SUR UNE INÉGALITÉ

par D. Ž. Djoković

(Received 1 November, 1961)

1. Dans cet article nous considérons l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq \frac{n}{2}, \tag{1.1}$$

où les x_i désignent les nombres réels qui remplissent les conditions suivantes

$$x_i \geqq 0, \quad x_i+x_{i+1} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ x_{i+n} \equiv x_i). \tag{1.2}$$

Cette inégalité est proposée par H. S. Shapiro [1].

Pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité (1.1) est triviale.

Pour $n = 3, 4, 5, 6$ plusieurs auteurs ont prouvé que l'inégalité (1.1) est vraie (voir, par exemple [2]).

L. J. Mordell [2] a énoncé l'hypothèse d'après laquelle l'inégalité (1.1) n'est pas vraie pour $n \geqq 7$.

M. J. Lighthill [4] et A. Zulauf [3] ont démontré que l'inégalité (1.1) n'est pas vraie pour $n = 2k$ $(k \geqq 7)$.

R. A. Rankin [4] a montré que l'inégalité (1.1) n'est pas vraie pour n suffisamment grand.

Plus tard, A. Zulauf [5] a montré que l'inégalité (1.1) n'est pas valable pour $n = 2k+1$ $(k \geqq 26)$.

Contrairement à l'hypothèse de Mordell nous allons prouver que l'inégalité (1.1) est vraie pour $n = 8$.

2. Posons

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.1}$$

D'après (1.2) les nombres a_i satisfont aux conditions suivantes

$$a_i \geqq 0, \quad a_i+a_{i+1} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ a_{n+i} \equiv a_i). \tag{2.2}$$

À partir de (2.1), on obtient

$$x_i - a_i x_{i+1} - a_i x_{i+2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.3}$$

Le système d'équations linéaires (2.3) étant homogène par rapport à x_i, et puisque d'après (1.2) tous les x_i ne sont pas nuls, il s'ensuit que:

A

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_1 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 \dots 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 \;\dots 1 & -a_{n-2} & -a_{n-2} \\ -a_{n-1} & 0 & 0 \;\dots 0 & 1 & -a_{n-1} \\ -a_n & -a_n & 0 \;\dots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

LEMME 1. *Étant donnés les nombres* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *qui satisfont aux* (2.2) *et* (2.4), *on peut trouver une solution* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *du système* (2.3) *qui satisfait aux conditions* (1.2).

Démonstration. De la condition (2.4), il suit que le système (2.3) a des solutions non-triviales. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une telle solution. À cause de la symétrie cyclique nous pouvons supposer que $x_1 \neq 0$. Mais, le système (2.3) étant homogène, nous supposerons aussi que $x_1 > 0$.

Les deux nombres consécutifs x_{i+1} et x_{i+2} $(i = 1, 2, \dots, n-2)$ ne peuvent pas être zéros. Dans le contraire, de la i-ième équation du système (2.3) il suit $x_i = 0$. Par une voie analogue, on conclut $x_i = x_{i-1} = \dots = x_2 = x_1 = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $x_1 > 0$.

Nous distinguerons deux cas.

Premier cas: $x_2 = 0$. De l'équation

$$x_1 - a_1 x_2 - a_1 x_3 = 0 \tag{2.5}$$

il suit $x_3 > 0$.

Deuxième cas: $x_2 \neq 0$. Nous allons démontrer que dans ce cas on a $x_2 > 0$.

Supposons que $x_2 < 0$. Alors de (2.5) on déduit

$$x_3 > 0 \quad \text{et} \quad |x_3| > |x_2|. \tag{2.6}$$

Puis de l'équation $x_2 - a_2 x_3 - a_2 x_4 = 0$, en utilisant les résultats (2.6), on trouve $x_4 < 0$ et $|x_4| > |x_3|$.

Continuant ce raisonnement, on conclut que la suite $|x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|, |x_1|, |x_2|$ est strictement croissante, ce qui est une absurdité, car les extrêmes éléments de cette suite sont égaux.

Ce procédé peut être continué à partir de x_3 dans le premier cas ou à partir de x_2, dans le deuxième cas. Donc, tous les nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont positifs ou nuls, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 1. *L'inégalité* (1.1) *est équivalente à*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \tfrac{1}{2}n, \tag{2.7}$$

où les $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sont les nombres réels qui satisfont aux* (2.2) *et* (2.4).

Démonstration. (*a*) Supposons que pour certain n, fixe, l'inégalité (1.1) soit vraie. Alors, nous allons démontrer que l'inégalité (2.7) est également vraie.

En effet, si l'inégalité (2.7) n'est pas vraie, il existe des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ qui satisfont aux (2.2) et (2.4), et pour lesquels on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \tfrac{1}{2}n. \tag{2.8}$$

Du Lemme 1 suit, qu'il existe des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont aux (1.2) et (2.3) et par conséquent aux relations (2.1). Pour ces nombres, d'après (2.8), on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} < \tfrac{1}{2}n, \tag{2.9}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons admise.

(*b*) Supposons maintenant que l'inégalité (1.1) ne soit pas vraie. Alors nous allons démontrer que l'inégalité (2.7) n'est pas vraie également.

En effet, de cette hypothèse suit l'existence des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont aux (1.2) et (2.9). Définissons les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par (2.1). Nous savons déjà que ces nombres remplissent les relations (2.2) et (2.4). D'après (2.9) et (2.1), la relation (2.8) est valable, c'est-à-dire l'inégalité (2.7) n'est pas vraie.

Le Théorème 1 est complètement établi.

Remarque 1. L'inégalité (2.7) n'est autre chose que la transformée de l'inégalité (1.. par la substitution (2.1). La correspondance $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est uniforme, mais non biunivoque.

Remarque 2. À cause de continuité, on peut dans (2.2) omettre les conditions $a_i + a_{i+1} > 0$. Ainsi, au lieu de (2.2) nous pourrons utiliser la relation

$$a_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.10}$$

3. Dans ce qui suit, nous aurons besoin de certaines propriétés de la matrice carrée

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de l'ordre n ($\geqq 3$).

Démontrons d'abord la relation

$$\det A = (-1)^n - 1. \tag{3.1}$$

En développant le déterminant $\det A$ suivant les éléments de la première colonne, nous obtenons

$$\det A = (-1)^{n+1} \det B - 1, \tag{3.2}$$

où B est la matrice carrée d'ordre $n-1$:

$$B \equiv \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

https://doi.org/10.1017/S2040618500034614 Published online by Cambridge University Press

En développant le déterminant det B suivant les éléments de la dernière ligne on obtient det $B=(-1)^{n-1}.(-1)^{n-2}=-1$. Par conséquent, de (3.2) suit (3.1).

Désignons par $M(i_1, i_2, \dots, i_k)$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n\,;\, k \leqq n-1)$ le mineur principal de la matrice A, qu'on obtient par élimination des lignes et des colonnes numérotés par $i_1, i_2, \dots, i_k$.

A étant une matrice circulaire, on aura

$$M(i_1, i_2, \dots, i_k) = M(1, i_2-i_1+1, i_3-i_1+1, \dots, i_k-i_1+1). \tag{3.3}$$

Donc, nous nous pouvons borner à considérer seulement les mineurs principaux de la forme $M(1, j_1, j_2, \dots, j_m)$ $(m \leqq n-2)$.

Lemme 2. *Soit* $1 \equiv j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_m < j_{m+1} \equiv n+1$ $(m \leqq n-2)$ *et*

$$\mu = \min_{0 \leqq \nu \leqq m} (j_{\nu+1} - j_\nu).$$

Avec ces notations on a

$$M(1, j_1, j_2, \dots, j_m) = \begin{cases} 0 & (\mu = 1), \\ -1 & (\mu > 1). \end{cases} \tag{3.4}$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas $\mu = 1$.

Puisque A est la matrice circulaire on peut supposer $j_1 = 2$.

Donc, la première assertion du lemme se réduit à

$$M(1, 2, j_2, j_3, \dots, j_m) = 0 \quad (m \leqq n-2). \tag{3.5}$$

La relation (3.5) est vraiment exacte, parce que quelques soient les $j_2, j_3, \dots, j_m$ tous les éléments de la dernière ligne du mineur $M(1, 2, j_2, j_3, \dots, j_m)$ seraient nuls.

La condition $\mu = 1$ est certainement vérifiée si $m > r \equiv [\frac{1}{2}n]-1$.

Considérons maintenant le cas $\mu > 1$.

En appliquant l'induction par rapport à m $(=1, 2, \dots, r)$, on démontre sans difficulté que le mineur (3.4) dans ce cas a la forme

$$M(1, j_1, j_2, \dots, j_m) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & p_1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & p_2 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & -1 & p_{n-m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{3.6}$$

où les nombres $p_1, p_2, \dots, p_{n-m-3}$ prennent les valeurs 0 ou -1 ce qui dépend des $j_1, j_2, \dots, j_m$.

En évaluant le déterminant figurant au second membre de (3.6), il vient

$$M(1, j_1, j_2, \dots, j_m) = (-1)^{n-m-1}.(-1)^{n-m-2} = -1.$$

La démonstration du Lemme 2 est terminée.

Désignons par $D_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le déterminant qui figure au premier membre de l'égalité (2.4).

https://doi.org/10.1017/S2040618500034614 Published online by Cambridge University Press

Si nous divisons ce déterminant par $a_1 a_2 \dots a_n$, en supposant que $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, nous obtenons le déterminant suivant

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv \begin{vmatrix} 1/a_1 & -1 & -1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & -1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1/a_{n-2} & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \dots & 0 & 1/a_{n-1} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 & 1/a_n \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Le coefficient de $1/a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ dans le développement du déterminant (3.7) est égal au mineur $M(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de la matrice A.

Or, nous avons

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det A + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum^{\binom{n}{k}} \frac{M(i_1, i_2, \dots, i_k)}{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}, \tag{3.8}$$

où la somme $\sum^{\binom{n}{k}}$ est étendue à toutes les combinaisons $i_1, i_2, \dots, i_k$ des $1, 2, \dots, n$, de la classe k.

Mettant à profit les résultats (3.1) et (3.4), de (3.8) on trouve

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-1)^n - 1 + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} - \sum_{k=1}^{[\frac{1}{2}n]} \sum_{\mu > 1} \frac{1}{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}.$$

La somme $\sum_{\mu > 1}$ est étendue à toutes les combinaisons $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, des $1, 2, \dots, n$, de la classe k, qui remplissent les conditions suivantes:

$$1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n < i_{k+1} \equiv n + i_1, \quad \mu \equiv \min_{1 \leqq \nu \leqq k} (i_{\nu+1} - i_\nu) > 1.$$

En multipliant le déterminant Δ_n par $a_1 a_2 \dots a_n$, il suit

$$D_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{(-1)^n - 1\} a_1 a_2 \dots a_n + 1 - \sum_{k=n-[\frac{1}{2}n]}^{n-1} \sum_{\sigma=2} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}. \tag{3.9}$$

La somme $\sum_{\sigma=2}$ est étendue à toutes les combinaisons $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, des $1, 2, \dots, n$, de la classe k, qui remplissent les conditions suivantes:

$$1 \leqq i_1 < i_2 \dots < i_k \leqq n < i_{k+1} \equiv n + i_1, \quad \sigma \equiv \max_{1 \leqq \nu \leqq k} (i_{\nu+1} - i_\nu) = 2.$$

L'égalité (3.9) est obtenue sous l'hypothèse $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, mais elle est également valable pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ arbitraires.

En utilisant le résultat (3.9), on peut donner à la condition (2.4) la forme suivante:

$$\{1 - (-1)^n\} a_1 a_2 \dots a_n + \sum_{k=n-[\frac{1}{2}n]}^{n-1} \sum_{\sigma=2} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} = 1. \tag{3.10}$$

https://doi.org/10.1017/S2040618500034614 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 2. *L'inégalité* (2.7) *est équivalente à celle*

$$\{1-(-1)^n\}a_1a_2 \dots a_n + \sum_{k=n-[\frac{1}{2}n]}^{n-1} \sum_{\sigma=2} a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_k} \leqq 1, \tag{3.11}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sont les nombres réels qui satisfont aux conditions*

$$a_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \tfrac{1}{2}n. \tag{3.12}$$

Démonstration. D'après la Remarque 2 nous admettons que les conditions de l'inégalité (2.7) sont (2.10) et (3.10).

(*a*) Supposons que l'inégalité (2.7) soit vraie. Alors, nous allons prouver que l'inégalité (3.11) est aussi vraie.

Désignons par $F_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le premier membre de (3.11).

Si l'inégalité (3.11) n'est pas vraie, il existe des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ qui satisfont à (3.12) et pour lesquels on a

$$F_n(a_1, a_2, \dots, a_n) > 1. \tag{3.13}$$

En diminuant les a_i, sans devenir négatifs, on peut obtenir

$$F_n(a_1', a_2', \dots, a_n') = 1, \tag{3.14}$$

car la fonction $F_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est croissante par rapport à toutes les variables.

La somme des nombres a_i diminue aussi. On aura, donc,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' < \tfrac{1}{2}n. \tag{3.15}$$

L'existence des nombres a_i', positifs ou nuls, qui satisfont aux (3.14) et (3.15) contredit à l'hypothèse que nous avons admise.

(*b*) Supposons maintenant que l'inégalité (2.7) ne soit pas vraie. Nous allons démontrer que l'inégalité (3.11) n'est pas vraie également.

En effet, de l'hypothèse il s'ensuit qu'il existe des nombres $a_1', a_2', \dots, a_n'$ qui sont positifs ou nuls et qui satisfont aux relations (3.14) et (3.15).

De l'équation (3.14) il s'ensuit l'existence de telles variables, parmi a_i, par rapport auxquelles la fonction $F_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est strictement croissante pour $a_i \geqq a_i'$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Si l'on fait croître tous les a_i', la fonction F_n croît aussi et les relations

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \tfrac{1}{2}n, \quad F_n(a_1, a_2, \dots, a_n) > 1$$

peuvent être remplies.

Donc, nous avons démontré que l'inégalité (3.11) n'est pas vraie.

La démonstration du Théorème 2 est avec ceci achevée.

Remarque 3. Dans (1.1) pour

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad > 0 \quad (n \text{ impair}),\\ &\left.\begin{aligned} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} &> 0\\ x_2 = x_4 = \dots = x_n \quad &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad (n \text{ pair}), \end{aligned}$$

a lieu le signe d'égalité.

https://doi.org/10.1017/S2040618500034614 Published online by Cambridge University Press

D'après la Remarque 1, il s'ensuit que pour

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = \dots = a_n \quad = \tfrac{1}{2} && (n \text{ impair}),\\ &\left.\begin{aligned} a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} &= p\\ a_2 = a_4 = \dots = a_n &= 1-p \end{aligned}\right\} && (n \text{ pair}), \end{aligned}$$

a lieu le signe d'égalité dans (2.7) et (3.11).

4. Dans ce qui suit, nous allons démontrer le

THÉORÈME 3. *L'inégalité* (3.11) *est vraie pour* $n = 8$.

Démonstration. Pour $n = 8$ l'inégalité (3.11) s'écrit

$$\sum_{k=4}^{7} \sum_{\sigma=2} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \leqq 1 \quad \left(a_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{8} a_i = 4\right).$$

En décomposant cette double somme en plusieurs sommes cycliques, on obtient

$$\sum a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 + \sum a_1a_2a_3a_4a_5a_7 + \sum a_1a_2a_3a_4a_6a_7 + \sum^{4} a_1a_2a_3a_5a_6a_7 + \sum a_1a_2a_3a_5a_7$$
$$+ \sum a_1a_2a_4a_6a_7 + a_1a_3a_5a_7 + a_2a_4a_6a_8 \leqq 1 \quad \left(a_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{8} a_i = 4\right), \tag{4.1}$$

où, par exemple, $\sum a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ désigne la somme cyclique suivante:

$$\sum_{i=1}^{8} a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} a_{i+5} a_{i+6} \quad (a_{8+i} \equiv a_i).$$

La somme $\sum^{4}$ contient seulement quatre termes différents. Chaque terme il faut prendre une fois seulement.

Désignons par $F_8(a_1, a_2, \dots, a_8)$ la fonction qui figure au premier membre de l'inégalité (4.1), définie dans la région fermée

$$E_8 = \{a_i \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 8), \quad \sum_{i=2}^{8} a_i = 4\}.$$

Il existe au moins un point $(b_1, b_2, \dots, b_8) \in E_8$ en lequel la fonction F_8 atteint sa borne supérieure M_8.

Nous démontrerons qu'on a

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7, \quad b_2 = b_4 = b_6 = b_8 \quad (= 1 - b_1), \tag{4.2}$$

et, en conséquence de la Remarque 3, $M_8 = 1$.

On est donc, amené à démontrer les relations (4.2).

Supposons que (4.2) ne soit pas vraie et posons

$$\begin{aligned} \delta &= \max(b_i - b_j) \quad (i, j = 1, 3, 5, 7),\\ \delta_1 &= \max(b_i - b_j) \quad (i, j = 2, 4, 6, 8). \end{aligned}$$

Grâce à la symétrie cyclique nous pouvons supposer également que

$$\delta \geqq \delta_1 \geqq 0, \quad \delta > 0, \quad b_1 = \max(b_1, b_3, b_5, b_7). \tag{4.3}$$

Trois cas sont possibles.

Premier cas: $b_3 = \min(b_3, b_5, b_7)$, $(\delta = b_1 - b_3)$.

Pour ε positif et suffisamment petit, nous avons

$$F_8(b_1-\varepsilon, b_2, b_3+\varepsilon, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8) = F_8(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8) + \alpha_3\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.4)$$

On trouve sans difficulté, que

$$\begin{aligned}\alpha_3 = {}& \delta(b_2b_4b_5b_6b_7 + b_2b_4b_5b_6b_8 + b_2b_4b_5b_7b_8 + b_2b_4b_6b_7b_8 + b_2b_5b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_7b_8)\\ &+\delta(b_2b_4b_5b_7 + b_2b_4b_6b_8 + b_2b_5b_7b_8 + b_5b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_7 + b_2b_4b_6b_7 + b_2b_5b_6b_8\\ &\quad + b_4b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_8 + b_2b_5b_6b_7 + b_4b_5b_7b_8) + b_2b_5b_6b_7b_8 - b_2b_4b_5b_6b_7\\ &+\delta(b_2b_5b_7 + b_5b_6b_7 + b_4b_5b_7 + b_5b_7b_8 + b_4b_6b_8 + b_5b_6b_8 + b_4b_6b_7) + b_2b_5b_6b_8\\ &\quad + b_2b_5b_7b_8 - b_2b_4b_5b_7 - b_2b_4b_6b_7 + \delta b_5b_7. \end{aligned} \quad (4.5)$$

D'après (4.3) nous avons

$$\begin{aligned}&b_2b_5b_6b_7(\delta+b_8-b_4) \geqq 0, \quad b_2b_5b_7(\delta+b_8-b_4) \geqq 0,\\ &\delta(b_5b_6b_8 + b_4b_6b_8 + b_4b_6b_7) + b_2b_5b_6b_8 - b_2b_4b_6b_7\\ &\qquad = b_5b_6b_8(\delta+b_2-b_4) + b_4b_6b_8(\delta+b_5-b_7) + b_4b_6b_7(\delta+b_8-b_2) \geqq 0.\end{aligned}$$

De la relation (4.5) il suit

$$\begin{aligned}\alpha_3 \geqq {}& \delta(b_2b_4b_5b_6b_7 + b_2b_4b_5b_6b_8 + b_2b_4b_5b_7b_8 + b_2b_4b_6b_7b_8 + b_2b_5b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_7b_8)\\ &+\delta(b_2b_4b_5b_7 + b_2b_4b_6b_8 + b_2b_5b_7b_8 + b_5b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_7 + b_2b_4b_6b_7 + b_2b_5b_6b_8\\ &\quad + b_4b_6b_7b_8 + b_4b_5b_6b_8 + b_4b_5b_7b_8) + \delta b_5b_7(b_4+b_6+b_8)) + \delta b_5b_7 \geqq 0.\end{aligned} \quad (4.6)$$

Par conséquent, α_3 est positif ou nul.

Supposons que $\alpha_3 = 0$. Alors, de (4.6) on obtient

$$b_5b_7 = 0, \quad b_2b_4b_6b_8 = 0. \quad (4.7)$$

Étant donné que $b_3 = \min(b_3, b_5, b_7)$, on a aussi

$$b_3 = 0. \quad (4.8)$$

En utilisant (4.7) et (4.8), on trouve

$$F_8(b_1, b_2, \dots, b_8) = b_1b_2b_4b_6b_7 = M_8. \quad (4.9)$$

Donc $b_7 > 0$, et d'après (4.7) $b_5 = 0$. Sinon, dans le cas $b_7 = 0$, on a $M_8 = 0$, ce qui est impossible.

Mettant à profit les résultats énoncés, la relation (4.6) donne $0 = \alpha_3 \geqq \delta b_4b_6b_7(b_2+b_8) \geqq 0$, ce qui entraine, de nouveau, $M_8 = 0$.

Or, α_3 est positif.

Mais, c'est impossible d'après (4.4), parce que nous avons supposé que la fonction F_8 en $(b_1, b_2, \dots, b_8)$ atteint sa borne supérieure.

Deuxième cas: $b_5 = \min(b_3, b_5, b_7)$, $(\delta = b_1 - b_5)$.

Pour ε positif et suffisamment petit, on a

$$F_8(b_1-\varepsilon, b_2, b_3, b_4, b_5+\varepsilon, b_6, b_7, b_8) = F_8(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8) + \alpha_5\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.10)$$

Le coefficient α_5 est donné par

$$\begin{aligned}\alpha_5 = {} & \delta(b_2b_3b_4b_6b_7+b_2b_3b_4b_6b_8+b_2b_3b_4b_7b_8+b_2b_3b_6b_7b_8+b_2b_4b_6b_7b_8+b_3b_4b_6b_7b_8)\\ & +\delta(b_2b_3b_4b_7+b_3b_6b_7b_8+b_2b_3b_7b_8+b_3b_4b_6b_7+b_2b_3b_6b_8+b_2b_4b_7b_8+b_2b_4b_6b_7+b_3b_4b_6b_8\\ & +b_2b_3b_6b_7+b_2b_4b_6b_8+b_3b_4b_7b_8)+b_2b_3b_6b_7b_8+b_2b_3b_4b_7b_8-b_3b_4b_6b_7b_8-b_2b_3b_4b_6b_7\\ & +\delta(b_2b_3b_7+b_3b_6b_7+b_3b_4b_7+b_3b_7b_8+b_2b_4b_7+b_3b_6b_8)+b_2b_3b_7b_8+b_2b_4b_7b_8\\ & +b_2b_3b_6b_8-b_2b_4b_6b_7-b_3b_4b_6b_7-b_3b_4b_6b_8+\delta b_3b_7. \end{aligned} \tag{4.11}$$

D'après (4.3) on obtient

$$\begin{aligned} & b_3b_6b_7b_8(\delta+b_2-b_4) \geqq 0, \quad b_2b_3b_4b_7(\delta+b_8-b_6) \geqq 0, \quad b_2b_4b_7(\delta+b_8-b_6) \geqq 0,\\ & b_3b_6b_8(\delta+b_2-b_4) \geqq 0, \quad \delta(b_2b_3b_7+b_3b_6b_7)+b_2b_3b_7b_8-b_3b_4b_6b_7\\ & \qquad = b_2b_3b_7(\delta+b_8-b_6)+b_3b_6b_7(\delta+b_2-b_4) \geqq 0,\end{aligned}$$

et puis, de (4.11) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\alpha_5 \geqq {} & \delta(b_2b_3b_4b_6b_7+b_2b_3b_4b_6b_8+b_2b_3b_4b_7b_8+b_2b_3b_6b_7b_8+b_2b_4b_6b_7b_8+b_3b_4b_6b_7b_8)\\ & +\delta(b_2b_3b_7b_8+b_3b_4b_6b_7+b_2b_3b_6b_8+b_2b_4b_7b_8+b_2b_4b_6b_7+b_3b_4b_6b_8+b_2b_3b_6b_7\\ & +b_2b_4b_6b_8+b_3b_4b_7b_8)+\delta b_3(b_4b_7+b_7b_8+b_6b_8)+\delta b_3b_7 \geqq 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Par conséquent α_5 est positif ou nul.

Soit $\alpha_5 = 0$. L'inégalité (4.12) donne alors:

$$b_3b_7 = 0, \quad b_2b_4b_6b_8 = 0, \quad b_5 = 0. \tag{4.13}$$

À partir de (4.13) on obtient

$$F_8(b_1, b_2, \ldots, b_8) = b_1b_2b_4b_6b_7 = M_8. \tag{4.14}$$

De (4.14) on conclut que $b_7 > 0$, et d'après (4.14) $b_3 = 0$. La relation (4.12) donne $0 = \alpha_5 \geqq \delta b_2b_4b_7(b_6+b_8) \geqq 0$ et, en vertue de (4.14), $M_8 = 0$.

Or, α_5 est positif. La relation (4.10) conduit à une nouvelle contradiction.

Donc, ce cas est également impossible.

Troisième cas: $b_7 = \min(b_3, b_5, b_7)$, $(\delta = b_1 - b_7)$.

Ce cas se ramène au premier, car le coefficient correspondant α_7 se déduit du coefficient α_3 par le déplacement cyclique des indices: $1 \to 7$, $2 \to 8$, $3 \to 1$, $4 \to 2$, $5 \to 3$, $6 \to 4$, $7 \to 5$, $8 \to 6$ et l'échange des signes des termes ne contenant pas δ.

Ces modifications sont sans influence sur le raisonnement que nous avons exposé dans le premier cas.

Donc, par la méthode "reductio ad absurdum", nous avons démontré les relations (4.2), et par conséquent le Théorème 3.

5. D'une manière analogue, nous avons prouvé également l'inégalité (3.11) pour $n = 3, 4, 5, 6$.

Nous avons essayé d'appliquer cette méthode pour $n = 7, 10, 12$ mais les difficultés de nouvelle nature nous ont empêchés d'obtenir les résultats désirés.

Nous sommes d'avis que l'inégalité (3.11) peut être utilisée comme point de départ pour des recherches nouvelles.

Par exemple, l'inégalité (3.11) peut être utilisée pour la détermination de la borne inférieure de la somme $R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui figure au premier membre de l'inégalité (1.1).

À savoir, l'inégalité

$$R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \lambda n, \tag{5.1}$$

est équivalente à

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq 1 \quad \left(a_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \lambda n\right).$$

R. A. Rankin [6] a démontré que l'inégalité (5.1) est vraie pour $\lambda = 0{\cdot}33$ et n arbitraire.

RÉFÉRENCES

1. H. S. Shapiro, Problem 4603, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 571.
2. L. J. Mordell, On the inequality $\sum_{r=1}^{n} x_r/(x_{r+1}+x_{r+2}) \geqq \frac{1}{2}n$ and some others, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **22** (1958), 229–240.
3. A. Zulauf, Note on a conjecture of L. J. Mordell, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **22** (1958), 240–241.
4. R. A. Rankin, An inequality, *Math. Gaz.* **42** (1958), 39–40.
5. A. Zulauf, On a conjecture of L. J. Mordell, II, *Math. Gaz.* **43** (1959), 182–184.
6. R. A. Rankin, A cyclic inequality, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **12** (1961), 139–147.

Faculté d'Électrotechnique

Beograd

Yugoslavia