Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1991) **34**, 383–391 ©

SIMILARITÉ ENTRE L'ALGÈBRE DE VOLTERRA ET UN QUOTIENT D'ALGÈBRE UNIFORME

par KONIN KOUA

(Received 3rd October 1989)

Two commutative Banach algebras A and B are said to be similar if there exists a Banach algebra D such that $[xD]^- = D$ for some x in D, and two one-to-one continuous homomorphisms $\phi: D \to A$ and $\psi: D \to B$ such that $\phi(D)$ is a dense ideal of A and $\psi(D)$ a dense ideal of B.

We prove in this paper that the Volterra algebra $L^1_*(0,1)$ is similar to $A_0/e^{-z}A_0$ where A_0 is the commutative uniform, separable Banach algebra of all continuous functions on the closed right-hand half plane $\bar{H}$, analytic on H and vanishing at infinity. We deduce from this result that multiplication by an element of $A_0/e^{-z}A_0$ is a compact mapping.

1980 *Mathematics subject classification* (1985 Revision): 46J10.

1. Introduction

Soient A et B deux algèbres de Banach commutatives. On dit que A et B sont *similaires* ([**4**, p. 116]) s'il existe une algèbre de Banach commutative D qui possède un idéal principal aD dense et deux homomorphismes injectifs continus ϕ de D dans A et ψ de D dans B tels que $\phi(D)$ soit un idéal dense dans A et $\psi(D)$ soit un idéal dense dans B.

On remarque que cette définition implique que $\phi(a)A$ est dense dans A et $\psi(a)B$ est dense dans B.

Si A et B sont similaires et si θ est un homorphisme continu de A dans B, on dira que θ est un *s-homomorphisme* ([**4**, p. 123]) si le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & B \\ A \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $L^1(\mathbf{R}^+)$ l'algèbre de Banach des (classes de) fonctions à valeurs complexes, Lebesgue intégrables sur $\mathbf{R}^+$ et soit $\mathscr{I}$ l'idéal fermé de $L^1(\mathbf{R}^+)$ formé des fonctions nulles presque partout sur $[0,1]$. L'algèbre quotient $L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$ est isomorphe à l'algèbre

https://doi.org/10.1017/S0013091500005162 Published online by Cambridge University Press

de Volterra $V = L^1_*(0,1)$ des (classes de) fonctions à valeurs complexes absolument intégrables sur $[0,1]$ (Remarque 2.2). On peut donc identifier V à $L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$.

On se propose ici de montrer que V est similaire à A_0/I, où A_0 est l'algèbre uniforme de toutes les fonctions continues sur le demi-plan droit fermé, analytiques dans le demi-plan droit ouvert et tendant vers zéro à l'infini et où I est l'idéal fermé de A_0 de la forme $e^{-z}A_0$.

La notion de similarité entre deux algèbres de Banach commutatives a été introduite par J. Esterle dans son étude du problème de l'existence d'une algèbre de Banach commutative topologiquement simple [**4**]. Le fait que deux algèbres de Banach commutatives à unité approchée bornée soient similaires implique d'une part l'existence d'une bijection entre l'ensemble de leurs idéaux fermés et implique d'autre part que les algèbres de leurs quasimultiplicateurs réguliers sont isomorphes ([**4**, p. 73 et p. 112]).

L''idée que les algèbres $L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$ et A_0/I pouvaient être similaires nous a été suggérée par le travail de E. Strouse sur les idéaux fermés de l'algèbre de Volterra en plusieurs variables [**8**].

Notre résultat de similarité permet de retrouver en une variable le résultat de [**8**]; mais ceci n'apporte rien de nouveau car la structure des idéaux fermés de l'algèbre de Volterra est banale et bien connue (voir per exemple [2, Théorème 7–9]). Par contre, ce résultat permet de ramener l'étude des quasimultiplicateurs réguliers de V à ceux de A_0/I, ce qui permet d'espérer obtenir ultérieurement une caractérisation concrète des quasimultiplicateurs de V. Ce point ne sera pas développé dans le présent article.

Pour finir, nous établissons le fait que si deux algèbres de Banach sont similaires et si la multiplication par tout élément est compacte dans l'une, il en est de même de la multiplication par tout élément dans l'autre (Proposition 4.1). On en déduit que la multiplication dans A_0/I est compacte.

Je remercie E. Strouse de m'avoir communiqué son manuscrit et je remercie également Jean Esterle pour ses fructueux conseils pendant la réalisation de ce travail.

2. Préliminaires

Soit H le demi-plan droit ouvert $H = \{z \in \mathbf{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$. Soit A_0 l'algèbre de toutes les fonctions f continues sur $\bar{H}$, analytiques dans H et vérifiant

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \geqq 0 \\ |z| \to +\infty}} |f(z)| = 0.$$

Pour chaque f de A_0, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} z \geqq 0} |f(z)|$. D'après le principe de Phragmén–Lindelöf ([**1**, p. 3]) on a $\|f\|_\infty = \sup_{y \in \mathbf{R}} |f(iy)|$; $f \in A_0$. Munie de cette norme, A_0 est une algèbre de Banach commutative, uniforme et séparable.

Proposition 2.1. *L'élément β de A_0, défini par*

$$\beta(z) = \frac{1}{(1+z)^2},$$

vérifie $[\beta A_0]^- = A_0$.

Preuve. Soit

$$\tau : z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

la transformation conforme du demi-plan droit H sur le disque unité $D = \{z \in \mathbf{C} / |z| < 1\}$, soit $A(D)$ l'algèbre du disque et soit

$$M_1 = \{f \in A(D) | f(1) = 0\}.$$

Soit μ l'application:

$$z \mapsto \frac{1-z}{2}.$$

L'application $\rho : f \mapsto f \circ \tau$ est un isomorphisme isométrique de M_1 sur A_0. On a $\beta = (\rho(\mu))^2$. Comme $[\mu M_1]^- = M_1$, puisque les polynômes en μ sans terme constant sont denses dans M_1, on a $[\rho(\mu) A_0]^- = A_0$, et donc $[\beta A_0]^- = A_0$.

Soint maintenant la fonction $F : z \mapsto e^{-z}$; $\operatorname{Re} z > 0$. Alors la multiplication par F est un multiplicateur sur A_0 et $\|Fg\|_\infty = \|g\|_\infty$ pour tout élément g de A_0.

Donc l'idéal I de la forme $F A_0$, noté $e^{-z} A_0$, est un idéal propre fermé de A_0. Un caractère χ de A_0 est de la forme $\chi(f) = f(t)$; $t \in \bar{H}$. Puisque $F(t) \neq 0$ pour tout $t \in \bar{H}$, aucun caractère sur A_0 ne s'annule sur I. Donc l'algèbre quotient A_0/I est une algèbre de Banach radicale ([7, p. 87]).

Soit $L^1(\mathbf{R}^+)$ l'espace des fonctions f définies sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs complexes et Lebesgue intégrables. Muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|\, dt$ et du produit de convolution (défini presque partout):

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s)\, ds, \quad f, g \in L^1(\mathbf{R}^+),$$

$L^1(\mathbf{R}^+)$ est une algèbre de Banach commutative, semi-simple sans unité ([6, p. 94]).

L'ensemble $\widehat{L^1(\mathbf{R}^+)}$ de tous les caractères sur $L^1(\mathbf{R}^+)$ peut être identifié à $\bar{H}$ par l'application: $\lambda \mapsto \phi_\lambda$ de $\bar{H}$ dans $\widehat{L^1(\mathbf{R}^+)}$ où ϕ_λ est l'application:

$$f \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\lambda t}\, dt = \mathscr{L}(f)(\lambda); \; f \in L^1(\mathbf{R}^+).$$

La transformée de Gelfand est donc précisément la transformée de Laplace $\mathscr{L}$:

$f \mapsto \mathscr{L}(f)$. Il est bien connu que $\mathscr{L}$ est un homomorphisme injectif continu de $L^1(\mathbf{R}^+)$ dans (et non sur) A_0.

Soit $\mathscr{I}$ l'ideal fermé de $L^1(\mathbf{R}^+)$ formé des fonctions nulles presque partout sur $[0,1]$. On note $V = L^1_*(0,1)$ l'algèbre de Volterra, c'est-à-dire l'algèbre de Banach des fonctions f à valeurs complexes, absolument intégrables sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ et du produit de convolution (défini presque partout):

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds; \; 0 \leqq t \leqq 1.$$

Remarque 2.2. *V est isomorphe à $L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$.*

Preuve. Soit $R: f \mapsto f_{\restriction [0,1]}$ l'application restriction de $L^1(\mathbf{R}^+)$ dans V. C'est un homomorphisme surjectif. Puisque $\ker R = \mathscr{I}$, on a que $L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$ est isomorphe à V.

Soit $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ l'espace de Banach des fonctions f à valeurs complexes essentiellement bornées sur $\mathbf{R}^+$, muni de la norme:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \geqq 0} |f(t)|.$$

On peut définir la transformée de Laplace sur $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ par la formule:

$$\mathscr{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\,dt.$$

Dans ce cas, $\mathscr{L}(f)$ est seulement définie pour $\operatorname{Re} z > 0$, et elle n'est pas en général bornée sur H.

On prolonge implicitement à $\mathbf{R}$ les fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^+$ en les supposant nulles sur le complémentaire de leur domaine. On peut considérer V comme un sous-espace de $L^1(\mathbf{R}^+)$.

Désormais on notera $V_1 = L^1(\mathbf{R}^+)/\mathscr{I}$, $W = A_0/I, \theta: A_0 \mapsto W$ et $\pi: L^1(\mathbf{R}^+) \mapsto V_1$ les surjections canoniques. V_1 est identifiable à V (Remarque 2.2); l'application

$$R: f \mapsto f_{\restriction [0,1]}$$

donne une extension de π à $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ que nous noterons également π.

Remarque 2.3. *$\mathscr{L}$ étant la transformée de Laplace qui applique $L^1(\mathbf{R}^+)$ dans A_0, on a*

$$\ker \theta \circ \mathscr{L} = \mathscr{I}.$$

Preuve. Ceci résulte de ce que $\mathscr{I} = \mathscr{L}^{-1}(I)$, c'est-à-dire $f \in \mathscr{I}$ si et seulement si $\mathscr{L}(f) \in I$ ([2, preuve du théorème 7-4]).

Remarque 2.4. *Il existe un homomorphisme injectif continu de V_1 dans W noté $\tilde{\mathscr{L}}$ et tel que $\theta \circ \mathscr{L} = \tilde{\mathscr{L}} \circ \pi$.*

Preuve. Ceci résulte de la Remarque 2.3 et de la factorisation canonique des applications.

Lemma 2.5. **([8, Lemme 4-4]).** *Si $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ est telle que $\mathscr{L}(f) \in A_0$ et si $f(t)=0$ pour presque tout $t \in [0,1]$, alors $\mathscr{L}(f) \in I$.*

Proposition 2.6. *Si $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ et si $\mathscr{L}(f) \in A_0$, alors $(\tilde{\mathscr{L}} \circ \pi)(f) = (\theta \circ \mathscr{L})(f)$.*

Preuve. Soit $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$. Posons $f_1 = \pi(f)$ et $f_2 = f - f_1$. Alors $f_1 \in L^1(\mathbf{R}^+)$ et $\mathscr{L}(f_1) \in A_0$. On en déduit que $\mathscr{L}(f_2) \in A_0$ car $\mathscr{L}(f) \in A_0$. f_2 vérifie donc les hypothèses du Lemme 2.5; donc $\mathscr{L}(f_2) \in I$, Il s'ensuit que $(\theta \circ \mathscr{L})(f_2) = 0$. Donc

$$(\theta \circ \mathscr{L})(f) = (\theta \circ \mathscr{L})(f_1) = (\tilde{\mathscr{L}} \circ \pi)(f_1) = (\tilde{\mathscr{L}}(\pi(f_1)) = (\tilde{\mathscr{L}} \circ \pi)(f).$$

3. Similarité entre V et W

On pose $\gamma = \theta(\beta)$ où β est l'élément de A_0 défini à la Proposition 2.1. On considère l'ensemble $\mathscr{D} = \gamma W$.

Remarque 3.1. *$\mathscr{D}$ est dense dans W.*

En effet pour tout $y \in W$, il existe $x \in A_0$ tel que $y = \theta(x)$, donc il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A_0 telle que $y = \theta(\lim_n \beta x_n)$ d'après la Proposition 2.1.
En posant $d_n = \gamma\theta(x_n)$ pour chaque n, on a $y = \lim_n d_n$, d'où le résultat.

Remarque 3.2. *γ n'est pas un diviseur de zéro dans W.*

En effet si $\gamma \cdot u = 0$, alors $u = 0$, car $[\gamma W]^- = W$ d'après la Remarque 3.1 et W a une unité approchée bornée ([7, p. 87]).

Remarque 3.3. *L'application q définie pour $d = \gamma u$ par $q(d) = \|u\|_W$ est une norme d'algebre sur $\mathscr{D}$.*

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité du produit.

Pour $d = \gamma u$ et $d' = \gamma u'$ on a

$$q(dd') = q(\gamma^2 uu') = \|\gamma uu'\| \leqq \|\gamma\| \, \|u\| \, \|u'\| \leqq \|u\| \, \|u'\|$$

car $\|\gamma\| \leqq 1$; donc $q(dd') \leqq q(d)q(d')$; $d, d' \in \mathscr{D}$.

Proposition 3.4. *Muni de l'addition et de la multiplication définies sur W et de la norme q, $\mathscr{D}$ est une algèvre de Banach et l'élément γ^2 de $\mathscr{D}$ vérifie $[\gamma^2\mathscr{D}]^- = \mathscr{D}$.*

Preuve. L'application: $d \mapsto (d/\gamma)$ est une isométrie de $\mathscr{D}$ sur W; on en déduit que $\mathscr{D}$ est une algèbre de Banach. On a $[\gamma^2 W]^- = W$ car $[\gamma W]^- = W$ (Remarque 3.1).

Soit $d = \gamma u$ un élément de $\mathscr{D}$. Il existe une suite $(u_n)_{n \geqq 1}$ d'éléments de W telle que $\|u - \gamma^2 u_n\|_W \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or $\|u - \gamma^2 u_n\|_W = q(\gamma u - \gamma^3 u_n) = q(\gamma u - \gamma^2(\gamma u_n))$. Donc en posant $d_n = \gamma u_n$ pour chaque n, on obtient une suite $(d_n)_{n \geqq 1}$ de $\mathscr{D}$ telle que $q(d - \gamma^2 d_n) \to 0$ quand $n \mapsto +\infty$. Donc l'élément γ^2 de $\mathscr{D}$ vérifie $[\gamma^2 \mathscr{D}]^- = \mathscr{D}$.

Si g est un élément de A_0 intégrable sur l'axe imaginaire, alors on peut définir $\mathscr{L}^{-1}(g)(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$ par la formule:

$$\mathscr{L}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(iy)\, e^{iyt}\, dy.$$

Le lemme suivant est standard:

Lemme 3.5. (i) *Si $f \in A_0$, alors $\|\mathscr{L}^{-1}(\beta f)\|_\infty \leqq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, avec $\|\mathscr{L}^{-1}(\beta f)\|_\infty =$ $\sup_{t \geqq 0} |\mathscr{L}^{-1}(\beta f)(t)|$.* (ii) *Si $f \in I$, alors $\mathscr{L}^{-1}(\beta f) = 0$ sur* $[0, 1]$.

Preuve. (i) Est évident. (ii) Si $f \in I$, alors il existe $h \in A_0$ telle que $f(z) = e^{-z} h(z)$.

$$\mathscr{L}^{-1}(\beta f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta f)(iy)\, e^{iyt}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta h)(iy)\, e^{iy(t-1)}\, dy = \mathscr{L}^{-1}(\beta h)(t-1).$$

Or pour tout $l \in A_0$, $\mathscr{L}^{-1}(\beta l)(t)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}$ et est nul pour tout t négatif.

Donc $\mathscr{L}^{-1}(\beta f)(t) = \mathscr{L}^{-1}(\beta h)(t-1) = 0$ si $t \leqq 1$. D'où l'on déduit que $\mathscr{L}^{-1}(\beta f)$ s'annule sur $[0, 1]$.

Soit l'application ϕ de $\mathscr{D}$ dans V_1 définie pour tout élément $d = \gamma u$ de $\mathscr{D}$ par la formule $\phi(d) = \pi(\mathscr{L}^{-1}(\beta f))$ où $f \in A_0$ est tel que $u = \theta(f)$ c'est-à-dire $\beta f \in \theta^{-1}(d)$.

ϕ est bien définie car l'écriture $d = \gamma u$ avec $u \in W$ est unique pour $d \in \mathscr{D}$ et si $\theta(f) = \theta(g) = u$ avec f et g dans A_0, on a $f - g \in I$. Il s'ensuit que $\mathscr{L}^{-1}(\beta(f - g)) = 0$ sur $[0, 1]$ d'après le Lemme 3.5 (ii). Donc $\pi(\mathscr{L}^{-1}(\beta f)) = \pi(\mathscr{L}^{-1}(\beta g))$.

Proposition 3.6. *ϕ est un homomorphisme injectif continu, et $(\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi)(f) = f$; $(f \in \mathscr{D})$.*

Preuve. Il est évident que ϕ est un homomorphisme.

Soit $a = \theta(\beta f)$; $f \in A_0$, un élément de $\mathscr{D}$. On a $(\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi)(a) = \tilde{\mathscr{L}}((\pi \circ \mathscr{L}^{-1})(\beta f))$. Mais $\mathscr{L}^{-1}(\beta f) \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ et $\mathscr{L}(\mathscr{L}^{-1}(\beta f)) = \beta f \in A_0$. Il résulte alors de la Proposition 2.6 que $(\tilde{\mathscr{L}} \circ \pi)(\mathscr{L}^{-1}(\beta f)) = (\theta \circ \mathscr{L})\ (\mathscr{L}^{-1}(\beta f)) = \theta(\beta f) = a$. Autrement dit $\mathscr{L} \circ \phi = Id_{\mathscr{D}}$ et nous en déduisons en particulier que ϕ est injectif.

Montrons que ϕ est continu: soit $(d_n = \gamma u_n)_{n \geqq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}$ telle que $q(d_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a $\phi(d_n) = \pi(\mathscr{L}^{-1}(\beta f_n))$ où l'on choisit la suite $(f_n)_{n \geqq 1}$ de A_0

telle que $\|f_n\|_\infty \leqq \|u_n\|_W + (1/n)$ pour tout n. On a $\|\mathscr{L}^{-1}(\beta f_n)\|_\infty \leqq \frac{1}{2}\|f_n\|_\infty$ (Lemme 3.5(i)). Donc

$$\|\phi(d_n)\| = \|\pi(\mathscr{L}^{-1}(\beta f_n))\| \leqq \|\mathscr{L}^{-1}(\beta f_n)\|_\infty \leqq \tfrac{1}{2}\|f_n\|_\infty \leqq \tfrac{1}{2}(\|u_n\|_W + 1/n).$$

Donc $\phi(d_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et ϕ est continu.

Lemme 3.7. *Soit α l'élément de $L^1(\mathbf{R}^+)$ défini par $\alpha(x) = xe^{-x}$. Alors $\pi(\alpha) \cdot V_1$ est contenu dans $\phi(\mathscr{D})$.*

Preuve. Pour tout élément f de V_1, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f) &= \tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha)) \cdot \tilde{\mathscr{L}}(f)\\ &= (\theta \circ \mathscr{L})(\alpha) \cdot \tilde{\mathscr{L}}(f)\\ &= \theta(\beta) \cdot \tilde{\mathscr{L}}(f) \quad \text{car } \beta = \mathscr{L}(\alpha)\\ &= \gamma \cdot \tilde{\mathscr{L}}(f).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f)$ est dans $\mathscr{D}$ et comme $\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi = Id_{\mathscr{D}}$ on a $\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f) = (\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi)(\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f)) = \tilde{\mathscr{L}}(\phi(\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f)))$. Donc $\pi(\alpha) * f = \phi(\tilde{\mathscr{L}}(\pi(\alpha) * f))$ puisque $\tilde{\mathscr{L}}$ est injectif. Ainsi $\pi(\alpha) * f \in \phi(\mathscr{D})$ pour tout f de V_1, d'où l'inclusion $\pi(\alpha) \cdot V_1 \subset \phi(\mathscr{D})$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de cet article:

Théorème 3.8. *L'algèbre de Volterra $V = L^1_*(0,1)$ est similaire à l'algèbre de Banach commutative, radicale à unité approchée bornée $A_0/I = W$, et l'application $\tilde{\mathscr{L}}$ de V dans W est un s-homomorphisme.*

Preuve. Grâce au fait que $\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi = Id_{\mathscr{D}}$ et grâce aux Remarques 2.2 et 3.1 et aux Propositions 3.4 et 3.6, il suffit de montrer que $\phi(\mathscr{D})$ est un idéal dense de V_1 pour établir le théorème.

Soient donc $f \in \phi(\mathscr{D})$, $g \in V_1$ et soit d l'élément de $\mathscr{D}$ tel que $f = \phi(d)$. Posons $d' = \tilde{\mathscr{L}}(g)$. Alors $dd' \in \mathscr{D}$ puisque $\mathscr{D}$ est un idéal de W. Comme $\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi = Id_{\mathscr{D}}$, on a:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{L}}(\phi(dd')) = dd' = ((\tilde{\mathscr{L}} \circ \phi)(d)) \cdot d'\\ &= \tilde{\mathscr{L}}(\phi(d)) \cdot \tilde{\mathscr{L}}(g)\\ &= \tilde{\mathscr{L}}(\phi(d) * g).\end{aligned}$$

L'injectivité de $\tilde{\mathscr{L}}$ entraîne qui $\phi(dd') = \phi(d) * g = f * g$, ce qui implique que $f * g \in \phi(\mathscr{D})$ pour tout f dans $\phi(\mathscr{D})$ et tout g dans V_1. Donc $\phi(\mathscr{D})$ est bien un idéal de V_1. α étant l'application définie au Lemme 3.7, on sait que $[\alpha * L^1(\mathbf{R}^+)]^- = L^1(\mathbf{R}^+)$ (voir par exemple [3, p. 47]). Donc $\pi(\alpha) V_1$ est dense dans V_1 et par suite $\phi(\mathscr{D})$ est dense puisque $\pi(\alpha) V_1$ est contenu dans $\phi(\mathscr{D})$ d'après le Lemme 3.7, ce qui achève la démonstration.

4. Similarité et compacité de la multiplication par un element

Proposition 4.1. *Soient A et B deux algèbres de Banach commutatives similaires. Si la multiplication par tout élément de A est compacte, alors la multiplication par tout élément de B l'est aussi.*

Preuve. A et B étant similaires, il existe une algèbre de Banach commutative D qui possede un idéal principal aD dense et deux homomorphismes injectifs continus ϕ de D dans A et ψ de D dans B tels que $\phi(D)$ est un idéal dense de A et $\psi(D)$ est un idéal dense de B.

Soit $(d_n)_{n \geqq 1}$ une suite bornée d'éléments de D. La suite $(\phi(d_n))_{n \geqq 1}$ est alors bornée dans A. Il existe donc une suite extraite $(\phi(d_{n_i}))_{i \geqq 1}$ telle que $(\phi(ad_{n_i}))_{i \geqq 1}$ converge dans A puisque la multiplication est compacte dans A.

Il existe une constant $k > 0$ telle que $\|\phi^{-1}(\phi(d)a')\|_D \leqq k \|d\|_D \|a'\|_A$ pour tout d dans D et tout a' dans A ([4, Lemme 7-1]). En particulier $\|d_1 d_2\|_D \leqq k \|d_1\|_D \|\phi(d_2)\|_A$; d_1 et d_2 appartenant à D. Donc pour tout élément d de D, on a:

$$\|d\, ad_{n_i} - dad_{n_j}\|_D \leqq k \|d\|_D \|\phi(ad_{n_i}) - \phi(ad_{n_j})\|_A.$$

On en déduit que $(add_{n_i})_{i \geqq 1}$ converge dans D. Donc la multiplication par d est compacte pour tout $d \in aD$ et par conséquent pour tout $d \in D$.

Soit maintenant $(b_n)_{n \geqq 1}$ une suite bornée d'éléments de B. Alors la suite $(\psi^{-1}(\psi(a)b_n))_{n \geqq 1}$ est bornée dans D car il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\|\psi^{-1}(\psi(d)b)\|_D \leqq C \|d\|_D \|b\|_B \text{ pour } d \in D, b \in B.$$

Donc pour tout d de D, il existe une sous-suite $(b_{n_i})_{i \geqq 1}$ telle que la suite $(d . \psi^{-1}(\psi(a)b_{n_i}))_{i \geqq 1}$ cnverge dans D. On en déduit que:

$$(\psi(d) . \psi(a) b_{n_i})_{i \geqq 1} = (\psi(ad) \cdot b_{n_i})_{i \geqq 1}$$

converge dans B. Ainsi la multiplication par $\psi(da)$ est compacte dans B pour tout d de D. Comme $\psi(aD)$ est dense dans B, la multiplication par tout élément de B est compacte, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.2. *La multiplication par tout élément de A_0/I est compacte.*

Preuve. Il est bien connu que la multiplication dans l'algèbre de Volterra V est compacte et V et A_0/I sont similaires (Théorème 3.8).

Remarque 4.3. *L'image L de I par l'isomorphisme entre A_0 et M_i introduit à la Proposition 2.1 est un idéal de l'algèbre du disque $A(D)$ tel que*

$$Z(L)=\{z\in\bar{\mathscr{D}}/f(z)=0;\ f\in L\}$$

soit réduit à $\{1\}$. *Le Corollaire 4.2 est donc un cas particulier de* [**5**, *Corollaire 2.14*].

RÉFÉRENCES

1. R. Boas, Entire functions, *Pure and Appl. Math.* **5** (Academic Press Inc., New York, 1954).

2. H. G. Dales, Automatic continuity: a survey, *Bull. London Math. Soc.* **10** (1978), 129–183.

3. J. Esterle, *Elements for a classification of commutative radical Banach algebras*, (Lecture Notes in Math. **975**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983), 4–65.

4. J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞ and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*, (Lecture Notes in Math. **975**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983), 66–162.

5. J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, Theorems of Katznelson–Tzafrini type, *J. Funct. Anal.* **94** (1990), 273–287.

6. I. M. Gelfand, D. A. Raikov et G. E. Chilov, *Les anneaux normés commutatifs* (Monographies internatioanles de mathématiques modernes, Gauthier Villars, Paris, 1964).

7. A. M. Sinclair, *Continuous semi-groups in Banach algebras* (London Math. Soc. Lec. Notes **63,** 1982).

8. E. Strouse, Closed ideals in convolutions algebras and the Laplace transform, *Michigan Math. J.* **35** (1988), 185–196.

Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux 1
351 Cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France