BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 46B10, 46B20
VOL. 39 (1989) [321–328]

SUR LES CONES (FAIBLEMENT COMPLETS) CONTENUS DANS LE DUAL D'UN ESPACE DE BANACH NON-REFLEXIF

RICHARD BECKER

Let B be a Banach space. Consider the convex proper weakly complete cones X contained in B' with $\sigma(B',B)$ such that $X \cap B'$, is conic in the sense of Asimow: that is, there exists $\alpha \geqslant 0$ and $f \in B''$ such that $\| \|_B \leqslant f \leqslant \alpha \cdot \| \|_B$ on X. This class arises in the theory of integral representations.

If B is reflexive, such a cone has a weakly-compact basis. This paper considers the converse problem:- if one requires that $X \cap B'_1$ be $\sigma(B',B)$ metrisable, the existence of X (without a compact $\sigma(B',B)$ basis) is equivalent to the statement that B is not a Grothendieck space.

However, in every space $C(K)$ with infinitely compact K, one can find such a cone X. If two such cones in B' are not too far apart, their sum belongs to this class.

PRELIMINAIRES

Rappelons quelques notions ([**6**, Section 30, 38, 40]): $\mathcal{S}$ désigne la classe des cônes convexes saillants faiblement complets. Si X est un cône convexe, contenu dans un e.l.c.s. E, de dual E', on désigne par $M^+(X, E')$ le cône des formes $\geqslant 0$ sur le treillis $h(X, E')$ de fonctions sur X engendré par $E' |_X$ (cône des mesures coniques $\geqslant 0$ sur X). On désigne par $\mathcal{L}$ la sous-classe des cônes X de $\mathcal{S}$ qui ne portent que des mesures côniques localisables (c'est à dire représentables) par des mesures de Radon sur $(X \setminus 0)$.

Voici également quelques rappels concernant les convexes coniques: Soit Γ une partie convexe d'un espace vectoriel E, contenant l'origine; on dit que Γ est conique s'il existe $\alpha > 0$ et une $f \in E^*$ tels que

$$j \leqslant f \leqslant \alpha j \text{ sur } \Gamma, \text{ où } j \text{ désigne la jauge de } \Gamma.$$

Cette notion est due à Asimow ([**1**, Section 2, definition]); l'idée de base est que cette condition équivaut à demander que j soit minorée par un nombre > 0 sur conv $\{j^{-1}(1)\}$.

Dans ([**2**, Théorèmes 7 et 9]; [**3**, Théorèmes 1 et 3]) j'avais démontré les deux résultats suivants:

Received 16 June 1988

Copyright Clearance Centre, Inc. Serial-fee code: 0004-9729/89 \$A2.00+0.00.

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

THEOREME 1. *Soit X un cône contenu dans le dual d'un espace de Banach B, et appartenant à $\mathcal{S}$ pour $\sigma(B', B)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) $X \in \mathcal{L}$ *(pour la dualité avec B);*

(2) $X \cap B_1'$ *est conique.*

THEOREME 2. *Soit X un cône contenu dans un espace de Banach B, et appartenant à $\mathcal{S}$ pour $\sigma(B, B')$. Si $X \in \mathcal{L}$, alors X possède une base faiblement compacte.*

Dans ce travail nous allons examiner si ces deux théorèmes permettent de distinguer les espaces de Banach réflexifs des autres: En effet, si B est réflexif, il résulte immédiatement de ces deux théorèmes que, si $X \subseteq B'$ est dans $\mathcal{S}$, alors il est dans $\mathcal{L}$ si, et seulement si, il est à base faiblement compact.

Pour les espaces de Banach séparables on a:

THEOREME 3. *Soit B un espace de Banach séparable et non réflexif; alors B' contient un cône $X \in \mathcal{S}$ sans base $\sigma(B', B)$ compacte tel que $X \cap B_1'$ est conique.*

PREUVE: D'après un théorème du à James et à Klee ([**7**, p.7]) il existe une suite (f_n) de B_1' qui tend vers 0 pour $\sigma(B', B)$ et $L \in B''$ telles que $L(f_n) \geqslant \theta$ pour tout n où θ est un nombre > 0.

On voit que l'ensemble $K = \{\sum_1^\infty u_n.f_n \mid u_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_1^\infty u_n \leqslant 1\}$ est une partie $\sigma(B', B)$ compacte de B_1', puisque $f_n \to 0$ pour $\sigma(B', B)$.

On prendra $X = \mathbb{R}^+.K$.

Montrons que $X_1 = X \cap B_1'$ est conique. Soit $\varphi = \sum_1^\infty u_n.f_n$ avec $u_n \geqslant 0$ et $\sum_1^\infty u_n < \infty$. Aors on a $\|\varphi\| \leqslant \sum_1^\infty u_n$ puisque $f_n \in B_1'$ pour tóut n. On a aussi $L(\varphi) = \sum_1^\infty u_n.L(f_n) \geqslant \left(\sum_1^\infty u_n\right)\theta$. on a donc $L(\varphi) \geqslant \theta\|\varphi\|$; comme on a toujours $L(\varphi) \leqslant \|L\| \cdot \|\varphi\|$, on a

$$\|\varphi\| \leqslant \tilde{L}(\varphi) \leqslant \left\|\tilde{L}\right\| \cdot \|\varphi\| \text{ avec } \tilde{L} = L/\theta;$$

donc X_1 est α-conique pour $\alpha = \left\|\tilde{L}\right\|$.

Le cône X ne peut pas avoir de base $\sigma(B', B)$ compacte; sinon il serait localement compact; comme $X = Un.X_1$, on aurait par le théorème de Baire: $\operatorname{int}(X_1) \neq \emptyset$; d'où $0 \in \operatorname{int}(X_1)$ (si $f_0 \in \operatorname{int}(X_1)$ considérer $f_0 + X$); il existerait alors d'après [**6**, Section 30.13, proof]) un $x_0 \in B$ tel que $f_n(x_o) \geqslant 1$, pour tout n, puisque on a $\|f_n\| \geqslant \rho$ pour un certain $\rho > 0$, pour tout n, car $L(f_n) \geqslant \theta$, pour tout n.

Or $f_n(x_0) \geqslant 1$ contredit le fait que $f_n \to 0$ pour $\sigma(B', B)$.

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

Montrons maintenant que $X \in \mathcal{S}$:

Notons d'abord que K absorbe $X_1 = X \cap B'_1$; en effet, soit $\varphi \in X$ avec $\varphi = \sum_1^\infty u_n.f_n \left(u_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_1^\infty u_n < \infty \right)$ on a

$$\|\varphi\| . \|L\| \geqslant L(\varphi) = \sum_1^\infty u_n.L(f_n) \geqslant \theta . \sum_1^\infty u_n$$

d'où le fait que $X_1 \subseteq \|L\| / \theta.K$. ∎

Il suffit alors, pour conclure, d'appliquer le résultat suivant:

LEMME 4. *Soit B un espace de Banach et $X \subseteq B'$ un cône convexe; si $X \cap B'_1$ est $\sigma(B', B)$ compact et conique, alors $X \in \mathcal{S}$.*

PREUVE: D'après un théorème classique X est $\sigma(B', B)$ fermé puisque $X \cap B'_1$ est $\sigma(B', B)$ compact. D'après ([**4**, Proposition 5]), pour montrer que $X \in \mathcal{S}$, il suffit de montrer que tout élément de B est différence de deux éléments (de B) $\geqslant 0$ sur X : D'après un théorème classique ([**12**, Section 35, Théorème]) il suffit pour cela de montrer que la réunion des intervalles $[0, f]$ où $f \in B'_1$, pour l'ordre induit par X, est une partie bornée de B'.

Comme $X \cap B'_1$ est conique il existe $L \in B''$ et $\alpha > 0$ telle que

$$\|\varphi\| \leqslant L(\varphi) \leqslant \alpha . \|\varphi\| \text{ pour } \varphi \in X \text{ ([}\mathbf{2}\text{, p.6])} \tag{1}$$

soit $f \in B'_1$ et $g \in B'$ avec $0 \leqslant g \leqslant f$; on a $g \in X$ et $f - g \in X$; on a donc $L(f) \geqslant L(g)$, d'où $L(g) \leqslant \|L\|$ puisque $\|f\| \leqslant 1$, d'où d'après (1); $\|g\| \leqslant L(g) \leqslant \|L\|$.

D'où le résultat. ∎

Le Théorème 3 peut être énoncé d'une façon plus générale: rappelons qu'un espace de Banach B est de Grothendieck lorsque toute suite (f_n) de B' qui converge vers 0 pour $\sigma(B', B)$ converge aussi vers 0 pour $\sigma(B', B'')$.

Definition 5. Soit $\mathcal{A}$ la classe des espaces de Banach B dans le dual desquels existe un cône convexe $X \in \mathcal{S}$, sans base $\sigma(B', B)$ compacte, tel que $X \cap B'_1$ soit conique.

Soit $\mathcal{A}_m$ la sous-classe de $\mathcal{A}$ pour laquelle on exige de plus que $X \cap B'_1$ soit métrisable pour $\sigma(B', B)$.

THEOREME 6. *Soit B un espace de Banach; les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *B n'est pas de Grothendieck;*
(2) $B \in \mathcal{A}_m$.

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

PREUVE: (1) $\Rightarrow$ (2) si B n'est pas de Grothendieck, il existe $(f_m) \in B'$ et $L \in B''$ avec $f_n \to 0$ pour $\sigma(B', B)$ et $L(f_n) \geqslant \theta$ pour tout n où $\theta > 0$. Reprenons les notations de la preuve du Théorème 3: on peut appliquer la construction du Théorème 3; il reste à voir que $X \cap B'_1$ est métrisable pour $\sigma(B', B)$; comme K absorbe $X \cap B'_1$ (voit preuve du Lemme 4) il suffit de montrer que K est métrisable pour $\sigma(B', B)$; or K est image continue du compact métrisable $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \mid u_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_1^\infty u_n \leqslant 1\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $X \subseteq B'$ un cône convexe de $\mathcal{S}$, sans base $\sigma(B', B)$ compacte, tel que $X \cap B'_1$ soit conique; d'après ([**2**, p.6]), il existe $L \in B''$ et $\alpha > 0$ telle que (2) $\|\varphi\| \leqslant L(\varphi) \leqslant \alpha . \|\varphi\|$ pour $\varphi \in X$.

Soit $Y = \{\varphi \mid \varphi \in X \text{ et } \|\varphi\| = 1\}$; on a $0 \in \overline{Y}$ pour $\sigma(B', B)$, sinon d'après ([**6**, Section 30.13, proof]), le cône X aurait une base $\sigma(B', B)$ compacte. Il existe donc une suite (f_n) de Y qui tend vers 0 pour $\sigma(B', B)$; cette suite vérifie d'après (2) $L(f_n) \geqslant \|f_n\| = 1$ pour tout n; donc B n'est pas de Grothendieck. ∎

Dans le cas où B est séparable on peut préciser le Théorème 3 ainsi:

PROPOSITION 7. *Soit B un espace de Banach séparable non réflexif et $L \in B'' \setminus B$; il existe un cône $X \in \mathcal{S}$, situé dans B', et $m, M > 0$ tels que*

$$m\,\|\varphi\| \leqslant L(\varphi) \leqslant M\,\|\varphi\| \text{ pour toute } \varphi \in X.$$

PREUVE: D'après un théorème classique, comme $L \in B'' \setminus B$ l'ensemble $\mathrm{Ker}(L) \cap B'_1$ ne peut pas être $\sigma(B', B)$ compact; comme B'_1 est métrisable, il existe donc une suite (f_n) de B'_1 et $f_0 \in B'_1$ vérifiant:

$$L(f_n) = 0 \text{ pour tout } n;$$
$$L(f_0) > 0;$$
$$f_n \to f_0 \text{ pour } \sigma(B', B).$$

On peut donc effectuer la même construction qu'au Théorème 3, à partir de $(f_0 - f_n)$; le cône X obtenu répond à la question. ∎

PROPOSITION 8. *Soit B un espace de Banach ayant un quotient appartenant à $\mathcal{A}$; alors B lui-même appartient à $\mathcal{A}$.*

PREUVE: Soit s une surjection de B sur un espace de Banach $E \in \mathcal{A}$; soit $X \subseteq E'$ un cône comme dans la Définition 5; la transposée s' de s permet d'identifier E' à un sous-espace de B' de sorte que $m\,\|\varphi\| \leqslant \|s'(\varphi)\| \leqslant M\,\|\varphi\|$, pour toute $\varphi \in E'$ avec $m, M > 0$; cela prouve que $s'(X)$ satisfait aux conditions de la Définition 5. ∎

La proposition suivante utilise un résultat d'Asimow, concernant la faible complétude des cône à chapeau universel (question de G. Ghoquet) ([**8**, 2.3]).

Pour les M-espaces on renvoit à ([**11**]).

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

Proposition 9. *Tout M-espace de dimension infinie est dans $\mathcal{A}$. Tout prédual de L-espace, soit B, est dans $\mathcal{A}$ dès que B ne contient pas d'unité d'ordre. (ℓ^∞ est donc dans $\mathcal{A}$).*

Preuve:

(a) Cas des M-espaces

Soit B un M-espace et $U = (B'_1)^+$.

(α) Si l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $U \cap \{f : \|f\| = 1\}$ admet 0 pour point adhérent, alors le cône $(B')^+ \in \mathcal{S}$, admet un chapeau universel au sens de G. Choquet (c'est-àdire U est 1-conique) et répond à la question, puisqu'il est sans base $\sigma(B', B)$ compacte.

(β) Si l'ensemble $\mathcal{E}$ n'admet pas 0 pour point adhérent alors B admet un élément x_0 qui domine tous les autres á un facteur près (non fixé) d'après ([**6**, Section 30.13, Proof]).

On peut appliquer alors les constructions de ([**8**, 2.3]) à partir de $V = (B')^+ \cap \{x_0^{-1}(1)\}$ qui est un simplexe de Bauer, car $\mathcal{E}(V)$ qui est compact ne peut être formé de points isolés.

(b) cas des préduaux de L-espace.

On raisonne comme ci-dessus; on est dans le cas α) puisque B n'a pas d'unité d'ordre: Le cône $(B')^+$ est à chapeau universel, sans base $\sigma(B', B)$ compacte.

Lorsque l'espace B, non réflexif, est cependant de Grothendieck, on peut raisonner ainsi:

B n'est pas séparable, mais il existe un sous-espace fermé E de B, séparable et non réflexif; soit s la surjection canonique de B' sur E': il existe une suite (f_n) de E' et $L \in E'' \setminus E$ tels que $f_n \to 0$ pour $\sigma(E', E)$ et $L(f_n) \geqslant 1$ pour tout n.

Soit alors (g_n) une suite bornée de B' telle que $s(g_n) = f_n$ pour tout n.

D'après le théorème de Rosenthal ([**10**, p.99]) il existe une sous-suite de (g_n) (encore notée (g_n)) telle que l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes soit vérifiée

(α) (g_n) est de Cauchy pour $\sigma(B', B'')$;

(β) (g_n) est équivalente à la base canonique de $\ell^1(N)$.

Le cas α) est exclu puisque B est de Grothendieck (on aurait (g_n) converge pour $\sigma(B', B'')$ mais en considérant $L \circ s$ on a une contradiction). Donc (g_n) est équivalente à la base canonique de $\ell^1(N)$. D'après un résultat de Hagler et Johnson ([**9**, Corollary 1]) alors B admet c_0 pour quotient ou contient $\ell^1(N)$. Comme B est de Grothendieck le premier cas est exclu, donc B contient $\ell^1(N)$.

On a donc $\ell^1(N) \subseteq B$ et $\ell^1(N) \subseteq B'$. ∎

La discussion précédente permet d'énoncer la proposition suivante:

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 10. *Soit B un espace de Banach; on suppose qu'il existe n tel que $B^{(n)} \notin \mathcal{A}$. Alors cet n est unique; s'il est $\geqslant 1$ alors $B^{(n-1)}$ admet c_0 pour quotient.*

PREUVE: Soit n le plus petit possible tel que $B^{(n)} \notin \mathcal{A}$; d'après la discussion précédente on a $\ell^1(N) \subseteq B^{(n)}$ et $\ell^1(N) \subseteq B^{(n+1)}$; il en résulte que $B^{(n+1)}$ admet $\ell^\infty(N)$ comme quotient donc est dans $\mathcal{A}$ d'après les Propositions 8 et 9 et $B^{(n+2)}$ va contenir un L-espace.

De même $B^{(n+2)}$ admet $\ell^\infty(N)$ comme quotient et est donc dans $\mathcal{A}$, puisque $\ell^1(N) \subset B^{(n+1)}$, et $B^{(n+3)}$ contient un L-espace.

Le raisonnement se poursuivant indéfiniment le résultat est obtenu.

Cas où $n \geqslant 1$:

Comme $B^{(n)}$ contient $\ell^1(N)$, d'après un résultat de Hagler et Johnson ([**9**, Corollary 1]) c_0 est quotient de $B^{(n-1)}$ ou $B^{(n-1)}$ contient ℓ^1; ce dernier cas est exclu, puisqu'alors on aurait ℓ^∞ quotient de $B^{(n)}$ et donc $B^{(n)} \in \mathcal{A}$. D'où le résultat. ∎

Remarques 11.

(a) Les seuls exemples de membres de $\mathcal{A}$ que nous connaissions sont ceux indiqués dans la Proposition 9.

(b) Dans la Proposition 10 nous n'avons pas d'exemple d'espace de Banach B, pour chaque n, vérifiant $B^{(n)} \notin \mathcal{A}$.

(c) Dans la Proposition 10 les seules propriétés de la classe $\mathcal{A}$ utilisées sont

- (1) tout espace qui n'est pas de Grothendieck est dans $\mathcal{A}$;
- (2) tout M-espace est dans $\mathcal{A}$;
- (3) si B admet un quotient appartenant à $\mathcal{A}$, alors B lui-même appartient à $\mathcal{A}$.

(d) Tout espace $C(T)$, même de Grothendieck, est dans $\mathcal{A}$, puisque c'est un M-espace.

Pour terminer nous allons indiquer une propriété de stabilité par somme de certains cônes contenus dans le dual d'un espace de Banach:

THEOREME 12. *Soit B un espace de Banach et X, Y deux cônes de $\mathcal{S}$ contenus dans B' muni de $\sigma(B', B)$ tels que $X \cap B'_1$ et $Y \cap B'_1$ soient coniques.*
Si X et Y sont contenus dans un même cône de B' appartenant à $\mathcal{S}$, alors le cône $Z = X + Y$ est dans $\mathcal{S}$ et $Z \cap B'_1$ est aussi conique.

PREUVE: D'après un résultat de G. Choquet le cône Z est dans $\mathcal{S}$ ([**6**, Section 30.10]).

Le théorème va alors résulter immédiatement des deux résultats suivants; le premier est une légère variante d'un résultat de Goullet de Rugy ([**8**, Théorème 2.1]). ∎

Rappelons d'abord que si X est un cône de $\mathcal{S}$, contenu dans un e.l.c.s. E de dual E', l'ordre de Choquet sur $M^+(X, E')$ est défini par $(\lambda < \mu) \Leftrightarrow (\lambda(f) \leqslant \mu(f)$

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

pour toute $f = V_{1\leqslant i\leqslant n}(\ell_i)$où $\ell_i \in E'$). Une mesure conique maximale sur X s'entend relativement à cet ordre ([**6**, Section 30.11, 12, 13, 14]).

THEOREME 13. *Soit Z un cône de $\mathcal{S}$ contenu dans un e.l.c.s., engendré par un convexe compact K contenant l'origine; alors K est conique dès que toute mesure conique maximale sur Z est localisable en une mesure de Radon sur K.*

THEOREME 14. *Soit Γ un cône de $\mathcal{S}$, contenu dans un e.l.c.s. E; soient X et Y des cônes de $\mathcal{S}$, contenus dans Γ, qui ne portent que des mesures coniques maximales localisables; alors le cône $Z = X + Y$ est dans $\mathcal{S}$ et jouit de la même propriété.*

PREUVE: On a $Z \in \mathcal{S}$ grâce à ([**6**, Section 30.10]); pour le reste il suffit d'appliquer le lemme suivant: ∎

LEMME 15. *(dans le cadre du théorème précédent). Soit μ une mesure conique maximale sur Z; il existe μ_X et μ_Y mesures coniques maximales sur X et Y telles que $\mu = \mu_X + \mu_Y$.*

PREUVE: Soit $z = r(\mu)(r(\mu) \in Z$ et $\mu(f) = f(r(\mu))\forall f \in E')$; on a $\mu = \lim\limits_{\mathcal{U}} \left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{z_i}\right)$ où I est fini, suivant un certain ultrafiltre $\mathcal{U}$, avec $\sum z_i = z$; pour tout i on écrit $z_i = x_i + y_i$ où $x_i \in X$ et $y_i \in Y$ on a $\left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{z_i}\right) < \left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{x_i}\right) + \left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{y_i}\right)$. $\left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{x_i}\right)$ est une mesure conique sur X, son résultant est majoré par z, pour l'ordre de Z, donc $\lim\limits_{\mathcal{U}} \left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{x_I}\right)$ existe; c'est une mesure conique $\geqslant 0$ sur X, soit λ_X. De même $\lim\limits_{\mathcal{U}} \left(\sum\limits_{i\in I} \varepsilon_{y_i}\right)$ existe, soit $\lambda_Y \in M^+(Y)$. On a $\mu < \lambda_X + \lambda_Y$; soit μ_X et μ_Y des mesures maximales sur X et Y avec $\lambda_X < \mu_X$ et $\lambda_Y < \mu_Y$; on a $\mu < \mu_X + \mu_Y$. Comme μ est supposée maximale, on a l'égalité $\mu = \mu_X + \mu_Y$. ∎

Remarque 16. Dans le cadre des e.l.c.s., le Théorème 12 peut s'énoncer ainsi: Soit E un e.l.c.s. et X et Y deux cônes de $\mathcal{S}$ contenus dans E, engendrés par un convexe compact (contenant 0) et conique. Si X et Y sont contenus dans un même cône de $\mathcal{S}$, alors le cône $Z = X + Y$ est dans $\mathcal{S}$ et est aussi engendré par un convexe compact (contenant 0) et conique.

Pour notre dernier résultat, on se place dans le cadre des e.l.c.s.

THEOREME 17. *Soit E un e.l.c.s. et X, Y deux cônes de $\mathcal{L}$ contenus dans E; si X et Y sont contenus dans un même cône de $\mathcal{S}$, alors le cône $Z = X + Y$ est dans $\mathcal{L}$.*

PREUVE: On sait que $Z \in \mathcal{S}$ ([**6**, Section 30.10]). Soit $\mu \in M^+(Z)$ et $z = r(\mu)$;

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press

on a $\mu = \lim \left(\sum_{i \in I} \varepsilon_{z_i} \right)$, où I est fini, suivant un certain ultrafiltre $\mathcal{U}$, avec $\sum z_i = z$; pour tout $i \in I$ on a $z_i = x_i + y_i$ où $x_i \in X$ et $y_i \in Y$. Introduisons le cône $X \times Y \subseteq E \times E$; d'après ([**5**, **14**]) il est dans $\mathcal{L}$. Soit $t_i = (x_i, .y_i)$; alors $\sum_{i \in I} \varepsilon_{t_i}$ est une mesure conique $\geqslant 0$ sur $X \times Y$. Son résultant est majoré par (z, z) pour l'ordre de $Z \times Z$; donc $\nu = \lim \left(\sum_{i \in I} \varepsilon_{t_i} \right)$ existe; c'est une mesure conique $\geqslant 0$ sur $X \times Y$ qui est localisable puisque $X \times Y \in \mathcal{L}$.

Soit φ l'application de $X \times Y$ dans Z définie par $\varphi((x, y)) = x + y$; on a $\mu = \varphi(\nu)$ et donc μ est localisable sur Z d'après ([**13**]). ∎

Remarque 18. Le Théorème 12 peut se déduire du théorème précédent.

REFERENCES

[1] L. Asimow, 'Directed Banach spaces of affine functions', *Trans. Amer. Math. Soc.* **143** (1969), 117–132.

[2] R. Becker, 'Sur les cônes situés dans un espace de Banach et qui ne portent que des mesures coniques localisables': *Séminaire d'Initiation à l'Analyse*, pp. 15–26. (1984–1985).

[3] R. Becker, 'Sur les cônes situés dans un espace de Banach et qui ne portent que des mesures coniques localisables', *C.R.A.S. Paris Math.* **301** Sér I (1985), 361–362.

[4] R. Becker, 'Mesures coniques sur un espace de Banach ou son dual', *J. Austral. Math. Soc.* **39** Ser. A (1985), 39–50.

[5] R. Becker, 'Sur les mesures coniques localisables', *J. Austral. Math. Soc.* **33** Ser. A (1982), 394–400.

[6] G. Choquet, *Lectures on Analysis, 1-3, Mathematics* (Lecture Notes series, Benjamin, New York, Amsterdam, 1969).

[7] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces: Lecture Notes in Mathematics 485* (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).

[8] A. Goullet De Rugy, 'Sur les cônes engendrés par une famille de convexes compacts', *Bull. Sc. Math. (2)* **97** (1973), 242–251.

[9] J. Hagler and W.B. Johnson, 'On Banach spaces whose dual Balls are not weak* sequentially compact', *Israel J. Math.* **28** (1977), 325–330.

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, vol 1: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebeite* 92 (Springer -Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977).

[11] M. Rogalski, *Espaces de Banach réticulés et problème de Dirichlet* (Publication mathématiques d'Orsay, 1972).

[12] H.H. Schaffer, *Topological vector spaces* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966).

[13] R. Thomas, 'Integral representations in conuclear spaces': *Vector spaces measures and applications II* Proceedings, Dublin 1977 (Lecture Notes in Mathematics 645, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York). pp. 172–179.

Equipe d'Analyse
Universite Paris VI
Tour 46 4ème Etage
4, Place Jussieu
75252 - Paris Cedex 05
France

https://doi.org/10.1017/S0004972700003221 Published online by Cambridge University Press