Canad. Math. Bull. Vol. **33** (3), 1990

SUR LA NON COMPATIBILITÉ DE L'EQUIVALENCE DE CALKIN AVEC LE CALCUL FONCTIONNEL DE NAGY-FOIAS

PAR

J. ESTERLE ET F. ZAROUF

RESUMÉ. Nous montrons qu'il existe deux contractions T_1 et T_2 de classe C_0 telles que $T_1 - T_2$ soit compact et une fonction intérieure h telle que $h(T_1) - h(T_2)$ soit non compact.

1. **Rappels et notations.** Rappelons que $L^2 = L^2(\mathbf{T})$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbf{T}$, $H^2 = H^2$ $(\mathbf{T})$ l'espace de Hilbert des fonctions f de L^2 dont les coefficients de Fourier

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(e^{it})dt$$

sont nuls pour $k < 0$ et $H^\infty(T) = H^\infty(\mathbf{D})$ l'algèbre de Banach des fonctions analytiques et bornées dans le disque unité $\mathbf{D}$. Si T est une contraction absolument continue [1, p. 33], on définit $h(T)$ pour $h \in H^\infty$ $(= H^\infty(T))$ par le calcul fonctionnel de Nagy-Foias [1, p. 34].

Etant données deux contractions absolument continues A et B telles que $A - B$ soit compact, il est évident que pour tout polynôme p, la différence $p(A) - p(B)$ est compacte et donc $h(A) - h(B)$ est compact pour toute fonction h analytique sur $\mathbf{D}$ et continue sur $\bar{D}$. L'objet de cet article est de montrer que $h(A) - h(B)$ peut ne pas être compact pour certains $h \in H^\infty$ même si $AB = BA$. En fait les auteurs ne connaissent pas de caractérisation simple des couples (T_1, T_2) de contractions absolument continues de rayon spectral 1 tels que $h(T_1) - h(T_2)$ soit compact pour tout $h \in H^\infty$.

2. **Exemple.** Soit φ la fonction (intérieure) définie par $\varphi(z) = e^{(z+1)/(z-1)}$, $m = (\varphi H^2)^\perp$ l'orthogonal de φH^2 dans H^2, P_m la projection orthogonale de H^2 sur m et pour $h \in H^\infty$, M_h l'opérateur de multiplication par h sur H^2. Désignons enfin par T_1(resp. T_2) la restriction de la compression de M_α(resp. M_β) à m où $\alpha : z \longrightarrow z$ et $\beta = (\alpha+1)/2$. On a donc $T_1 = P_m M_\alpha|_m$, $T_2 = P_m M_\alpha|_m$ et $T_1 - T_2 = P_m M_{(\alpha-1)/2}|_m = 1/2(T_1 - I)$ où I est l'identité.

Une contraction absolument continue T est dite de classe C_0 s'il existe une fonction $h \in H^\infty$, non nulle, telle que $h(T) = 0$. Si en plus, pour tout $u \in H^\infty$, non nulle,

Reçu par la rédaction le 16 septembre 1988.

AMS (1980) classification. 47A60, 46K10.

telle que $u(T) = 0$ alors u est multiple de h dans H^∞, on dit que h est la fonction minimale de T. Comme $\varphi^{1/2} \circ \beta = e^{1/2}\varphi$, on déduit de [3, chap. III, théoréme 2.1.e) et proposition 4.3]

LEMME. (1°) *Pour tout $h \in H^\infty$, on a :*

$$h(T_1) = P_m M_h|_m \text{ et } h(T_2) = P_m M_{h_0\beta}|_m$$

(2°) *T_1 et T_2 sont de classe C_0 et de fonctions minimales φ et $\varphi^{1/2}$ respectivement.*

THÉORÉME. (1°) *L'opérateur $T_1 - T_2$ est compact.*

(2°) *Il existe une fonction intérieure h telle que $h(T_1) - h(T_2)$ soit non compact.*

PREUVE. Posons $\tilde{T}_1 = P_m M_\alpha$ et $\tilde{T}_2 = P_m M_\alpha$. On a $\tilde{T}_1|_m = T_1$, $\tilde{T}_2|_m = T_2$ et $\tilde{T}_1^n = P_m M_{\alpha^n}$, $\tilde{T}_2^n = P_m M_{\beta^n}$ pour $n \geqq 1$. Comme $M_\alpha(m)^\perp \subset m^\perp$, on a $\tilde{T}_1|_{m}^{\perp} = 0$. Comme φ ne s'annule pas sur $\mathbf{D}$ et n'admet que 1 comme point singulier sur le cercle unité, il résulte de [3, chap. III, théorème 5.1] que le spectre $\sigma(T_1)$ de T_1 est égal à $\{1\}$. On a donc $\sigma(\tilde{T}_1) = \sigma(\tilde{T}_1\,|_{m}^{\perp}) \cup \sigma(T_1) = \{0\} \cup \{1\}$. Il résulte de [2, théorème 1] que $\lim_{p\to+\infty} \|\tilde{T}_1^p - \tilde{T}_1^{p+1}\| = 0$. Montrons que $T_1 - T_2$ est compact. Soit $(f_n)_{n>0}$ une suite faiblement convergente vers 0 dans H^2. Soit K une constante positive telle que $\|f_n\| \leqq K$, $\forall n \geqq 0$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe p tel que $\|\tilde{T}_1^{p+1} - \tilde{T}_1^{p+2}\| < \epsilon/K$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire f_n sous la forme:

$$f_n = \sum_{k=0}^{p} a_{n,k}\alpha^k + \alpha^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} a_{n,k}\alpha^{k-(p+1)}$$

En posant $x_{n,p} = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_{n,k}\alpha^{k-(p+1)}$, on obtient:

$$(I - M_\alpha)f_n = \sum_{k=0}^{p} a_{n,k}\alpha^k - \sum_{k=0}^{p} a_{n,k}\alpha^{k+1} + (M_{\alpha^{p+1}} - M_{\alpha^{p+2}})x_{n,p}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|(P_m - P_m M_\alpha)f_n\| &= \|P_m\left(\sum_{k=0}^{p} q_{n,k}\alpha^k - \sum_{k=0}^{p} a_{n,k}\alpha^{k+1}\right) + (\tilde{T}_1^{p+1} - \tilde{T}_1^{p+2})x_{n,k}\| \\ &\leqq \left(\sum_{k=0}^{p} |a_{n,k}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{p} |a_{n,k}|^2\right)^{1/2} + \|\tilde{T}_1^{p+1} - \tilde{T}_1^{p+2}\|\,\|x_{n,p}\| \\ &\leqq \left(\sum_{k=0}^{p} |a_{n,k}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{p} |a_{n,k}|^2\right)^{1/2} + \epsilon\end{aligned}$$

Puisque $(f_n)_{n>0}$ converge faiblement vers 0, on a $\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$ et donc $\|(P_m - \tilde{T}_1)f_n\| \longrightarrow 0$ ce qui prouve que $T_1 - T_2 = (T_1 - I)/2 = (\tilde{T}_1 - P_m)/2|m$ est compact.

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-042-0 Published online by Cambridge University Press

Soit $h = \varphi^{1/2}$. D'aprés le lemme, on a $h(T_2) = 0$ et $h(T_1) = P_m M_h|m$ est non compact car c'est une isométrie partielle de support $(hH^2)^\perp$. En effet, si $f \in (hH^2)^\perp$, alors $f \in (h^2.H^2)^\perp$ et $hf \in (h^2.H^2)^\perp = (\varphi H^2)^\perp$ donc:

$$\|P_m M_h f\|^2 = (P_m M_h f,\ P_m M_h f) = (h.h, h.f) = \|f\|^2$$

Si $f \in h.H^2$, on a $P_m M_h(hg) = P_m(\varphi g) = 0$ pour tout $g \in H^2$. Ceci achéve la démonstration du théoréme. □

References

1. H. Bercovice, C. Foias and C. Pearcy, *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, C.B.M.S. Regional Conference Series in Math., N°. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

2. Y. Katznelson and L. Tzafriri, *On power bounded operators*, J. Funct. Anal. **68** (1986), 313–328.

3. B. Sz-Nagy et C. Foias, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et C^{ie}, Paris, Akadémiai Kiado, Budapest, 1967.

U.E.R. de Mathématiques
Université de Bordeaux I
33405 Talence, France