X|C)$, $M^\vee$ son dual. On a*

$$L(M,t) = \varepsilon(U,M)t^{-\chi_c(U,M)}L_\circ(M^\vee, q^{-1}t^{-1}), \tag{4.2.6.1}$$

où

$$\varepsilon(U,M) = \det{}_C(-\mathrm{F}^*, H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} = \prod_{i=0}^{2} \det{}_C(-\mathrm{F}^* \mid H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{(-1)^{i+1}},$$

$$\chi_c(U,M) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_C H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M),$$

$$L_\circ(M,t) = \prod_{i=0}^{2} \det{}_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^i_{\mathrm{rig}}(U,M))^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer à l'accouplement (théorème 4.1.4) un lemme classique d'algèbre linéaire, cf. [Har77, Appendix C, Lemma 4.3]. □

4.3 Formule du produit : conjecture et résultats

4.3.1 Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F$-Isoc$^\dagger(U, X|C)$, $x \in |X|$. On note I_{η_x} le groupe d'inertie de $\pi_1(\eta_x, \bar\eta_x)$ et F_x^* le Frobenius géométrique de $\pi_1(x, \bar x)$. Pour alléger les notations, on désignera le triplet $(M_{\eta_x}, \varphi_{\eta_x}, \nabla_x)$ simplement par M_{η_x}, cf. (4.1.7.2). On pose

$$\mathrm{WD}(M_{\eta_x}) = (S(M_{\eta_x}), \rho_{\eta_x}, N_{\eta_x})$$

la C^{nr}-représentation de Weil–Deligne associée à M_{η_x}, cf. § 3.4.2. On pose, cf. proposition 3.4.5,

$$t_M(x) = \mathrm{tr}_{C^{\mathrm{nr}}}(\rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}) = \mathrm{tr}_{C(x)}(\varphi_{\eta_x}^{a\deg(x)} \mid M_{\eta_x}^{\nabla_x}) \tag{4.3.1.1}$$

$$\det{}_M(x) = \det{}_{C^{\mathrm{nr}}}(\rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^*) \mid (\mathrm{Ker}\, N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}) = \det{}_{C(x)}(\varphi_{\eta_x}^{a\deg(x)} \mid M_{\eta_x}^{\nabla_x}). \tag{4.3.1.2}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Exemple 4.3.2. Soient U un ouvert non vide de X et λ un nombre rationnel. On écrit $\lambda = r/seh$ comme dans § 4.1.2. Pour tout $x \in |X|$, la C^{nr}-représentation de Weil–Deligne $\mathrm{WD}(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)_{\eta_x})$ de K_x a *monodromie géométrique triviale*, i.e. $N_{\eta_x} = 0$ et $\rho_{\eta_x} \colon \pi_1(\eta_x, \overline{\eta}_x) \to \mathrm{Aut}_{C^{\mathrm{nr}}}(S(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)_{\eta_x}))$ est non-ramifiée. On a $t_{\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)}(x) = 0$ et $\det_{\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)}(x) = ((-1)^{s-1}\pi^{-r})^{a\deg(x)} = ((-1)^{(s-1)a}\pi^{-ar})^{\deg(x)}$. On pose $c(\lambda) = (-1)^{(s-1)a}\pi^{-ar}$.

Lemme 4.3.3. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U|C)$ et $x \in |U|$. Alors :*

(1) *M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble (voir § 3.2.11) et $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = M_x$;*

(2) *la C^{nr}-représentation de Weil-deligne $\mathrm{WD}(M_{\eta_x})$ de K_x a monodromie géométrique triviale ;*

(3) *$t_M(x)$ et $\det_M(x)$ appartiennent à C.*

Démonstration. Comme M est convergent sur U, pour tout $x \in |U|$, le (φ, ∇)-module M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble (par [Kat72, proposition 3.1]), donc $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = M_x$. L'assertion (2) résulte de (1) et l'assertion (3) s'en déduit par lemme 4.2.2. □

4.3.4 Supposons désormais que C^{nr} contienne une racine primitive p-ième de l'unité. Le choix d'une telle racine ξ détermine l'isomorphisme $\psi_{\mathbb{F}_p} \colon \mathbb{F}_p \to \mu_p(C^{\mathrm{nr}})$ envoyant 1 sur ξ. On note $\Omega^1_{k(\eta)/k}$ le module des formes différentielles méromorphes sur X. Pour tout $\omega \in \Omega^1_{k(\eta)/k}$ différent de zéro et $x \in |X|$, on note $\omega_x \in \Omega^1_{\eta_x/k(x)}$ le germe de ω en x, et par $\psi(\omega_x) \colon K_x \to C^{\mathrm{nr}*}$ le caractère additif donné par $\alpha \mapsto \psi_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbb{F}_p}(\mathrm{Res}(\alpha\omega_x)))$, cf. lemme 2.8. On note μ_x l'unique mesure de Haar sur K_x telle que $\mu_x(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) = 1$. Si U est un ouvert non-vide de X et $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$, on note simplement $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)$ au lieu de $\varepsilon(M_{\eta_x}, \psi(\omega_x), \mu_x)$, et de même pour ε_0, cf. définition (3.4.4).

Conjecture 4.3.5. Soient U un ouvert non vide de X, M un objet de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$, et ω un élément non-nul de $\Omega^1_{k(\eta)/k}$. On a

$$\det_C(-\mathrm{F}^* \mid H^*_{\mathrm{rig},c}(U, M))^{-1} = q^{(1-g)\,\mathrm{rg}(M)} \prod_{x\in|U|} (q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)\,\mathrm{rg}(M)} \det_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)}) \prod_{x \in X\setminus U} \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x). \tag{4.3.5.1}$$

Lemme 4.3.6. *Si la conjecture 4.3.5 est vérifiée pour $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$, alors elle l'est aussi pour tout $M(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. On pose $\lambda = r/seh$ comme dans § 4.1.2. Par définition $\mathrm{rg}(M(\lambda)) = \mathrm{rg}(M)s$ et $H^*_{\mathrm{rig},c}(U, M(\lambda)) = H^*_{\mathrm{rig},c}(U, M)(\lambda)$. Par la formule donnant le déterminant d'un produit tensoriel [Bou70, A III.101 (33)], le membre de gauche de (4.3.5.1) calculé en $M(\lambda)$ est égal à

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{2} & \det_C(-\mathrm{F}^* \mid H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M))^{(-1)^{i+1}\mathrm{rg}(C(\lambda))} \det_C(\varphi^a_{C(\lambda)} \mid C(\lambda))^{-h^i_c(U,M)} \\ &= \det_C(-\mathrm{F}^* \mid H^*_{\mathrm{rig},c}(U, M))^{-s} c(\lambda)^{-\chi_c(U,M)},\end{aligned}$$

où $h^i_c(U, M) = \dim_C H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M)$ et $c(\lambda) = (-1)^{(s-1)a}\pi^{-ar}$, cf. exemple 4.3.2. De même $\det_{M(\lambda)}(x) = \det_M(x)^s c(\lambda)^{\deg(x)\,\mathrm{rg}(M)}$ et, par la proposition 2.19(2),

$$\varepsilon_0(M_{\eta_x}(\lambda), \omega_x) = \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)^s c(\lambda)^{\deg(x)(\mathrm{irr}(M_{\eta_x}) + (\mathrm{v}_x(\omega)+1)\,\mathrm{rg}(M))}.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Par conséquent, le membre de droite de (4.3.5.1) calculé en $M(\lambda)$ est égal au produit

$$q^{(1-g)\operatorname{rg}(M)s}\cdot \prod_{x\in|U|}(q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)\operatorname{rg}(M)s}\det{}_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)s}c(\lambda)^{\operatorname{rg}(M)\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)})$$
$$\cdot\prod_{x\in X\setminus U}\varepsilon_0(M_{\eta_x},\omega_x)^s c(\lambda)^{\deg(x)(\operatorname{irr}(M_{\eta_x})+(\mathrm{v}_x(\omega)+1)\operatorname{rg}(M))}$$

qui, par hypothèse, est égal à

$$\det{}_C(-\mathrm{F}^*\mid H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-s}c(\lambda)^{(\sum_{x\in|X|}\operatorname{rg}(M)\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)+\sum_{x\in X\setminus U}\deg(x)(\operatorname{irr}(M_{\eta_x})+\operatorname{rg}(M)))}.$$

On conclut compte tenu de $\sum_{x\in|X|}\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)=2g-2$ et de la formule de Grothendieck–Ogg–Chafarevitch pour les F-isocristaux surconvergents [CM02, théorème 1.2] :

$$\begin{aligned}\chi_c(U,M)&=\chi_c(U)\operatorname{rg}(M)-\sum_{x\in X\setminus U}\deg(x)\operatorname{irr}(M_{\eta_x})\\&=\Big(2-2g-\sum_{x\in X\setminus U}\deg(x)\Big)\operatorname{rg}(M)-\sum_{x\in X\setminus U}\deg(x)\operatorname{irr}(M_{\eta_x}).\end{aligned}\qquad\square$$

4.3.7 On note $\mathbb{A}_{k(\eta)}$ l'anneau des adèles de $k(\eta)$. Le choix de la différentielle ω détermine un caractère additif non-trivial $\psi(\omega)\colon\mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta)\to C^{\mathrm{nr}*}$, tel que pour tout $x\in|X|$, le composé de $\psi(\omega)$ et $K_x\hookrightarrow\mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta)$ soit égal à $\psi(\omega_x)$.

Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U,X|C)^u$, $\theta\colon\pi_1(U,\bar\eta)\to\mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ la représentation à monodromie géométrique locale finie associée à M par le théorème 4.1.12. On considère l'homomorphisme $\pi_1(\eta,\overline{\eta})\to\pi_1(U,\overline{\eta})\to\mathrm{Aut}_\Lambda(V)$. Si $\operatorname{rg}(M)=1$, alors cet homomorphisme se factorise par $\pi_1(\eta,\overline{\eta})^{\mathrm{ab}}\to\Lambda^*$. Par composition avec l'homomorphisme de réciprocité globale $\mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^*\to\pi_1(\eta,\overline{\eta})^{\mathrm{ab}}$, on obtient un homomorphisme $\mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^*\to\Lambda^*$, qu'on note $\chi(M)$ et qu'on appelle *quasi-caractère global associé à M*.

4.3.8 Soient U un ouvert non-vide de X et $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U,X|C)$. On définit un homomorphisme

$$\mathrm{d}(M)\colon k(\eta)^*\longrightarrow C^{\mathrm{nr}*}$$

de la façon suivante. Soient $x\in|X|$, $\alpha\in k(\eta)^*$. On note α_x l'image de α par l'homomorphisme composé $k(\eta)^*\hookrightarrow K_x^*\to W^{\mathrm{ab}}_{K_x}$, où la seconde flèche est l'isomomorphisme de réciprocité locale. Alors le produit

$$\mathrm{d}(M)(\alpha)=\prod_{x\in|X|}\det\rho_{\eta_x}(\alpha_x)\in C^{\mathrm{nr}*}\tag{4.3.8.1}$$

est bien défini. Il est clair que $d(M)$ est un homomorphisme.

PROPOSITION 4.3.9. *Soient U un ouvert non vide de X, M un objet de F-$\mathrm{Isoc}^\dagger(U,X|C)$. Alors :*

(1) $\mathrm{d}(M)=1$;

(2) *le deuxième membre de (4.3.5.1) ne dépend pas du choix de ω.*

Démonstration. L'affirmation (1) implique (2). En effet, si on remplace ω par $\alpha\omega$, avec $\alpha\in k(\eta)^*$, alors en appliquant la proposition 2.19(1), on voit que le deuxième membre de (4.3.5.1) est multiplié par $d(M)(\alpha)$.

Montrons (1). Pour tout point fermé x de X, on vérifie que $\mathrm{WD}(\det(M_{\eta_x}))=\det(\mathrm{WD}(M_{\eta_x}))$; donc $\mathrm{d}(M)=\mathrm{d}(\det(M))$, et on se réduit au cas où M est de rang 1. D'abord traitons le cas où M est unité : pour tout $\alpha\in k(\eta)^*$, on a $\mathrm{d}(M)(\alpha)=\chi(M)(\alpha)=1$, cf. § 4.3.7. Dans le cas général, par le corollaire 4.1.10, il existe $\lambda\in(1/eh)\mathbb{Z}$ et un F-isocristal surconvergent unité M' tel que $M=M'(\lambda)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Pour tout $\alpha \in k(\eta)^*$, on calcule

$$\mathrm{d}(M'(\lambda))(\alpha) = \prod_{x\in|X|} \rho'_{\eta_x}(\alpha_x)\pi^{-\lambda a \deg(x) \mathrm{v}_x(\alpha)} = \mathrm{d}(M')(\alpha)\pi^{-\lambda a \sum_{x\in|X|}\deg(x)\mathrm{v}_x(\alpha)}.$$

Ceci est égale à 1, car $\mathrm{d}(M') = 1$ et $\sum_{x\in|X|}\deg(x)\mathrm{v}_x(\alpha) = 0$. □

4.3.10 Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On pose

$$\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X, M, t) = \prod_{x\in|X|} L(M_{\eta_x}, t^{\deg x}). \tag{4.3.10.1}$$

Ce produit converge formellement dans $1 + tC^{\mathrm{nr}}[\![t]\!]$ car X est de type fini et

$$L(M_{\eta_x}, t^{\deg x}) = L(\mathrm{WD}(M_{\eta_x}), t^{\deg x}) = \det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)}\varphi^{a\deg(x)}, M_{\eta_x}^{\nabla})^{-1}$$

appartient à $1 + t^{\deg(x)}C(x)[\![t]\!]$, cf. (3.4.5.2).

Théorème 4.3.11 (Tate). *Soient U un ouvert non-vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1, et $\omega \in \Omega^1_{k(\eta)/k}\backslash\{0\}$. Alors*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X, M, t) = q^{(1-g)}t^{-\chi_c(U,M)} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)\, \mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X, M^\vee, q^{-1}t^{-1}).$$

Démonstration. Soient $\chi(M)\colon \mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^* \to \Lambda^*$ le quasi-caractère globale associée à M, et $\psi(\omega)\colon \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta) \to C^{\mathrm{nr}*}$ le caractère additif non-trivial associé à ω, cf. § 4.3.7. Par la définition de $\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X, M, t)$ et $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)$, l'équation fonctionnelle recherchée est l'équation fonctionnelle globale de Tate relative à $\chi(M)$ et $\psi(\omega)$, cf. [Lau87, (3.1.2.4)–(3.1.3.5)]. □

Lemme 4.3.12. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1. Supposons que $X\backslash U$ soit non vide et, pour tout x dans $X\backslash U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble. Alors $H^0_{\mathrm{rig}}(U, M) = 0 = H^2_{\mathrm{rig},c}(U, M)$ et $H^1_{\mathrm{rig},c}(U, M) \cong H^1_{\mathrm{rig}}(U, M)$. En particulier $L_\circ(U, M, t) = L(U, M, t) = \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^1_{\mathrm{rig}}(U, M))$.*

Démonstration. Comme U est une courbe affine, on a par le théorème 4.2.5

$$L(U, M, t) = \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^1_{\mathrm{rig},c}(U, M)) \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^2_{\mathrm{rig},c}(U, M))^{-1}$$

et par définition

$$L_\circ(U, M, t) = \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^1_{\mathrm{rig}}(U, M)) \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \mid H^0_{\mathrm{rig}}(U, M))^{-1}.$$

On considère la suite exacte [Cre92, (3.1.4)],

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{rig}}(U, M) \to H^0_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) \to H^1_{\mathrm{rig},c}(U, M)& \\ \to H^1_{\mathrm{rig}}(U, M) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) \to H^2_{\mathrm{rig},c}(U, M) \to 0&, \end{aligned}$$

où par définition $H^i_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) = \bigoplus_{x\in X\backslash U} H^i_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M)$, $H^0_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \operatorname{Ker}\nabla_x$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \operatorname{Coker}\nabla_x$. Comme M est unité, on a [Cre92, (3.2.10)]

$$\dim_C H^0_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \dim_C H^1_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M).$$

Par hypothèse, pour tout $x \in X\backslash U$, M_{η_x} est non-trivial de rang 1. Donc $\operatorname{Ker}\nabla_x = 0$. □

Lemme 4.3.13. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. Si pour un $x \in X\backslash U$, M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble, alors il existe $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(U \cup \{x\}, X|C)^u$ tel que $\widetilde{M}_{|U} = M$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On peut supposer $X\backslash U$ non-vide. Soient $x \in X\backslash U$, $Y = U \cup \{x\}$ et

$$\theta\colon \pi_1(U,\bar{\eta}) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$$

la représentation associée à M par le théorème 4.1.12. On a un homomorphisme surjectif

$$\mathrm{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta)) \to \pi_1(U,\bar{\eta})$$

dont le noyau est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ correspondant à la sous-extension de $k(\bar{\eta})/k(\eta)$ maximale non-ramifiée sur U, cf. [SGA1, exposé V, proposition 8.2]. Donc on déduit du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \eta_x \arrow[r, "j_x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ Y_{(x)} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

le diagramme cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\eta_x,\bar{\eta}_x) \arrow[r, "\pi_1(j_x)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \pi_1(U,\bar{\eta}_x) \arrow[d] \\ \pi_1(x,\bar{x}) \arrow[r] & \pi_1(Y,\bar{\eta}_x) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble et unité, donc $M^\dagger_{\eta_x}$ est $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$-soluble et la représentation $\theta \circ \pi_1(j_x)$ se factorise par $\pi_1(x,\bar{x})$, cf. proposition 3.3.6. Comme le carré est cocartésien en déduit une représentation continue $\widetilde{\theta}\colon \pi_1(Y,\bar{\eta}_x) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\eta_x,\bar{\eta}_x) \arrow[r, "\pi_1(j_x)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \pi_1(U,\bar{\eta}_x) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}_\Lambda(V) \\ \pi_1(x,\bar{x}) \arrow[r] & \pi_1(Y,\bar{\eta}_x) \arrow[ur, "\widetilde{\theta}"] & \end{tikzcd}$$

Le F-isocristal $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y,X|C)^u$, correspondant à $\widetilde{\theta}\colon \pi_1(Y,\bar{\eta}_x) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ par le théorème 4.1.12, répond à la question. $\square$

Théorème 4.3.14. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$ de rang 1. Alors M satisfait la conjecture 4.3.5.*

Démonstration. Comme M est de rang 1, quitte à décaler M par une pente dans $(1/eh)\mathbb{Z}$, cf. lemme 4.3.6 et corollaire 4.1.10, on peut supposer M unité de rang 1.

Comme M est unité, quitte à agrandir U, on peut supposer par le lemme 4.3.13 que pour tout $x \in X\backslash U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble, et puisque M est de rang 1, $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = 0$. On en déduit facilement que pour tout $x \in X\backslash U$, on a $(M^\vee_{\eta_x})^\nabla = 0$. D'où $\mathrm{L_{WD}}(X,M,t) = L(M,t)$ et de même pour $M^\vee$. L'équation fonctionnelle (4.2.6.1) s'écrit

$$L(M,t) = \det_C(-\mathrm{F}^*\,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} t^{-\chi_c(U,M)} L(M^\vee, q^{-1}t^{-1}).$$

En effet, il n'y a rien à montrer si $U = X$, et si $U \neq X$, c'est une conséquence du lemme 4.3.12. En comparant avec l'équation fonctionnelle de Tate (théorème 4.3.11)

$$\mathrm{L_{WD}}(X,M,t) = q^{(1-g)} t^{-\chi_c(U,M)} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(M_{\eta_x},\omega_x)\, \mathrm{L_{WD}}(X,M^\vee,q^{-1}t^{-1}),$$

on obtient,

$$\det_C(-\mathrm{F}^*\,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} = q^{(1-g)} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(M_{\eta_x},\omega_x).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Pour $x \in X\backslash U$, on a $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = 0$, d'où $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) = \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)$, cf. (3.4.5.4). Pour $x \in |U|$, par le lemme 4.3.3 et la proposition 2.19(2), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) &= q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)} \det \rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^{*\mathrm{v}_x(\omega)}) \\ &= q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)} \det{}_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Théorème 4.3.15. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. Si M est fini (définition 4.1.13), alors il satisfait la conjecture 4.3.5.*

Démonstration. D'après le théorème 4.1.12, on a un isomorphisme canonique de groupes de Grothendieck

$$\mathbf{Gr}(F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u) \longrightarrow \mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(\pi_1(U, \bar\eta))). \tag{4.3.15.1}$$

La relation (4.3.5.1) est une équation sur le groupe de gauche. En vertu du théorème 4.3.14, elle est vérifiée pour les F-isocristaux de rang 1. On en déduit qu'elle est vérifiée pour $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ si et seulement si elle est vérifiée pour $[M] - \mathrm{rg}(M)[\mathcal{O}_U^\dagger]$, où $[\mathcal{O}_U^\dagger]$ est la classe de l'isocristal trivial. Soient $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ fini, $\theta\colon \pi_1(U, \overline{\eta}) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(W)$ son image par le théorème 4.1.12 ; donc θ se factorise par un quotient fini G de $\pi_1(U, \overline{\eta})$. On sait d'après le théorème d'induction de Brauer [Del73, proposition 1.5], que

$$[W] - (\dim_\Lambda W)[\Lambda] = \sum_{H, W_H} n_{W_H} \mathrm{Ind}_H^G([W_H] - [\Lambda])$$

où H varie parmi les sous-groupes de G, W_H est une représentation de rang 1 de H, n_{W_H} est un entier, et $[\Lambda]$ désigne la classe de la représentation triviale. Transposant cette relation par (4.3.15.1) sur le groupe de Grothendieck de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$, il suffit de montrer l'assertion suivante. Soient

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\bar f"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien, avec f étale, Y lisse, $\bar f$ fini, et $P \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)^u$ de rang 1. Alors la conjecture (4.3.5.1) est verifiée pour $f_*([P] - [\mathcal{O}_V^\dagger]) = [f_*P] - [f_*\mathcal{O}_V^\dagger]$.

Soient $y \in Y\backslash V$, $x = \bar f(y)$, et $W_{\eta_y} \in \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(\pi_1(\eta_y, \bar\eta_y))$ tel que $D_y^\dagger(W_{\eta_y}) = P_{\eta_y}^\dagger$. Par § 4.1.14 et le théorème 4.1.12, on a pour tout $x \in |X|$,

$$(f_*P)_{\eta_x}^\dagger = \bigoplus_{y \mapsto x} D_x^\dagger(\mathrm{Ind}_{\pi_1(\eta_y, \bar\eta_y)}^{\pi_1(\eta_x, \bar\eta_y)} W_{\eta_y}).$$

On en déduit que :

(i) pour tout $y \in V$,

$$\det{}_{f_*P}(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)} = \prod_{y \mapsto x} \det{}_P(y)^{\mathrm{v}_y(f^*\omega)} \ ; \tag{4.3.15.2}$$

(ii) pour tout $y \in Y\backslash V$, on a

$$\det{}_{f_*P}(x) = \prod_{y \mapsto x} \det{}_P(y)^{e_{K_y/K_x}} \ ;$$

et, par le théorème 2.14(2),

$$\varepsilon([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y \mapsto x} \varepsilon([P_{\eta_y}] - [(\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_y}], (f^*\omega)_y).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Comme P est unité, $N_{\eta_x} = 0$; donc $\varepsilon_0(P_{\eta_x}, \omega) = \varepsilon(P_{\eta_x}, \omega)\det_P(x)$. Par (ii) ci-dessus, on a alors

$$\varepsilon_0([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y\mapsto x} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [(\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_y}], (f^*\omega)_y). \tag{4.3.15.3}$$

Pour tout i, on a $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, f_*P) = H^i_{\mathrm{rig},c}(V, P)$ (voir [Cre92, Lemma 4.2]) ; donc

$$\det_C(-\mathrm{F}^* \mid H^*_{\mathrm{rig},c}(U, [f_*P] - [f_*\mathcal{O}_V^\dagger]))^{-1} = \det_C(-\mathrm{F}^* \mid H^*_{\mathrm{rig},c}(V, [P] - [\mathcal{O}_V^\dagger]))^{-1}$$

qui est égale, par le théorème 4.3.14, à

$$\prod_{y\in|V|} \det_P(y)^{\mathrm{v}_y(f^*\omega)} \prod_{y\in Y\setminus V} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [\mathcal{O}_V^\dagger], (f^*\omega)_y).$$

Par (4.3.15.2) et (4.3.15.3), ce dernier est égal à

$$\prod_{x\in|U|} \det_{f_*P}(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)} \prod_{x\in X\setminus U} \varepsilon_0([f_*P_{\eta_x}] - [f_*\mathcal{O}_V^\dagger], \omega_x)$$

ce qui termine la démonstration. □

5. Facteurs epsilon et corps des normes

5.1 Rappels et compléments sur le corps des normes et sur la ramification

5.1.1 On désigne par K un corps de valuation discrète complet, à corps résiduel fini, et on reprend les notations de § 2.1. A partir de § 5.1.5 on supposera K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit L une extension séparable finie de K. On note $\mathcal{D}_{L/K}$ la différente de l'extension L/K, $e_{L/K}$ l'indice de ramification et $\mathrm{tr}_{L/K}$ (respectivement $N_{L/K}$) la trace (respectivement la norme) de L dans K. Soient m, t deux entiers. Pour que $\mathrm{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) \subseteq \mathfrak{m}_K^t$, il faut et il suffit que [Ser68a, ch. III, § 3, proposition 7]

$$\mathfrak{m}_L^m \subseteq \mathcal{D}_{L/K}^{-1}\mathfrak{m}_K^t = \mathcal{D}_{L/K}^{-1}\mathfrak{m}_L^{e_{L/K}t}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) = \mathfrak{m}_K^{t_{L/K}(m)}, \quad \text{où } t_{L/K}(m) = \left[\frac{m + \mathrm{v}_L(\mathcal{D}_{L/K})}{e_{L/K}}\right]. \tag{5.1.1.1}$$

(Pour tout nombre rationnel x, on a noté $[x]$ la partie entière de x.)

5.1.2 Supposons L contenue dans K^{sep} et notons $\mathrm{Hom}_K(L, K^{\mathrm{sep}})$ l'ensemble pointé des K-plongements de L dans K^{sep}. Pour $\gamma \in \mathrm{Hom}_K(L, K^{\mathrm{sep}})$, on pose [Win83, § 1.1.1]

$$i_{L/K}(\gamma) = \min_{x\in\mathcal{O}_L} (\mathrm{v}'_L(\gamma(x) - x)),$$

où v'_L est l'unique valuation de K^{sep} prolongeant v_L.

Lemme 5.1.3 [Win83, proposition 2.2.1]. *Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré une puissance de p et $\nu(L/K)$ le plus petit saut de ramification supérieure. Alors pour tous $x, y \in L$, on a*

$$\mathrm{v}_K(N_{L/K}(x+y) - N_{L/K}(x) - N_{L/K}(y)) \geqslant \min(\mathrm{v}_L(x), \mathrm{v}_L(y)) + \frac{p-1}{p}\nu(L/K).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $\min(\mathrm{v}_L(x), \mathrm{v}_L(y)) = 0$, qui est un cas particulier de [Win83, proposition 2.2.1(i)]. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

5.1.4 Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré p et i le nombre de ramification inférieure. La fonction d'Herbrand ψ de L/K, est donnée par [Ser68a, ch. V, § 3]

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant i\ ; \\ i + p(x-i) & \text{si } x \geqslant i. \end{cases}$$

Donc i est aussi le saut (unique) de la ramification supérieure de L/K. Quand il n'y a aucun risque de confusion, on laissera tomber les indices L/K dans la notation $N_{L/K}$. Pour tout entier $c \geqslant 0$, suivant les notations de § 2.17, on a, cf. [Ser68a, ch. V, § 3, proposition 4],

$$N(U_L(\psi(c))) \subseteq U_K(c) \quad \text{et} \quad N(U_L(\psi(c)+1)) \subseteq U_K(c+1).$$

On en déduit un homomorphisme

$$N(c)\colon U_L(\psi(c))/U_L(\psi(c)+1) \longrightarrow U_K(c)/U_K(c+1).$$

Pour $c < i$, $N(c)$ est un isomorphisme de $U_L(c)/U_L(c+1)$ vers $U_K(c)/U_K(c+1)$, cf. [Ser68a, ch. V, § 3, corollaires 1–2 de la proposition 5]. Par conséquent, pour tout $c \leqslant i$, la norme induit un isomorphisme [Ser68a, ch. V, § 3, corollaire 6 de la proposition 5]

$$\mathcal{O}_L^*/U_L(c) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K^*/U_K(c). \tag{5.1.4.1}$$

On a $\mathrm{v}_L(\mathcal{D}_{L/K}) = (i+1)(p-1)$, cf. [Ser68a, ch. V, § 3, lemme 3]. Donc, compte tenu de (5.1.1.1), on obtient

$$e_K := \mathrm{v}_K(p) = \mathrm{v}_K(\mathrm{tr}_{L/K}(1)) \geqslant \left[\frac{(i+1)(p-1)}{p}\right] \geqslant \frac{p-1}{p} i. \tag{5.1.4.2}$$

5.1.5 On supposera désormais K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On désignera par K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée, i.e. une extension galoisienne ramifiée de groupe de Galois Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Comme tout sous-groupe non-trivial de $\mathbb{Z}_p$ est d'indice fini, l'extension maximale non-ramifiée K_0 de K dans K_∞ est finie. Pour $r \geqslant 0$, on note K_r l'unique extension de K_0 dans K_∞ de degré p^r, $1_r\colon K_r^* \to C^*$ le quasi-caractère trivial et on pose $\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{K_r}$, $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_{K_r}$, $U_r = U_{K_r}$.

L'extension K_∞/K est arithmétiquement profinie dans le sens que pour tout nombre réel u, le sous-groupe de ramification supérieur Γ^u de Γ est d'indice fini. On peut alors définir une fonction de Herbrand, $\Psi_{K_\infty/K}$, par la formule [Win83, définition 1.2.1]

$$\Psi_{K_\infty/K}(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0\ ; \\ \displaystyle\int_0^x |\Gamma^0 : \Gamma^\nu|\, d\nu & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On note $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres de ramification supérieure de l'extension K_∞/K_0. Ce sont des entiers par le théorème de Hasse–Arf. On définit la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de ramification inférieure de l'extension K_∞/K, en posant $i_n = \Psi_{K_\infty/K}(\nu_n)$. C'est une suite strictement croissante d'entiers. Pour tout $r > 0$, $i_0, \ldots, i_{r-1}$ sont les nombres de ramification inférieure de l'extension K_r/K_0 ; en particulier, i_r est le nombre de ramification (inférieure) de K_{r+1}/K_r.

5.1.6 Soit E_K le corps des normes associé à l'extension K_∞/K, cf. [Win83, § 2]. C'est un corps de caractéristique p, complet pour une valuation discrète. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à celui de K_0 ; on note q_0 son cardinal. On rappelle qu'en tant qu'ensembles, $\mathrm{E}_K = \varprojlim_r K_r$, la limite étant prise suivant les applications normes. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_K, l'addition et la multiplication sont définies par

$$\begin{aligned} x + y &= (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{où } z_n = \lim_{m\to+\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m), \\ xy &= (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Pour $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K^*$, $\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y) = \mathrm{v}_{K_n}(y_n)$, pour tout $n \geqslant 0$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

5.1.7 Dans la suite de cette section, par extension algébrique de K, on sous-entend une extension de K contenue dans K^{sep}. Pour des extensions algébriques L et F de K, on notera $L \cdot F$ la plus petite extension de K contenant L et F. Pour toute extension finie L de K on posera $L_\infty = K_\infty \cdot L$; c'est une $\mathbb{Z}_p$-extension de L et le corps des normes E_L de L_∞/L est une extension séparable finie de E_K. La formation du corps des normes est fonctorielle et la limite inductive de E_L, pour L variant parmi les extensions finies de K, est une clôture séparable de E_K, qui sera notée $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$. Le groupe de Galois G_K agit par fonctorialité sur $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$, identifiant $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$ au groupe de Galois de $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ sur E_K. Pour tout r assez grand (il suffit que K_r contienne $L \cap K_\infty$), la restriction induit une bijection d'ensembles pointés $\mathrm{Hom}_{K_{r+1}}(L \cdot K_{r+1}, K^{\mathrm{sep}}) \to \mathrm{Hom}_{K_r}(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}})$. On en déduit, par fonctorialité, une bijection d'ensembles pointés

$$f_r\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_K}(\mathrm{E}_L, \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}) \to \mathrm{Hom}_{K_r}(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}}). \tag{5.1.7.1}$$

Si de plus L/K est galoisienne, alors ces bijections sont des isomorphismes de groupes et pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$, on a

$$N_{L\cdot K_{r+1}/L\cdot K_r} \circ f_{r+1}(\gamma) = f_r(\gamma) \circ N_{L\cdot K_{r+1}/L\cdot K_r}. \tag{5.1.7.2}$$

Lemme 5.1.8 [Win83, proposition 3.3.2]. *Soient L une extension finie de K et $\gamma\colon \mathrm{E}_L \hookrightarrow \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ un E_K-plongement. Alors*

$$i_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}(\gamma) = \lim_{r\to+\infty} i_{L\cdot K_r/K_r}(f_r(\gamma)).$$

5.1.9 L'extension finie L/K est dite *admissible* (par rapport à K_∞) si $L \cap K_\infty = K$ et si $L \cdot K_0$ est l'extension maximale non-ramifiée de L dans L_∞. Dans ce cas, pour tout $r \geqslant 0$, $L \cdot K_r = L_r$. On remarque que, quitte à remplacer L et K par des extensions finies contenues respectivement dans L_∞ et K_∞, on peut toujours supposer l'extension L/K admissible.

5.1.10 Pour tout entiers $c, r \geqslant 0$ tels que $i_r \geqslant c$, on a un morphisme de suites exactes courtes induit par la norme (voir § 5.1.4),

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r] & U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K_{r+1}^* \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K_{r+1}^*/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} \arrow[r] & U_r(c) \arrow[r] & K_r^* \arrow[r] & K_r^*/U_r(c) \arrow[r] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

Pour c fixé et r variable, ces diagrammes définissent une suite exacte courte de systèmes projectifs. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geqslant c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geqslant c} K_r^* \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geqslant c} K_r^*/U_r(c). \tag{5.1.10.1}$$

De façon analogue, on dispose de la suite exacte courte de systèmes projectifs :

$$\mathbf{1} \longrightarrow (U_r(c+1))_{i_r>c} \longrightarrow (U_r(c))_{i_r>c} \longrightarrow (U_r(c)/U_r(c+1))_{i_r>c} \longrightarrow \mathbf{1},$$

les morphismes de transition étant induits par la norme. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c+1) \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c)/U_r(c+1). \tag{5.1.10.2}$$

Lemme 5.1.11. *Soit $c \geqslant 0$ un entier.*

(1) *La limite projective $\varprojlim_{i_r \geqslant c} U_r(c)$ est canoniquement isomorphe à $U_{\mathrm{E}_K}(c)$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

(2) *Le système projectif* $(K_r^*/U_r(c))_{i_r\geqslant c}$ *est constant, i.e. les applications de transition sont des isomorphismes. La suite (5.1.10.1) est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1}\longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)\longrightarrow \mathrm{E}_K^*\longrightarrow \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c)\longrightarrow \mathbf{1}.$$

(3) *Le système projectif* $(U_r(c)/U_r(c+1))_{i_r>c}$ *est constant. La suite (5.1.10.2) est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1}\longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c+1)\longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)\longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c+1)\longrightarrow \mathbf{1}.$$

Démonstration. En tant que groupes, $\mathrm{E}_K^*=\varprojlim_{r\in\mathbb{N}}K_r^*$, cf. § 5.1.6. Montrons (1). Par fonctorialité, on a un monomorphisme canonique $\varprojlim_{i_r\geqslant c}U_r(c)\hookrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)$. Montrons qu'il est surjectif. C'est évident si $c=0$. Supposons $c>0$. Soient $x=(x_r)_{r\in\mathbb{N}}\in U_{\mathrm{E}_K}(c)$, et $y=(y_r)_{r\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^c$, tels que $x=1+y$. Pour tout entier $r\geqslant 0$,

$$\mathrm{v}_{K_r}(x_r-1)=\mathrm{v}_{K_r}\Big(\lim_{n\to+\infty}N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{v}_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1).$$

Appliquant le lemme 5.1.3, compte tenu que $\nu(K_n/K_r)=\nu(K_{r+1}/K_r)=\nu_r$ tend vers l'infini avec r, on voit qu'il existe un entier s, tel que pour tout $n\geqslant r\geqslant s$, on a $\mathrm{v}_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1)=\mathrm{v}_{K_r}(y_r)=\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y)\geqslant c$. Donc pour tout $r\geqslant s$, $x_r\in U_r(c)$, et par § 5.1.4, cela vaut aussi pour tout r tel que $i_r\geqslant c$. D'où $x\in\varprojlim_{i_r\geqslant c}U_r(c)$ et l'assertion est démontrée. Montrons (2). On remarque d'abord que le système $(U_r(c))_{i_r\geqslant c}$ ne vérifie pas la condition de Mittag–Leffler; donc l'exactitude à droite de (5.1.10.1) n'est pas une conséquence du critère usuel [EGAIII, § 0.13.2]. Comme la suite (5.1.10.1) est exacte, on obtient par (1), un monomorphisme $\mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c)\hookrightarrow\varprojlim_{i_r\geqslant c}K_r^*/U_r(c)$. Supposons d'abord $c=0$. Pour tout r, la valuation v_{K_r} induit un isomorphisme de $K_r^*/U_r(0)$ sur $\mathbb{Z}$ et les applications de transitions induisent l'identité de $\mathbb{Z}$. D'où un monomorphisme $\mathrm{E}_K^*/U(0)\hookrightarrow\mathbb{Z}$, qui est un isomorphisme car la classe d'une uniformisante est envoyée sur 1. Ceci montre (2) dans le cas $c=0$. Supposons $c\geqslant 1$. Les applications normes induisent, pour tout entier r tel que $i_r\geqslant c$, le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r] & U_{r+1}(0)/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N'"] & K_{r+1}^*/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K_{r+1}^*/U_{r+1}(0) \arrow[r] \arrow[d, "N''"] & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} \arrow[r] & U_r(0)/U_r(c) \arrow[r] & K_r^*/U_r(c) \arrow[r] & K_r^*/U_r(0) \arrow[r] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

On vient de voir que N'' est un isomorphisme. Comme $i_r\geqslant c$, N' est un isomorphisme, cf. § 5.1.4. Il est alors de même pour N et le système projectif $\big(K_r^*/U_r(c)\big)_{i_r\geqslant c}$ est constant. Pour r tel que $i_r\geqslant c$, on note pr_r le monomorphisme composée

$$\mathrm{pr}_r\colon \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c)\hookrightarrow\varprojlim_{i_r\geqslant c}K_r^*/U_r(c)\xrightarrow{\sim}K_r^*/U_r(c).$$

La restriction de pr_r à $U_{\mathrm{E}_K}(0)/U_{\mathrm{E}_K}(c)$ se factorise par $U_r(0)/U_r(c)\subset K_r^*/U_r(c)$; on en déduit le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_{\mathrm{E}_K}(0)/U_{\mathrm{E}_K}(c) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\mathrm{pr}_r"] & \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_r(0)/U_r(c) \arrow[r] & K_r^*/U_r(c) \arrow[r] & K_r^*/U_r(0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a démontré que la flèche de droite est un isomorphisme (cas $c=0$). Celle de gauche l'est aussi, car elle est injective et les deux groupes sont finis de même cardinal égal à $(q_0-1)q_0^{c-1}$. Donc l'application du milieu est un isomorphisme et on a démontré l'assertion (2). La démonstration de (3) est analogue à celle de (2). $\square$

5.2 Tours admissibles de caractères additifs

5.2.1 Conservons les hypothèses de § 5.1.5 et considérons un corps C algébriquement clos de caractéristique 0. Il sera commode de noter j_r le plus petit entier supérieur ou égal à $((p-1)/p)i_r$; on appelle $(j_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure *modifiée* de K_∞/K.

Soient $n \leqslant -d$ et $r \geqslant 0$ des entiers. Le groupe $\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}$ est fini d'ordre q_0^{-n-d}. Si $j_r \geqslant -n-d$, alors il est annulé par p. En effet, par (5.1.4.2), $e_{K_r} \geqslant -n-d$; d'où pour tout $x \in \mathfrak{m}_r^n$, $px \in \mathfrak{m}_r^{-d}$. De plus, sous les mêmes hypothèses, il résulte du lemme 5.1.3 que la norme $N_{K_{r+1}/K_r}\colon K_{r+1} \to K_r$ induit un homomorphisme de groupes

$$N\colon \mathfrak{m}_{r+1}^n/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \longrightarrow \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}. \tag{5.2.1.1}$$

En effet N est un isomorphisme car il est injectif, compte tenu que $\mathrm{v}_{K_{r+1}} = \mathrm{v}_{K_r} \circ N_{K_{r+1}/K_r}$, et les groupes sont finis de même cardinal.

Soit $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif d'ordre d. On note $\overline{\psi}\colon K/\mathfrak{m}_K^{-d} \to C^*$ sa réduction (si $d=+\infty$, on pose $\mathfrak{m}_K^{-d} = K$). Par abus, on notera encore $\overline{\psi}$ la restriction de $\overline{\psi}$ à $\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}$ pour tout $n \leqslant -d$. Si $j_r \geqslant -n-d$, on a $\overline{\psi}_r(\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}) \subseteq \mu_p(C)$.

DÉFINITION 5.2.2. On dit qu'une suite $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de caractères additifs $\psi_r\colon K_r \to C^*$ est une *tour admissible* si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) il existe un entier $s \geqslant 0$, tel que pour tout $r \geqslant s$, $d(\psi_r) = d(\psi_s) = d$;

(ii) pour tout $n \leqslant -d$ et $r \geqslant s$ tels que $j_r \geqslant -n-d$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_{r+1}^n/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{r+1}"] \arrow[d, "N"', "\wr"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\ \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_r"] & \mu_p(C) \end{tikzcd}$$

est commutatif ; on appelle d l'*ordre* de la tour.

Remarque 5.2.3. Il est clairement suffisant de vérifier la condition (ii) de la définition 5.2.2 pour tout $r \geqslant s$ et $n = -j_r - d$.

DÉFINITION 5.2.4. Soit $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible d'ordre d. On lui associe un caractère additif $\psi_\infty\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ d'ordre d comme suit. Soient s un entier comme dans la définition 5.2.2, et $x = (x_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$, où $x_r \in K_r$. On pose

$$\psi_\infty(x) = \psi_r(x_r), \quad \text{pour } r \geqslant s \text{ tel que } j_r \geqslant -\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(x) - d.$$

Par la définition d'une tour admissible, $\psi_r(x_r)$ appartient à $\mu_p(C)$ et ne dépend pas de r. On vérifie immédiatement que ψ_∞ est un caractère additif d'ordre d. On l'appelle la *limite de la tour* $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 5.2.5. *Soient s un entier positif, $\psi\colon K_s \to C^*$ et $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ des caractères additifs de même ordre d. Alors il existe une tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geqslant s$, $d(\psi_r) = d$.*

Démonstration. Comme ψ et θ ont même ordre, si l'un de deux est trivial l'autre aussi et dans ce cas l'énoncé est évident. Supposons ψ et θ non-triviaux. On prouve d'abord qu'il suffit de construire une tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geqslant s$, $d(\psi_r) = d$. En effet, si $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est une telle tour, par la proposition 2.6 il existe $a = (a_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$ tel que $\theta(x) = \psi_\infty(ax)$. Comme ψ_∞ et θ ont le même ordre, a appartient à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}^*$ et par conséquent, $a_r \in \mathcal{O}_r^*$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. On considère la tour $(\psi'_r)_{r\in\mathbb{N}}$, définie par

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

$$\psi'_r(x) = \begin{cases} \psi_r(x) & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant s \ ; \\ \psi_r(a_r x) & \text{si } r > s. \end{cases}$$

Par construction $(\psi'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est la tour admissible recherchée.

Il reste à construire la tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$. On procède par récurrence sur r. On choisit d'abord, pour tout entier $r \geqslant 0$, une base $\phi_r \in \mathrm{Hom}_c(K_r, C^*)$, telle que $\phi_s = \psi$ et que pour tout $r \geqslant s$, ϕ_r ait ordre d ; c'est toujours possible par § 2.9. Pour tout $0 \leqslant r \leqslant s$, on peut prendre $\psi_r = \phi_r$, la condition (ii) de la définition 5.2.2 étant vide. On suppose donnée, pour $h \geqslant s$, une tour finie $(\psi_i)_{0\leqslant i\leqslant h}$, avec $\psi_s = \psi$, $d(\psi_i) = d$ pour $s \leqslant i \leqslant h$, et satisfaisant à la condition (ii) de la définition 5.2.2 ; on doit définir un caractère additif ψ_{h+1} d'ordre d tel que la condition (ii) de la définition 5.2.2 soit vérifiée pour $r = h$ et $n = -j_h - d$, cf. remarque 5.2.3. Avec les notations de § 5.2.1, il faut que la restriction de $\overline{\psi}_{h+1}$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$, se factorise comme suit.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d} & \xrightarrow{\overline{\psi}_{h+1}} & \mu_p(C) \\ {\scriptstyle N}\downarrow{\scriptstyle \wr} & & \| \\ \mathfrak{m}_{h}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h}^{-d} & \xrightarrow{\overline{\psi}_{h}} & \mu_p(C) \end{array}$$

Soit $\overline{\eta}_{h+1} = \Phi_{-j_h-d}(\phi_{h+1})^{-1}(\overline{\psi}_h \circ N) \in \mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h}$, cf. § 2.9. La restriction de $\overline{\psi}_h \circ N$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ est non triviale car $d(\psi_h) = d$ et N induit un isomorphisme de $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ vers $\mathfrak{m}_{h}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h}^{-d}$, cf. (5.2.1.1). On en déduit par § 2.9 que $\overline{\eta}_{h+1} \in (\mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h})^*$. On choisit $\eta_{h+1} \in \mathcal{O}_{h+1}^*$ relevant $\overline{\eta}_{h+1}$ et on prend $\psi_{h+1} = \Phi(\phi_{h+1})(\eta_{h+1})$. □

Proposition 5.2.6. *Soient $(\psi_r \colon K_r \to C^*)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs et L/K une extension finie admissible (§ 5.1.9). Alors la suite de caractères additifs $(\phi_r = \psi_r \circ \mathrm{tr}_{L_r/K_r})_{r\in\mathbb{N}}$ est une tour admissible et $\phi_\infty = \psi_\infty \circ \mathrm{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{n}$ (respectivement $\mathfrak{n}_r$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$ (respectivement $\mathcal{O}_{L_r}$) et $(j_r(L_\infty/L))_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure modifiée de L_∞/L. Il résulte du lemme 5.1.8, qu'il existe $s \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $r \geqslant s$, $\mathrm{v}_{L_r}(\mathcal{D}_{L_r/K_r}) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(\mathcal{D}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K})$ et $e_{L_r/K_r} = e_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$. Pour tous entiers $m \leqslant -d$ et r assez grand, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_{r+1}^{m}/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d} & \xrightarrow{\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}} & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r+1}^{t(-d)} \\ {\scriptstyle N_{L_{r+1}/L_r}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_{K_{r+1}/K_r}} \\ \mathfrak{n}_{r}^{m}/\mathfrak{n}_{r}^{-d} & \xrightarrow[\overline{\mathrm{tr}}_{r}]{} & \mathfrak{m}_{r}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r}^{t(-d)} \end{array} \tag{5.2.6.1}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par la trace $\mathrm{tr}_{L/K}$, les homomorphismes verticaux sont induits par les normes et $t(m) = t_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}(m)$, cf. (5.1.1.1). Montrons d'abord que (5.2.6.1) est commutatif. On note L'/K la clôture galoisienne de L/K dans K^{sep}. Quitte à remplacer L', L par des extensions finies contenues respectivement dans L'_∞, L_∞, on peut supposer L'/L admissible, puis, quitte à remplacer K par une extension finie contenue dans K_∞, on peut supposer à nouveau L/K admissible ; donc $L_r = L \cdot K_r$ et $L'_r = L' \cdot L_r = L' \cdot K_r$. Le groupe $\mathrm{Gal}(L'_{r+1}/L'_r)$ s'identifie par restriction à $\mathrm{Gal}(L_{r+1}/L_r)$ et à $\mathrm{Gal}(K_{r+1}/K_r)$; par conséquent la restriction de $N_{L'_{r+1}/L'_r}$ à L_{r+1} (respectivement K_{r+1}) est égale à N_{L_{r+1}/L_r} (respectivement N_{K_{r+1}/K_r}). On pose, pour $r \geqslant 0$, $\mathcal{F}_r = \mathrm{Hom}_{K_r}(L_r, K^{\mathrm{sep}})$ (respectivement $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_K}(\mathrm{E}_L, \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}})$). On rappelle qu'on dispose d'une bijection $f_r \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_r$, cf. (5.1.7.1). Soient $x \in \mathfrak{n}_{r+1}^m$ et $\overline{x}$ sa classe dans $\mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d}$. Si r est un entier assez grand, on a

$$\begin{aligned} N_{K_{r+1}/K_r}(\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}(\overline{x})) &= N_{K_{r+1}/K_r}\Bigl(\sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}\Bigr) \\ &= N_{L'_{r+1}/L'_r}\Bigl(\sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}\Bigr) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} N_{L'_{r+1}/L'_r}(\overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L'_{r+1}/L'_r}(x))} \quad (\text{par } (5.1.7.2)) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L_{r+1}/L_r}(x))} = \overline{\mathrm{tr}}_r(N_{L_{r+1}/L_r}(\overline{x})). \end{aligned}$$

Ceci montre la commutativité de (5.2.6.1).

On note $\mathfrak{m}_\infty$ (respectivement $\mathfrak{n}_\infty$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_L}$). Pour tout $n \leqslant -d$, le groupe $\mathfrak{m}_\infty^n/\mathfrak{m}_\infty^{-d}$ est la limite du système projectif $(\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d})_{j_r\geqslant -n-d}$, suivant les applications normes. Le diagramme commutatif (5.2.6.1) définit par passage à la limite un homomorphisme $\mathfrak{n}_\infty^m/\mathfrak{n}_\infty^{-d} \to \mathfrak{m}_\infty^{t(m)}/\mathfrak{m}_\infty^{t(-d)}$ qui est l'homomorphisme induit par la trace $\mathrm{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$. Soit d l'ordre de la tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Avec les notations de § 5.2.1, pour tout $n \leqslant -d$, l'application $\overline{\psi}_\infty\colon \mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^n/\mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^{-d} \to \mu_p(C)$ est la limite projective des $\overline{\psi}_r\colon \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d} \to \mu_p(C)$. Par la définition de ordre et par § 5.1.1,

$$d(\phi_r) = \max\{n\in\mathbb{Z} \mid \mathrm{tr}(\mathfrak{n}_r^{-n}) \subseteq \mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)}\} = -\mathrm{v}_{L_r}(\mathcal{D}_{L_r/K_r}^{-1}\mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)}).$$

Quitte à agrandir s, on a $d(\psi_r) = d$ et $d(\phi_r)$ est égal à $d_L = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(\mathcal{D}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}) + e_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K} d$. Pour conclure, il suffit de vérifier que pour $m \leqslant -d_L$ et $r \geqslant s$ tel que $j_r(L_\infty/L) \geqslant -m-d_L$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\phi}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{L_{r+1}/L_r}"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\ \mathfrak{n}_r^m/\mathfrak{n}_r^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\phi}_r"] & \mu_p(C) \end{tikzcd}$$

commute. Quitte à agrandir encore s le diagramme précédent s'insère dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \overline{\phi}_{r+1}\colon \mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{L_{r+1}/L_r}"] & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{K_{r+1}/K_r}"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\ \overline{\phi}_r\colon \mathfrak{n}_r^m/\mathfrak{n}_r^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_r"] & \mathfrak{m}_r^{t(m)}/\mathfrak{m}_r^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_r"] & \mu_p(C) \end{tikzcd}$$

On a déjà démontré que le carré de gauche commute et celui de droite commute par l'admissibilité de $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$, ce qui achève la preuve. □

5.3 Déformation au corps des normes

5.3.1 Conservons les hypothèses et les notations de §§ 5.1.5 et 5.2.1. L'image de W_{E_K} par l'isomorphisme canonique $G_{\mathrm{E}_K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$ (voir § 5.1.7) est contenue dans W_K (voir § 2.1) ; on la note $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$. La suite $(W_{K_r})_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite decroissante de sous-groupes de W_K ; leurs intersection coïncide avec $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$.

Soit $V = (V, \rho)$ une C-représentation de Weil de K. On pose, pour tout $r \geqslant 0$, $\rho_r = \rho_{|W_{K_r}}$, $V_r = (V, \rho_r)$. On définit une C-représentation de Weil de E_K, notée $V_\infty = (V, \rho_\infty)$, par

$$\rho_\infty \colon W_{\mathrm{E}_K} \xrightarrow{\sim} W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty) \xrightarrow{\rho_{|W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)}} \mathrm{GL}_C(V).$$

On appelle V_∞ la *déformation de V au corps des normes*. C'est évidemment un foncteur exact de $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ dans $\mathrm{Rep}_C(W_{\mathrm{E}_K})$; on note encore $\lambda \mapsto \lambda_\infty$ l'homomorphisme $\mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_K)) \to \mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_{\mathrm{E}_K}))$ induit sur les groupes de Grothendieck. Il résulte du lemme 5.1.8 que la suite $(\mathrm{ar}(\rho_r))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\rho_\infty)$; voir aussi [Mar04, lemmes 5.4 et 5.5].

Soient L/K une extension finie et V une C-représentation de Weil de L. On vérifie que

$$(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}} (V_\infty)^{\oplus |L \cap K_\infty : K|}$$

En particulier, si L/K est admissible, on a $(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}} (V_\infty)$.

Soient (V, ρ, N) une représentation de Weil–Deligne de K. Pour tout $r \geqslant 0$, on note V_r la C-représentation de Weil–Deligne (V, ρ_r, N) de K_r. On définit la déformation de (V, ρ, N) au corps des normes, notée abusivement V_∞, comme la C-représentation de Weil–Deligne (V, ρ_∞, N) de E_K.

5.3.2 Soit $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère. Pour tout entier $r \geqslant 0$, on note $\chi_r = \chi \circ N_{K_r/K}$ et $\chi_\infty\colon \mathrm{E}_K^* \to C^*$ le quasi-caractère défini par $\chi_\infty((x_r)_{r\in\mathbb{N}}) = \chi_r(x_r) = \chi_0(x_0)$. Soit $V(\chi)$ (respectivement $V(\chi_r)$, respectivement $V(\chi_\infty)$) la C-représentation de Weil de K (respectivement K_r, respectivement E_K) de rang 1 associée à χ (respectivement χ_r, respectivement χ_∞). On a alors $V(\chi)_\infty = V(\chi_\infty)$ et $V(\chi)_r = V(\chi_r)$, pour tout $r \geqslant 0$. On en déduit que la suite $(\mathrm{ar}(\chi_r))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\chi_\infty)$. On note c la partie entière de $\mathrm{ar}(\chi_\infty)/2$ et $c^+ = \mathrm{ar}(\chi_\infty) - c$, de sorte que $c^+ = c$ si $\mathrm{ar}(\chi_\infty)$ est pair et $c^+ = c + 1$ sinon.

Lemme 5.3.3. *Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère, $(\psi_r\colon K_r \to C^*)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible d'ordre d de caractères additifs non-triviaux et, pour $r \geqslant 0$, $a_r \in K_r$ une ψ_r-jauge de χ_r (voir § 2.17). Il existe alors un entier $s \geqslant 0$ tel que pour $r \geqslant s$,*

$$\frac{N(a_{r+1})}{a_r} \in U_r(c)$$
$$N(a_{r+1}) - a_r \in \mathfrak{m}_r^{-d-c^+}$$

où on a noté N la norme $N_{K_{r+1}/K_r}\colon K_{r+1} \to K_r$.

Démonstration. Pour tout entier $r \geqslant 0$, on choisit une uniformisante π_r de $\mathcal{O}_r$ telle que $N(\pi_{r+1}) = \pi_r$. Soit s tel que pour $r \geqslant s$, $\mathrm{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. Si $\mathrm{ar}(\chi_s) = 0$, alors, pour $r \geqslant s$, π_r^{-d} est une ψ_r-jauge de χ_r et le lemme est évident. On suppose $\mathrm{ar}(\chi_s) > 0$. On déduit la première équation de la deuxième en divisant par a_r. Si $y \in \mathcal{O}_{r+1}$, alors $\mathrm{v}_{K_r}(N(1+y) - 1 - N(y)) \geqslant j_r$, cf. lemme 5.1.3. Donc pour $r \geqslant s$, tel que $j_r \geqslant \mathrm{ar}(\chi_r) = c + c^+$, et pour $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $\mathrm{v}_{K_{r+1}}(y) \geqslant c^+ > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_{r+1}(a_{r+1}y) = \chi_{r+1}(1+y) &= \chi_r(N(1+y)) \\
&= \chi_r\left(1 + \frac{N(1+y) - 1 - N(y)}{1 + N(y)}\right)\chi_r(1 + N(y)) \\
&= \chi_r(1 + N(y)) \\
&= \psi_r(a_r N(y)).
\end{aligned}$$

Par définition de tour admissible, pour r et y comme ci-dessus, on a

$$\psi_{r+1}(a_{r+1}y) = \psi_r(N(a_{r+1})N(y)).$$

Donc, quitte à agrandir s, pour tout $r \geqslant s$ et tout $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $\mathrm{v}_{K_{r+1}}(y) \geqslant c^+$, on a $\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))N(y)) = 1$. Pour conclure il suffit de prouver que

$$\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))\mathfrak{m}_r^{c^+}) = \{1\}.$$

Soit $z \in \mathfrak{m}_r^{c^+}$. On pose $m = \mathrm{v}_{K_r}(z)$ et $z = \alpha\pi_r^m$, où $\alpha \in \mathcal{O}_r^*$. Par (5.1.4.1), il existe $\beta \in \mathcal{O}_{r+1}^*$ tel que $N(\beta) = \alpha(1+u)$, avec $u \in \mathfrak{m}_r^{i_r}$. Si on prend $y = \beta\pi_{r+1}^m$, alors $N(y) = N(\beta\pi_{r+1}^m) = z + zu$. Comme $i_r \geqslant j_r \geqslant c + c^+ > c$, alors

$$\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))z) = \psi_r((a_r - N(a_{r+1}))N(y))\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))zu)^{-1} = 1. \qquad \square$$

PROPOSITION 5.3.4. *Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère et $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe un entier positif s tel que pour tout $r \geqslant s$, on a*

$$\varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r) = \varepsilon([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_K}], \psi_\infty).$$

Démonstration. Soit s tel que pour $r \geqslant s$, $\mathrm{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. L'énoncé est évident si χ_s est non ramifié. Pour tout $r \geqslant s$, soit $a_r \in K_r$ une ψ_r-jauge de χ_r ; la classe $\overline{a}_r$ de a_r dans $K_r^*/U_r(c)$ est uniquement déterminée, cf. § 2.17. Par le lemme 5.3.3, quitte à agrandir s, on a, pour $r \geqslant s$, $N(\overline{a}_{r+1}) = \overline{a}_r$. On en déduit par le lemme 5.1.11(2), un élément $\overline{a}_\infty = (\overline{a}_r)_{r\geqslant s} \in \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c)$. Soit $a_\infty \in \mathrm{E}_K^*$ un relèvement de $\overline{a}_\infty$. Montrons que a_∞ est une ψ_∞-jauge de χ_∞. D'après § 2.17, on peut supposer que $a_r = (a_\infty)_r$; pour tout $r \geqslant s$, a_r est une ψ_r-jauge de χ_r et $N(a_{r+1}) = a_r$. Soit $y = (y_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$, de valuation $\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y) \geqslant c^+$. On a,

$$\chi_\infty(1+y) = \chi_0((1+y)_0) = \chi_0\Big(\lim_{r\to+\infty} N_{K_r/K_0}(1+y_r)\Big) = \lim_{r\to+\infty}\chi_r(1+y_r) = \lim_{r\to+\infty}\psi_r(a_r y_r).$$

Comme $N(a_{r+1}y_{r+1}) = a_r y_r$, $\psi_r(a_r y_r)$ est constant égal à $\psi_\infty(a_\infty y)$, cf. définition 5.2.4. Par la proposition 2.18, on a

$$\varepsilon([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_K}], \psi_\infty) = q_0^c \sum_{\overline{\beta}\in U(c)/U(c^+)} \frac{\psi_\infty(a_\infty\beta)}{\chi_\infty(a_\infty\beta)},$$

où $U(c)/U(c^+)$ désigne $U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c^+)$ et β est un relèvement de $\overline{\beta}$. En vertu du lemme 5.1.11(3), pour tout r assez grand, l'application $U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c^+) \to U_r(c)/U_r(c^+)$, $\overline{\beta} \mapsto \overline{\beta}_r$ est un isomorphisme et comme $\psi_\infty(a_\infty\beta)\chi_\infty(a_\infty\beta)^{-1} = \psi_r(a_r\beta_r)\chi_r(a_r\beta_r)^{-1}$, la proposition s'en suit. $\square$

On note C la C-représentation de Weil triviale de rang 1.

THÉORÈME 5.3.5. *Soient $V = (V,\rho) \in \mathrm{Rep}_C(W_K)$ et $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe s tel que pour tout $r \geqslant s$, on a*

$$\varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) = \varepsilon([V_\infty] - \dim V[C], \psi_\infty).$$

Démonstration. On peut supposer V irréductible. Par la proposition 2.3, C étant algébriquement clos, on a $\rho = \rho' \otimes \gamma$, où $\rho'\colon W_K \to \mathrm{GL}_C(V)$ est une représentation qui se factorise par un quotient fini et $\gamma\colon W_K \to C^*$ est un caractère non-ramifié. On pose $V' = (V,\rho')$. On se donne, pour tout $r \geqslant 0$, un Frobenius géométrique F_r^* de W_{K_r} et un Frobenius géométrique de W_{E_K}, qu'on note F_∞^*. En appliquant la proposition 2.19(2), on obtient

$$\varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) = \gamma_r(F_r^{*(\mathrm{ar}(\rho_r')+d(\psi_r)\dim V)})\varepsilon([V_r'] - \dim V[C], \psi_r).$$

Par § 5.3.1 la suite $(\mathrm{ar}(\rho_r'))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\rho_\infty')$. Par définition la suite $(d(\psi_r))_{r\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(\gamma(F_r^*))_{r\in\mathbb{N}}$) est stationnaire (respectivement constante) de limite égale à $d(\psi_\infty)$ (respectivement $\gamma_\infty(F_\infty^*)$). Donc, quitte à changer les notations, on peut supposer que $\rho\colon W_K \to \mathrm{GL}_C(V)$ se factorise par un quotient fini G. Par le théorème d'induction de Brauer

[Del73, proposition 1.5], on écrit

$$[V] - \dim V[C] = \sum_{H \leqslant G, V_H} n(V_H) \operatorname{Ind}_H^G([V_H] - [C]),$$

où H (respectivement V_H) varie parmi les sous-groupes de G (respectivement les C-représentations de H de rang 1) et les $n(V_H)$ sont des entiers. Par linéarité du facteur epsilon, on est ramené à démontrer le théorème pour les représentations virtuelles de la forme $\operatorname{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])$, où L est une extension finie de K et V est une C-représentation de Weil de L, de rang 1, qui se factorise par un quotient fini H de W_L. Comme on s'interesse à la restriction de $\operatorname{Ind}_{W_L}^{W_K}([V]-[C])$ à W_{K_r} pour r assez grand, quitte à remplacer K par une extension finie dans K_∞, on peut supposer $L \cap K_\infty = K$. On vérifie que

$$\operatorname{Res}_{W_K}^{W_{K_r}} \operatorname{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C]) = \operatorname{Ind}_{W_{L \cdot K_r}}^{W_{K_r}} \operatorname{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]),$$

en utilisant le cas particulier suivant du théorème de Mackey.

Lemme 5.3.6 [Isa94, Ch. 5, Problem (5.2)]. *Soient G un groupe fini , $H \leqslant G$ et V une C-représentation de H. Si $S \leqslant G$ tel que $HS = G$, alors $\operatorname{Res}_G^S \operatorname{Ind}_H^G V = \operatorname{Ind}_{S \cap H}^S \operatorname{Res}_H^{S \cap H} V$.*

D'où, par le théorème 2.14(2),

$$\begin{aligned}\varepsilon(\operatorname{Res}_{W_K}^{W_{K_r}} \operatorname{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C]), \psi_r) &= \varepsilon(\operatorname{Ind}_{W_{L \cdot K_r}}^{W_{K_r}} \operatorname{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]), \psi_r) \\ &= \varepsilon(\operatorname{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]), \psi_r \circ \operatorname{tr}_{L \cdot K_r / K_r}).\end{aligned}$$

On note $\chi\colon L^* \to C^*$ le quasi-caractère associé à V. Quitte à remplacer L et K par une extension finie contenue respectivement dans L_∞ et K_∞, on peut supposer L/K admissible (voir § 5.1.9), donc $L \cdot K_r = L_r$. Avec les notations de § 5.3.2, on a

$$\varepsilon(\operatorname{Res}_{W_L}^{W_{L_r}}([V] - [C]), \psi_r \circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}) = \varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r \circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}).$$

Par la définition 5.2.6 et la proposition 5.3.4, il existe $s \in \mathbb{N}$, tel que pour $r \geqslant s$, on a

$$\varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r \circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}) = \varepsilon([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_L}], \psi_\infty \circ \operatorname{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}).$$

On note $V(\chi_\infty)$ la C-représentation de Weil de E_L de rang 1, associée à χ_∞. Par le théorème 2.14, on a

$$\varepsilon([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_L}], \psi_\infty \circ \operatorname{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}) = \varepsilon(\operatorname{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}}([V(\chi_\infty)] - [C]), \psi_\infty),$$

et par § 5.3.1, $\operatorname{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}}([V(\chi_\infty)] - [C]) = (\operatorname{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C]))_\infty$, ce qui achève la preuve. □

5.3.7 Pour toute mesure de Haar ν_∞ sur E_K, on note ν_r l'unique mesure de Haar sur K_r telle que $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r}) = \nu_\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K})$.

Corollaire 5.3.8. *Soient (V, ρ, N) une C-représentation de Weil–Deligne de K, ν_∞ une mesure de Haar sur E_K et $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$ (voir proposition 5.2.5). Alors il existe un entier $s \geqslant 0$ tel que pour tout $r \geqslant s$, on a*

$$\begin{aligned}\varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon(V_\infty, \theta, \nu_\infty) \\ \varepsilon_0(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon_0(V_\infty, \theta, \nu_\infty).\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons d'abord $N = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) \varepsilon(C, \psi_r, \nu_r)^{\dim V} \\ &= \varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) \nu_r(\mathcal{O}_{K_r})^{\dim V} q_0^{d(\psi_r) \dim V}.\end{aligned}$$

Par construction, $d(\psi_r)$ se stabilise à $d(\theta)$ et $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r})$ est constant égal à $\nu_\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K})$. On conclut en appliquant le théorème 5.3.5. Pour le cas général, il suffit de remarquer que $\det(-\rho(F_n^*) \mid V^{I_{K_n}}/\mathrm{Ker}\, N^{I_{K_n}})$ se stabilise en $\det(-\rho(F_\infty^*) \mid V^{I_{\mathrm{E}_K}}/\mathrm{Ker}\, N^{I_{\mathrm{E}_K}})$, où F_n^* (respectivement F_∞^*) désigne un Frobenius géométriques quelconque de W_{K_n} (respectivement W_{E_K}). L'assertion pour ε_0 s'ensuit. □

5.4 Applications aux représentations de de Rham

5.4.1 Dans cette sous-section, on suppose que C contienne K^{sep}. On pose $K_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k)$ et on note $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$ son extension maximale non-ramifiée dans K^{sep} et B_{st} l'anneau des périodes des représentations semi-stables de G_K.

Soit V une représentation galoisienne p-adique, i.e. un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. On pose [Fon94a, § 5.6.4]

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{G' \leqslant G_K} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{st}})^{G'},$$

où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts de G_K. C'est un $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Il est muni d'une action $\tilde{\rho}\colon G_K \to \mathrm{Aut}_{K_{\mathrm{a}}}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V))$, semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de G_K sur $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$, d'une application σ-linéaire équivariante $\varphi\colon \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et d'un endomorphisme nilpotent équivariant N tels que $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$.

Suivant Fontaine et Perrin-Riou (cf. [Per95, appendice C, § 1.4] et [Fon94b, § 1.3.5]), on muni $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ d'une action linéaire ρ de W_K en posant

$$\forall w \in W_K, \quad \rho(w) = \tilde{\rho}(w)\varphi^{f\nu(w)}.$$

Le triplet $(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V), \rho, N)$ est une $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation de Weil–Deligne de K qu'on note abusivement $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

Soient $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeur dans C. On pose

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} C, \psi, \mu).$$

Ces définitions prennent tout leur intérêt dans le cas d'une représentation de de Rham V où on a $\dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Pour tout entier $r \geqslant 0$, on note V_r la restriction de V à G_{K_r}. Comme, $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_r) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|W_{K_r}}$, on obtient par le corollaire 5.3.8, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.4.2. *Soient V une représentation de de Rham de G_K, $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty$ la déformation au corps des normes (voir § 5.3.1) de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C))$. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, cf. proposition 5.2.5. Alors il existe un entier positif s, tel que pour tout $r \geqslant s$,*

$$\varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) = \varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty),$$
$$\varepsilon_0(V_r, \psi_r, \nu_r) = \varepsilon_0(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty).$$

COROLLAIRE 5.4.3. *Soient K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K, V une représentation de de Rham de G_K, $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ le (φ, ∇)-module de Berger associé à V (voir [Berg02, théorème 5.20]), $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C))$. Alors, on a (voir définition 3.4.4)*

$$\mathrm{WD}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \tag{5.4.3.1}$$
$$\varepsilon(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V), \theta, \nu_\infty) = \varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty) \tag{5.4.3.2}$$

et de même pour ε_0.

https://doi.org/10.1112/S0010437X07002990 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Dans [Mar04, p. 430], on a noté $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$ la représentation semi-linéaire de G_{E_K} obtenue à partir de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)}$ via l'isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty) \cong G_{\mathrm{E}_K}$. Par [Mar04, corollaire 5.9(i)], on a $S(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$ en tant que $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de E_K. En recopiant § 5.4.1, on peut considérer $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$ (respectivement $S(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$) comme une $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation de Weil–Deligne de E_K ; elle est alors égale à la déformation au corps des normes $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty$ de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ (respectivement à $\mathrm{WD}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$), d'où (5.4.3.1). On en déduit immédiatement (5.4.3.2). □

Remerciements

Cet article est issu d'une partie de ma thèse [Mar06, partie 2], effectuée au laboratoire LAGA de l'Université Paris 13. Je tiens ici à remercier mon directeur Ahmed Abbes, pour son encouragement, son soutien constant tout le long de ce travail et ses relectures critiques. Je remercie Takeshi Saito et Nobuo Tsuzuki pour plusieurs discussions mathématiques qui ont améliorés les résultats présentés ici. Je remercie également Olivier Brinon et Fabien Trihan pour plusieurs commentaires sur ce texte. Cet article a été mis au point lors d'un séjour à l'Université de Tokyo dans le cadre d'une bourse JSPS. Je remercie ces institutions ainsi que le professeur Takeshi Saito pour leur hospitalité.

References

And02 Y. André, *Filtrations de type Hasse–Arf et monodromie p-adique*, Invent. Math. **148** (2002), 285–317.

Berg02 L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.

Bert96 P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie (version provisoire 1991).* Preprint (1996), IRMAR 96-03, http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/.

Bou70 N. Bourbaki, *Algèbre*, in *Éléments de mathématique* (Hermann, Paris, 1970).

CM02 G. Christol and Z. Mebkhout, *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes*, Astérisque, vol. 279 (Société Mathématique de France, Paris, 2002), 125–183.

Cre87 R. Crew, *F-isocrystals and p-adic representations*, Proc. Sympos. Pure Math. **46** (1987), 111–138.

Cre92 R. Crew, *F-isocrystals and their monodromy groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), 429–464.

Cre98 R. Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), 717–763.

Cre92 R. Crew, *Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor*, Math. Ann. **316** (2000), 19–37.

Cre06 R. Crew, *Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on the unit disk*, with an appendix by S. Matsuda, Preprint (2006), available at http://www.math.ufl.edu/∼crew/papers.html.

Del73 P. Deligne, *Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L*, in *Modular fonctions of one variable* II, Lecture Notes in Mathematics, vol. 349 (Springer, Berlin, 1973), 501–597.

DH81 P. Deligne and G. Henniart, *Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L*, Invent. Math. **64** (1981), 89–118.

EGAIII J. Dieudonné and A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. Première partie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **11** (1961).

Ete04 J.-Y. Etesse, *Introduction to L-functions of F-isocrystals*, in *Geometric aspects of Dwork theory.* Volumes I and II (Walter de Gruyter, Berlin, 2004), 701–710.

ELS93 J.-Y. Etesse and B. Le Stum, *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergent I. Interprétation cohomologique*, Math. Ann. **296** (1993), 557–576.

Fon94a J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223 (Société Mathématique de France, Paris, 1994), 113–184.

Fon94b J.-M. Fontaine, *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, in *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223 (Société Mathématique de France, Paris, 1994), 321–347.

Har77 R. Hartshorne, *Algebraic geometry* (Springer, Berlin, 1977).

Kat72 N. Katz, *Travaux de Dwork*, Sem. Bourb. **409** (1972).

Kat88 N. Katz, *Gauss sums, Kloosterman sums and monodromy groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 116 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988).

Ked04 S. K. Kedlaya, *A p-adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), 93–184.

Isa94 I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups* (Dover, New York, 1994).

Lan70 R. P. Langlands, *On Artin's L-functions*, Rice Univ. Stud. **56** (1970), 23–28, available at http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/JL.html.

Lau87 G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **65** (1987), 131–210.

Mar04 A. Marmora, *Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques*, Documenta Math. **9** (2004), 413–433.

Mar06 A. Marmora, *Constantes locales p-adiques*, Thèse de doctorat (2006), Université Paris 13.

Mat02 S. Matsuda, *Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals*, Compositio Math. **134** (2002), 1–34.

Meb02 Z. Mebkhout, *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique*, Invent. Math. **148** (2002), 319–351.

Per95 B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque, vol. 229 (Société Mathématique de France, Paris, 1995).

Ser67 J.-P. Serre, *Représentations linéaires de groupes finis* (Hermann, Paris, 1967).

Ser68a J.-P. Serre, *Corps locaux*, second edition (Hermann, Paris, 1968).

Ser68b J.-P. Serre, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves* (W. A. Benjamin, New York, 1968).

SGA1 A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961 (SGA 1). With two papers by M. Raynaud. Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Mathematics, vol. 224 (Springer, Berlin, 1971)], Documents Mathématiques, vol. 3 (Société Mathématique de France, Paris, 2003).

Tat67 J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions*, in *Algebraic number theory*, ed. J. Cassels and A. Fröhlich (Academic Press, New York, 1967), 305–347.

Tsu98a N. Tsuzuki, *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

Tsu98b N. Tsuzuki, *The local index and Swan conductor*, Compositio Math. **111** (1998), 245–288.

Tsu98c N. Tsuzuki, *Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F-isocrystals*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), 379–412.

Win83 J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)**16** (1983), 59–89.

Adriano Marmora marmora@math.u-strasbg.fr

LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

Current address: Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France