

## HOMOLOGIES DE SHIH: DEFINITION ET PROPRIETES

FRANÇOIS LALONDE

**0. Introduction.** En 1977, Shih [8] a introduit, pour l'étude des sections d'une application  $f: X \rightarrow A$  de classe  $C^k$ , où  $X$  et  $A$  sont des espaces de classe  $C^k$  avec  $0 \leq k \leq \infty$  (paragraphe 1), une nouvelle "homologie" appelée *homologie sectionnelle (k-fois différentiable)* permettant d'attacher à l'application  $f$  des invariants algébriques, et un invariant numérique quand  $A$  est une variété connexe, orientée et paracompacte, le *degré sectionnel*, plus fin que le degré classique.

Cette homologie, introduite d'abord dans le cadre de la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, intervient également dans les problèmes liés aux singularités des applications différentiables.

Soit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g_Y} & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{g_B} & A
 \end{array}$$

d'applications de classe  $C^k$  entre espaces de même classe, où  $g_B$  est un plongement. Pour étudier les sections de  $f$  prolongeant des sections données de  $f'$  (où  $f'$  peut être vide), on définit de manière fonctorielle les groupes d'homologies sectionnelles  $k$ -fois différentiables absolue et relative  $H_*(f)_k$  et  $H_*(f, f'; g)_k$ , où  $g = (g_B, g_Y)$ . Ces homologies s'obtiennent du complexe des chaînes finies de simplexes sectionnels  $k$ -fois différentiables à coefficients entiers, un simplexe sectionnel  $k$ -fois différentiable étant une section locale de classe  $C^k$  de  $f$  au-dessus d'un simplexe plongé. Or l'exigence d'avoir des simplexes plongés introduit des différences fondamentales avec les homologies singulières. En particulier, deux cycles sectionnels de dimension égale à celle de l'espace de base  $A$ , sont nécessairement non homologues: on définit, pour contourner cette difficulté, l'*homologie sectionnelle réduite* en considérant, au lieu de  $f$ , son

---

Reçu le 27 mars 1984. L'auteur remercie MM. Tapio Klemola et Weishu Shih de leurs conseils et appui, et est reconnaissant à M. René Thom pour la lecture du travail dont est tiré cet article. Le CRSNG-Canada a accordé un soutien financier (bourse postgrade) durant l'élaboration de ce travail.

plongement dans  $f \times 1_{\mathbf{R}}$  identifiant  $f$  à  $f \times 1_0$ . Cette homologie, définie au niveau des groupes d'homologie, ne provient pas d'un complexe de chaînes.

On a montré que l'homologie des simplexes plongés d'une variété est la même que son homologie singulière ([5] et [7]) et ensuite que l'homologie sectionnelle d'une submersion  $f: X \rightarrow A$  est isomorphe à l'homologie singulière de l'espace total  $X$  pour les dimensions inférieures à la dimension de l'espace de base  $A$  (elle est nulle pour les dimensions supérieures). ([6] et [7]). En homologie réduite, cet énoncé inclut également la dimension de  $A$ . Ainsi l'homologie sectionnelle d'une application  $f$  n'est "sensible" qu'aux singularités de  $f$ . Et effectivement, l'homologie sectionnelle des fibrés à singularités (et à fortiori celle des applications différentiables moins régulières) est bien différente de l'homologie singulière de l'espace source (paragraphe 1, exemples b et c). Ceci a notamment pour conséquence que le degré sectionnel représente une obstruction beaucoup plus fine que le degré classique pour l'existence de sections d'une application donnée (paragraphe 4).

On donne au paragraphe 1 les définitions catégoriques des homologies sectionnelles non-réduite et réduite dans les cas continu et différentiable, avec quelques exemples. On établit ensuite au paragraphe 2 quels sont, parmi les axiomes d'une théorie homologique, ceux auxquels satisfont ou ne satisfont pas ces homologies. On reprend succinctement la même étude au paragraphe 3 pour l'homologie sectionnelle réduite. Enfin, le dernier paragraphe 4 est consacré à la définition du degré sectionnel et aux avantages qu'il présente sur le degré classique.

**1. Définitions et exemples.** Soit  $f: X \rightarrow A$  une application continue d'un espace topologique séparable dans un autre. Selon Shih [8], un  $q$ -simplexe sectionnel (continu) de  $f$  est un couple  $(\sigma, \gamma)$  où  $\sigma: \Delta_q \rightarrow A$  est une application continue injective du  $q$ -ème simplexe type  $\Delta_q \subset \mathbf{R}^{q+1}$  dans  $A$  et où  $\gamma$  est une section continue du produit fibré  $\sigma^*X$  de  $f$  par  $\sigma$  au-dessus de  $\Delta_q$ , c'est-à-dire une application continue  $\gamma: \Delta_q \rightarrow X$  telle que  $\sigma = f \circ \gamma$ . L'application  $\sigma$  est donc un homéomorphisme sur son image en tant qu'application continue d'un espace compact dans un espace séparable. On désigne par  $S_q(f)_s$  l'ensemble de tels couples,  $S_q(f)_s = \emptyset$  pour  $q < 0$ , et par

$$F_i: S_q(f)_s \rightarrow S_{q-1}(f)_s$$

les opérateurs de faces définis de façon naturelle:

$$F_i(\sigma, \gamma) = (F_i(\sigma), F_i(\gamma)).$$

Notant  $C_q(f)_s$  le groupe librement engendré par les  $q$ -simplexes sectionnels, on définit par

$$C(f)_s = (\{C_q(f)_s\}_{q \in \mathbf{Z}}, \partial)$$

le complexe des chaînes sectionnelles où

$$\partial_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i F_i.$$

L'homologie de ce complexe est notée  $H_*(f)_s$ , appelée *homologie sectionnelle* de  $f$ .

C'est là la définition de Shih. Dans cet article, pour pouvoir traiter simultanément les cas continu et différentiable, on utilisera les définitions suivantes.

On appellera espace de classe  $C^0$  un espace topologique séparable, et espace de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , une variété différentiable réelle de classe  $C^k$ . Une application de classe  $C^0$  (c'est-à-dire continue)  $\varphi: V \rightarrow W$  entre espaces de classe  $C^0$  est un plongement de classe  $C^0$  si  $\varphi$  est injective; c'est un plongement régulier de classe  $C^0$  si  $\varphi$  est un homéomorphisme sur son image. De même, une application  $\varphi: V \rightarrow W$  de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , est un plongement de classe  $C^k$  si  $\varphi$  est une immersion injective; c'est un plongement régulier de classe  $C^k$  si  $\varphi$  est un plongement de classe  $C^k$  et un homéomorphisme sur son image.

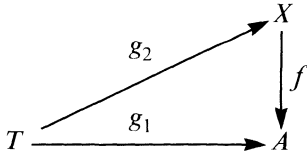
Soient  $0 \leq k \leq \infty$  et  $f: X \rightarrow A$  une application de classe  $C^k$  d'un espace de classe  $C^k$  dans un autre. On définit l'*homologie sectionnelle  $k$ -fois différentiable* de  $f$ , notée  $H_*(f)_k$ , de la manière suivante. Soit  $(\sigma, \gamma)$  un  $q$ -simplexe sectionnel (continu) de  $f$ . Notons  $H_q$  l'hyperplan de  $\mathbf{R}^{q+1}$  contenant  $\Delta_q$ , et  $\mathcal{U}_q$  l'ensemble des voisinages ouverts de  $\Delta_q$  dans  $H_q$ . Alors,  $(\sigma, \gamma)$  est dit  *$q$ -simplexe sectionnel  $k$ -fois différentiable* de  $f$  s'il existe  $U \in \mathcal{U}_q$  tel que (1)  $\sigma$  se prolonge sur  $U$  en une application  $\sigma_U$  de classe  $C^k$  dont la restriction à  $\Delta_q$  est un plongement de classe  $C^k$  et (2)  $\gamma$  se prolonge sur  $U$  en une application  $\gamma_U$  de classe  $C^k$ . Si  $k = 0$ , cette définition est équivalente à celle d'un  $q$ -simplexe sectionnel continu de  $f$ . Si  $1 \leq k \leq \infty$ , la définition est équivalente à l'existence d'un ouvert  $U \in \mathcal{U}_q$  tel que  $\sigma$  et  $\gamma$  se prolongent sur  $U$  en un plongement régulier  $\sigma_U$  et une application  $\gamma_U$  de classe  $C^k$  respectivement: il en résulte que  $(\sigma_U, \gamma_U)$  induit une application

$$\tilde{\gamma}_U = \gamma_U \sigma_U^{-1}: \text{Im } \sigma_U \rightarrow X$$

de classe  $C^k$  qui est une section de  $f$  au-dessus de  $\text{Im } \sigma$ , mais pas nécessairement au-dessus de  $\text{Im } \sigma_U$ . On note  $S_q(f)_k$  l'ensemble de tels couples et on définit, comme auparavant, le complexe  $C(f)_k$  des chaînes sectionnelles  $k$ -fois différentiables de  $f$ . L'homologie  $H_*(f)_k$  est obtenue à partir de ce complexe. Il est clair que les définitions de  $H_*(f)_s$  et  $H_*(f)_0$  sont équivalentes: il suffit donc de considérer les homologies sectionnelles  $k$ -fois différentiables pour  $0 \leq k \leq \infty$ .

Remarquons que pour l'identité  $i: T \rightarrow T$  d'un espace de classe  $C^k$ , l'homologie sectionnelle  $H_*(i)_k$  s'identifie à l'homologie du complexe des

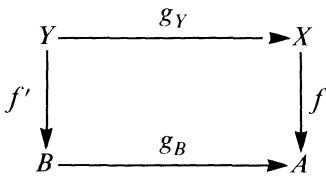
chaînes finies de simplexes  $k$ -fois différentiables plongés de  $T$ , appelée *homologie de plongements  $k$ -fois différentiables* et notée  $H_*(T)_{pk}$ . Alors, tout diagramme commutatif de la forme



où les espaces et applications sont de classe  $C^k$  et où  $g_1$  est un plongement, induit des morphismes

$$(g_1, g_2): C(T)_{pk} \rightarrow C(f)_k \quad \text{et} \quad (g_1, g_2)_*: H_*(T)_{pk} \rightarrow H_*(f)_k.$$

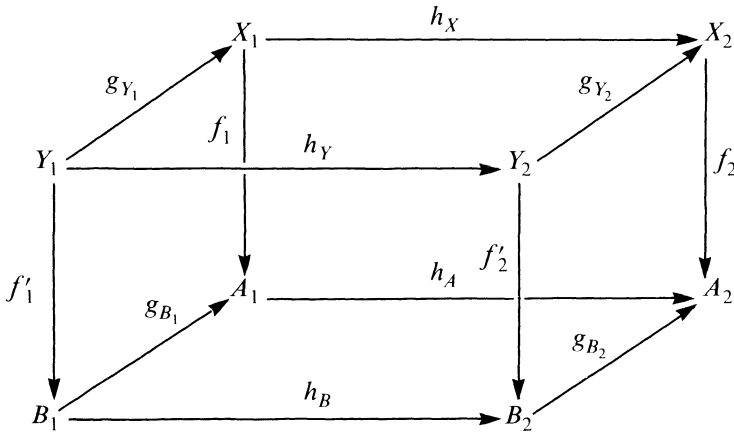
Soit maintenant  $0 \leq k \leq \infty$ , et soient  $A, X, B, Y$  des espaces de classe  $C^k$  (pas nécessairement non-vides),  $f, f', g_B$  et  $g_Y$  des applications également de classe  $C^k$  telles que le diagramme suivant soit commutatif



et que  $g_B$  soit un plongement. Notons  $g$  le couple  $(g_B, g_Y)$ . Un tel diagramme sera appelé  *$k$ -diagramme*, noté  $(f, f'; g)_k$ . Un  *$k$ -morphisme*

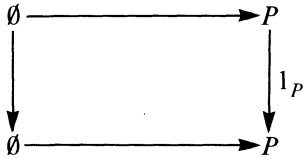
$$h: (f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

d'un  $k$ -diagramme dans un autre est un quadruplet  $(h_A, h_X, h_B, h_Y)$  d'applications de classe  $C^k$  telles que le diagramme suivant soit commutatif



et que  $h_A$  et  $h_B$  soient des plongements.

Désignons par  $\mathcal{D}_k$  la catégorie dont les objets sont les  $k$ -diagrammes et les morphismes, les  $k$ -morphisms. Soit  $\mathcal{G}$  la catégorie des groupes abéliens gradués. On va définir un foncteur de  $\mathcal{D}_k$  dans  $\mathcal{G}$  associant à tout  $k$ -diagramme  $(f, f'; g)_k$  l'homologie sectionnelle  $H_*(f, f'; g)_k$ . Mais auparavant, pour donner un sens dans  $\mathcal{D}_k$  aux axiomes d'une théorie homologique, nous devons définir ce qu'y sont un point, une homotopie et une excision. Un *point* de  $\mathcal{D}_k$  est un  $k$ -diagramme



où  $P$  consiste en un seul point.

Une *homotopie au sens fort* entre deux  $k$ -morphisms

$$h_0, h_1: (f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

est un  $k$ -morphisme

$$F = (F_A, F_X, F_B, F_Y): (f_1, f'_1; g_1)_k \times 1_{\mathbf{R}} \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

tel que  $Fj_0 = h_0$  et  $Fj_1 = h_1$ , où  $(f_1, f'_1; g_1)_k \times 1_{\mathbf{R}}$  désigne

$$(f_1 \times 1_{\mathbf{R}}, f'_1 \times 1_{\mathbf{R}}; g_1 \times 1_{\mathbf{R}})_k$$

et où, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$j_t: (f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_1, f'_1; g_1)_k \times 1_{\mathbf{R}}$$

est le  $k$ -morphisme défini par l'identification de  $(f_1, f'_1; g_1)_k$  à  $(f_1, f'_1; g_1)_k \times 1_{\mathbf{R}}$ . Une *homotopie au sens faible* entre deux  $k$ -morphisms

$$h_0, h_1: (f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

est un quadruplet  $F = (F_A, F_X, F_B, F_Y)$  défini de la même manière que pour l'homotopie au sens fort, à la différence qu'ici  $F_A$  et  $F_B$  sont des isotopies de classe  $C^k$ . Ainsi,  $F$  n'est plus en général un  $k$ -morphisme; mais les

$$Fj_t: (f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

en sont quel que soit  $t \in \mathbf{R}$ .

Soit  $(f, f'; g)_k$  un  $k$ -diagramme tel que  $Y$  soit un sous-espace de classe  $C^k$  de  $X$ ,  $B = f(Y)$ ,  $f'$  soit la restriction de  $f$  à  $Y$ , et  $g$  l'inclusion de  $f'$  dans  $f$ . On dira dans ce cas que  $f'$  est une *restriction* de  $f$ , et l'on notera également  $(f, f')_k$  un tel  $k$ -diagramme. Soit alors  $U$  un sous-espace de  $Y$  tel que  $Y - U$ ,  $X - U$ ,  $f'(Y - U)$  et  $f(X - U)$  soient des espaces de classe  $C^k$ . Notons  $f'_U$  et  $f_U$  les restrictions de  $f'$  et  $f$  à  $Y - U$  et  $X - U$  respectivement. Le  $k$ -diagramme  $(f_U, f'_U)_k$  est alors dit une *excision* de  $(f, f')_k$  si la fermeture de  $U$  relativement à  $X$  est incluse dans l'intérieur de  $Y$  relativement à  $X$ .

On définit le foncteur  $H_*: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{G}$  de la manière suivante. Soit  $(f, f'; g)_k$  un  $k$ -diagramme. Il est clair que  $g$  induit une application de  $S_q(f')_k$  dans  $S_q(f)_k$  pour tout  $q$ , qui s'étend linéairement à un morphisme

$$g: C(f')_k \rightarrow C(f)_k$$

car  $g$  commute avec  $\partial$ . Ainsi  $g$  induit le morphisme

$$g_*: H_*(f')_k \rightarrow H_*(f)_k.$$

Alors le *groupe d'homologie sectionnelle relative*  $H_*(f, f'; g)_k$  provient du complexe de chaînes  $C(f, f'; g)_k$  défini par le "mapping cone" des complexes de chaînes  $C(f)_k$  et  $C(f')_k$ :

$$C(f, f'; g)_k = C(f)_k +_g C(f')_k$$

dont le  $q$ -ème groupe est

$$C_q(f)_k \oplus C_{q-1}(f')_k \quad \text{et} \quad \partial(c \oplus c') = (\partial c + g c') \oplus (-\partial c').$$

Evidemment, si dans le  $k$ -diagramme  $(f, f'; g)_k$ ,  $f$  est la seule application non vide, la définition de  $H_*(f, f'; g)_k$  coïncide avec celle de  $H_*(f)_k$ . Si  $f'$  est une restriction de  $f$ , l'inclusion  $g$  permet d'identifier  $C(f')_k$  à un sous-complexe de  $C(f)_k$ :  $H_*(f, f'; g)_k$  est alors canoniquement isomorphe à  $H_*(C(f)_k / C(f')_k)$ .

Soit  $h = (h_A, h_X, h_B, h_Y)$  un  $k$ -morphisme de  $(f_1, f'_1; g_1)_k$  dans  $(f_2, f'_2; g_2)_k$ . On lui associe le morphisme

$$h: C(f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow C(f_2, f'_2; g_2)_k$$

donné sur

$$C_q(f_1, f'_1; g_1)_k = C_q(f_1)_k +_g C_{q-1}(f'_1)_k$$

par

$$h(c_1 \oplus c'_1) = (h_A, h_X)(c_1) \oplus (h_B, h_Y)(c'_1)$$

où

$$(h_A, h_X): C(f_1)_k \rightarrow C(f_2)_k \quad \text{et} \quad (h_B, h_Y): C(f'_1)_k \rightarrow C(f'_2)_k$$

sont les morphismes définis de la façon naturelle. Alors  $h$  est un morphisme de complexes de chaînes induisant le morphisme

$$H_*(h): H_*(f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow H_*(f_2, f'_2; g_2)_k$$

noté également  $h_*$ . Ainsi défini,  $H_*$  est bien un foncteur de  $\mathcal{D}_k$  dans  $\mathcal{G}$ .

Enfin, le foncteur  $H_{*r}: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{G}$  associant à tout  $k$ -diagramme  $(f, f'; g)_k$  son *homologie sectionnelle  $k$ -fois différentiable réduite*  $H_{*r}(f, f'; g)_k$  est défini par:

$$H_{*r}(f, f'; g)_k = \text{Im} \left( H_*(f, f'; g)_k \xrightarrow{j_{0*}} H_*((f, f'; g)_k \times 1_{\mathbf{R}}) \right)$$

où le  $k$ -morphisme  $j_0$  est l'identification de  $(f, f'; g)_k$  à  $(f, f'; g)_k \times 1_0$ .  
Ainsi

$$H_{qr}(f, f'; g)_k \simeq Z_q(f, f'; g)_k / B_{qr}(f, f'; g)_k$$

où  $B_{qr}(f, f'; g)_k$  est le sous-groupe de  $Z_q(f, f'; g)_k$  constitué des cycles  $z$  tels que

$$j_0(z) \in B_q((f, f'; g)_k \times 1_{\mathbf{R}}).$$

Donc,

$$B_q(f, f'; g)_k \subset B_{qr}(f, f'; g)_k,$$

mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Soit

$$h:(f_1, f'_1; g_1)_k \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)_k$$

un  $k$ -morphisme. Le diagramme suivant étant commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H_*(f_1, f'_1; g_1)_k & \xrightarrow{H_*(h)} & H_*(f_2, f'_2; g_2)_k \\ \downarrow H_*(j_0) & & \downarrow H_*(j_0) \\ H_*((f_1, f'_1; g_1)_k \times 1_{\mathbf{R}}) & \xrightarrow{H_*(h \times 1_{\mathbf{R}})} & H_*((f_2, f'_2; g_2)_k \times 1_{\mathbf{R}}) \end{array}$$

$H_{*r}(f_1, f'_1; g_1)_k$  est appliqué par  $H_*(h \times 1_{\mathbf{R}})$  dans  $H_{*r}(f_2, f'_2; g_2)_k$ . On définit  $H_{*r}(h)$  par la restriction de  $H_*(h \times 1_{\mathbf{R}})$  à  $H_{*r}(f_1, f'_1; g_1)_k$ , et la functorialité de  $H_{*r}$  résulte immédiatement de celle de  $H_*$ . La notation  $h_{*r}$ , pour  $H_{*r}(h)$ , sera utilisée.

*Exemples.* a) Soit  $f: X \rightarrow A^n$  un fibré localement trivial ou, d'une façon plus générale, une submersion de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ . On a montré ([5] et [7]), sous l'hypothèse que l'homologie des simplexes plongés d'une variété est la même que son homologie singulière et ensuite ([6] et [7]) que pour une submersion  $f: X \rightarrow A$ , on a :

$$H_q(f)_k \simeq H_q(X) \quad \text{pour } q < n = \dim A$$

(bien sûr  $H_n(f)_k = Z_n(f)_k$  et  $H_q(f)_k = 0$  pour  $q > n$ ) et  $H_{qr}(f)_k \simeq H_q(X)$  pour  $q \leq n$  ( $H_{qr}(f)_k = 0$  pour  $q > n$ ), où  $H_q(X)$  est l'homologie singulière de  $X$ .

b) Une application  $f: X \rightarrow A$  continue, ouverte et surjective d'espaces topologiques est dite fibré à singularités s'il existe un sous-ensemble fermé  $X_0$  de  $X$  tel que  $f|_{X_0}$  soit un homéomorphisme de  $X_0$  sur  $A_0 \subset A$ , et que

$$f|_{X-X_0}: X - X_0 \rightarrow A - A_0$$

soit un fibré (de fibre notée  $F$ ). Le fibré à singularités est de classe  $C^k$  si tous les espaces, les inclusions  $X_0 \hookrightarrow X$  et  $A_0 \hookrightarrow A$ , et les projections  $f_{|X_0}$  et  $f_{|X-X_0}$  sont de classe  $C^k$ .

Les homologies sectionnelles d'un fibré à singularités ne sont pas les mêmes, en général, que l'homologie singulière de l'espace total  $X$ . A titre d'exemple, considérons les homologies sectionnelles  $k$ -fois différentiables ( $1 \leq k \leq \infty$ ) de

$$f: S^m \rightarrow I \quad (m \geq 1)$$

$$(x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto x_1.$$

Ici,  $X = S^m$ ,  $A = I$ ,  $X_0 = \{(-1, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0)\}$ ,  $A_0 = \{-1, 1\}$  et  $F \simeq S^{m-1}$ . On a:

$$H_q(f)_k \simeq \begin{cases} H_0(S^{m-1}) \oplus \mathbf{Z} & q = 0 \\ Z_1(f_{|X-X_0})_k & q = 1 \\ 0 & q > 1 \end{cases}$$

$$H_q(f, f_{|X_0})_k \simeq \begin{cases} H_0(S^{m-1}) & q = 0 \\ Z_1(f_{|X-X_0})_k & q = 1 \\ 0 & q > 1 \end{cases}$$

$$H_{qr}(f)_k \simeq H_{qr}(f, f_{|X_0})_k \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ H_1(S^{m-1}) & q = 1 \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

Ce calcul s'obtient des définitions, en utilisant la caractérisation donnée en a) pour les homologies sectionnelles de  $f_{|X-X_0}$ . La nullité de groupe  $H_{1r}(f, f_{|X_0})_k$ , pour  $m \neq 2$ , entraîne immédiatement qu'il n'existe pas de section différentiable globale de  $f$  (paragraphe 4, exemple c).

c) Considérons enfin le cas d'une application de classe  $C^\infty$  stratifiée en deux strates au sens de Thom-Boardman ([3], chap. VI paragraphe 5, et [1]) qui n'est pas un fibré à singularités. Soit

$$f: X = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 = A$$

donnée par

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}x_1^3 - x_1, x_2\right).$$

Désignant par  $S_i(f)$  l'ensemble des points de  $X$  où  $f$  est de corang  $i$ , on a:

$$S_0(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2: x_1 \neq -1, 1\}$$

et

$$S_1(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2: x_1 = -1 \text{ ou } 1\}.$$



Notons  $X_i = S_i(f)$  et  $f_i = f|_{X_i}$  pour  $i = 0, 1$ , et considérons la suite exacte d'homologie sectionnelle relative associée à  $(f, f_0)_k$  (paragraphe 2, propriété ii):

$$\dots \rightarrow H_1(f_0)_k \xrightarrow{i_*} H_1(f)_k \xrightarrow{j_*} H_1(f, f_0)_k \xrightarrow{\partial_*} H_0(f_0)_k \rightarrow \dots$$

Puisque  $H_1(f_0)_k$  est nul et que  $H_1(f, f_0)_k = Z_1(f, f_0)_k$ ,

$$H_1(f)_k \simeq \ker(\partial_*: Z_1(f, f_0)_k \rightarrow H_0(f_0)_k).$$

Alors, pour  $1 \leq k \leq \infty$ , les homologies sectionnelles (à chaînes localement finies) sont

$$H_q(f)_k \simeq \begin{cases} 0 & q = 0 \\ \ker \partial_* & q = 1 \\ Z_2(f_0)_k & q = 2 \\ 0 & q > 2 \end{cases}$$

et

$$H_{*,r}(f)_k \simeq 0.$$

Notons en particulier que  $H_1(f)_k$  et  $H_2(f)_k$  sont à engendrement infini alors que les homologies réduites sont nulles. La nullité du groupe  $H_{2,r}(f)_k$  entraîne qu'il n'existe pas de section globale de  $f$  alors que l'homologie singulière ne fournit aucune obstruction (paragraphe 4, exemple b).

**2. Propriétés de l'homologie sectionnelle.** Les axiomes d'une théorie homologique sont i) la fonctorialité, ii) l'exactitude de la suite longue d'homologie relative, iii) la nullité des groupes d'homologie d'un point en dimension positive, iv) l'invariance par homotopie, et v) l'excision. La fonctorialité a déjà été établie. Nous montrons dans ce paragraphe que l'homologie sectionnelle (non-réduite) vérifie ii), iii) et iv) au sens fort, mais non iv) au sens faible, ni v). Puisqu'ici énoncés et démonstrations s'appliquent également à toutes les valeurs de  $k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , on omettra les indices  $k$  ainsi que les expressions “ $k$ -fois différentiable” ou “de classe  $C^k$ ”.

ii) *La suite exacte longue en homologie sectionnelle.* Considérons, pour un diagramme  $(f, f'; g)$  quelconque, la suite courte

$$0 \rightarrow C_q(f) \xrightarrow{p} C_q(f) \oplus_g C_{q-1}(f') \xrightarrow{-q} C_{q-1}(f') \rightarrow 0$$

où  $p$  et  $q$  sont définis par  $p(x) = x \oplus 0$  et  $q(x \oplus y) = y$ . Elle est exacte à condition de remplacer  $\partial$  par  $-\partial$  dans  $C(f')$  de sorte que  $-q$  devienne un morphisme. Et on a la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_q(f) \xrightarrow{j_*} H_q(f, f'; g) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(f') \xrightarrow{g_*} H_{q-1}(f) \rightarrow \dots$$

puisque  $H_*(f')$  n'est pas affecté en substituant  $-\partial$  à  $\partial$ . Ici  $j_* = p_*$  et  $\partial_* = -q_*$ . Notons que  $g_*$  et  $j_*$  sont induits par les morphismes

$$g:(f') \rightarrow (f) \quad \text{et} \quad j:(f) \rightarrow (f, f'; g)$$

définis de la façon évidente.

Soit

$$h = (h_A, h_X, h_B, h_Y):(f_1, f'_1; g_1) \rightarrow (f_2, f'_2; g_2).$$

On lui associe le morphisme  $h_*$  de la suite exacte longue d'homologie sectionnelle relative de  $(f_1, f'_1; g_1)$  dans celle de  $(f_2, f'_2; g_2)$ . En effet, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(f_1) & \longrightarrow & C(f_1, f'_1; g_1) & \longrightarrow & C(f'_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (h_A, h_X) & & h & & (h_B, h_Y) & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & C(f_2) & \longrightarrow & C(f_2, f'_2; g_2) & \longrightarrow & C(f'_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et on déduit le diagramme également commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(f_1) & \longrightarrow & H_q(f_1, f'_1; g_1) & \longrightarrow & H_{q-1}(f'_1) & \longrightarrow & H_{q-1}(f_1) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & (h_A, h_X)_* & & h_* & & (h_B, h_Y)_* & & (h_A, h_X)_* & & \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_q(f_2) & \longrightarrow & H_q(f_2, f'_2; g_2) & \longrightarrow & H_{q-1}(f'_2) & \longrightarrow & H_{q-1}(f_2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Bien sûr, l'association à tout morphisme  $h$  du morphisme  $h_*$  de suites longues exactes, est fonctorielle.

La propriété iii) est évidente:  $H_0(1_p) \simeq \mathbf{Z}$  et  $H_q(1_p) = 0$  pour  $q \neq 0$ .

iv) *Invariance par homotopie.* L'homologie sectionnelle (non-réduite) vérifie l'invariance par homotopie au sens fort, mais non au sens faible.

a) Cas de l'homotopie au sens fort. Il suffit de montrer que toute homotopie au sens fort  $F$  entre deux morphismes

$$h_0, h_1:(f_1, f'_1; g_1) \rightarrow (f_2, f'_2; g_2)$$

induit une homotopie au niveau des complexes de chaînes entre  $h_0$  et  $h_1$ . Ceci est équivalent à démontrer que, pour tout diagramme  $(f, f'; g)$ ,

$$j_0, j_1:(f, f'; g) \rightarrow (f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}}$$

induisent des morphismes de complexes de chaînes homotopes. La condition est nécessaire car l'identité sur  $(f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}}$  est une homotopie au sens fort entre  $j_0$  et  $j_1$ . Elle est suffisante car l'homotopie  $\Omega$  entre les morphismes de complexes de chaînes  $j_0$  et  $j_1$ , permet de définir une homotopie  $\Theta$  entre  $h_0$  et  $h_1$  par  $\Theta = F\Omega$ .

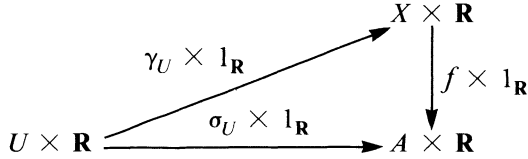
Définissons d'abord une homotopie

$$\Omega_f: C(f) \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}})$$

entre

$$j_0, j_1: C(f) \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}}).$$

Soit  $P_{q+1}$  le prisme  $\Delta_q \times [0, 1] = \Delta_q \times I$ . A chaque  $q$ -simplexe sectionnel  $(\sigma, \gamma) \in S_q(f)$ , on associe le diagramme



où  $U \in \mathcal{U}_q$ ,  $\sigma_U$  et  $\gamma_U$  sont donnés par la définition de  $(\sigma, \gamma)$ . Alors, les restrictions  $\sigma \times i_I$  et  $\gamma \times i_I$  de  $\sigma_U \times 1_{\mathbf{R}}$  et  $\gamma_U \times 1_{\mathbf{R}}$  à  $P_{q+1}$  donnent un sens au morphisme

$$(\sigma \times i_I, \gamma \times i_I): C(P_{q+1})_p \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}}).$$

L'homotopie cherchée  $\Omega_f$  est définie sur chaque simplexe  $(\sigma, \gamma) \in S_q(f)$  par

$$(\sigma \times i_I, \gamma \times i_I)(\Omega^L(1_{\Delta_q})),$$

où

$$\Omega^L: L(\Delta_q) \rightarrow L(P_{q+1})$$

est l'homotopie classique entre

$$j_0, j_1: L(\Delta_q) \rightarrow L(P_{q+1}).$$

Ici, pour un polyèdre  $P$ ,  $L(P)$  désigne la restriction du complexe des chaînes singulières  $C(P)$  aux chaînes de simplexes linéaires affines.

On détermine de même une homotopie

$$\Omega_{f'}: C(f') \rightarrow C(f' \times 1_{\mathbf{R}})$$

entre

$$j_0, j_1: C(f') \rightarrow C(f' \times 1_{\mathbf{R}}).$$

Définissons maintenant

$$\Omega: C(f, f', g) \rightarrow C((f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}})$$

l'homotopie entre  $j_0$  et  $j_1$  par

$$\Omega(x \oplus y) = \Omega_f(x) \oplus (-\Omega_{f'}(y)).$$

Vérifions que  $\Omega$  est bien une homotopie. On a :

$$\begin{aligned} \partial\Omega(x \oplus y) &= (\partial\Omega_f(x) - g \times 1_{\mathbf{R}}\Omega_f(y)) \oplus (\partial\Omega_f(y)) \\ &= (j_0(x) - j_1(x) - \Omega_f\partial(x) - g \times 1_{\mathbf{R}}\Omega_f(y)) \\ &\quad \oplus (j_0(y) - j_1(y) - \Omega_f\partial(y)). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\Omega\partial(x \oplus y) = \Omega(\partial x + gy) \oplus (-\partial y) = (\Omega_f\partial x + \Omega_fgy) \oplus (\Omega_f\partial y).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (\partial\Omega + \Omega\partial)(x \oplus y) &= (j_0(x) - j_1(x)) \oplus (j_0(y) - j_1(y)) \\ &= (j_0 - j_1)(x \oplus y), \end{aligned}$$

car

$$\Omega_f g(y) = g \times 1_{\mathbf{R}}\Omega_f(y).$$

En effet, il suffit de montrer que

$$\Omega_f g(\sigma, \gamma) = g \times 1_{\mathbf{R}}\Omega_f(\sigma, \gamma) \text{ pour } (\sigma, \gamma) \in S_q(f').$$

Or ces deux  $(q + 1)$ -chaînes de  $C(f \times 1_{\mathbf{R}})$  sont des subdivisions barycentriques canoniquement définies sur des  $(q + 1)$ -prismes sectionnels de  $f \times 1_{\mathbf{R}}$ . Il est donc suffisant d'établir que les deux  $(q + 1)$ -prismes sectionnels déterminant  $\Omega_f g(\sigma, \gamma)$  et  $g \times 1_{\mathbf{R}}\Omega_f(\sigma, \gamma)$  sont les mêmes. Le premier est le couple

$$((g_B\sigma) \times i_I, (g_Y\gamma) \times i_I):\Delta_q \times I \rightarrow f \times 1_{\mathbf{R}}$$

et le second, le couple

$$((g_B \times 1_{\mathbf{R}}) \circ (\sigma \times i_I), (g_Y \times 1_{\mathbf{R}}) \circ (\gamma \times i_I)):\Delta_q \times I \rightarrow f \times 1_{\mathbf{R}},$$

dont les premières composantes sont égales, ainsi que les secondes.

b) Cas de l'homotopie au sens faible. L'homologie sectionnelle (non-réduite) ne vérifie pas l'invariance par homotopie au sens faible. Soient par exemple  $f':Y \rightarrow B$  et  $f'':Z \rightarrow B$  deux fibrés vectoriels (de classe  $C^k$ ) sur une même variété  $B$  de dimension  $n$ , et  $f:X \rightarrow B$  la somme de Whitney de  $f'$  et  $f''$ . Alors les morphismes

$$g = (1_B, i):f' \rightarrow f \text{ et } g' = (1_B, q):f \rightarrow f'$$

définis par  $i(y) = y \oplus 0$  et  $q(y \oplus z) = y$ , sont des équivalences par homotopie au sens faible:  $g'g = 1_{f'}$  et  $gg'$  est homotope au sens faible à  $1_f$  (il suffit de définir

$$F = (F_B, F_X):f \times 1_{\mathbf{R}} \rightarrow f$$

par  $F_B(b, t) = b$  et  $F_X(y \oplus z, t) = y \oplus zt$ ).

Mais  $H_n(f')$  n'est pas isomorphe à  $H_n(f)$ . En effet,  $H_n(f') = Z_n(f')$  et  $H_n(f) = Z_n(f)$  car  $B_n(f') = B_n(f) = 0$ . Or  $g$  permet d'identifier  $f'$

à un sous-fibré de  $f$ , et  $Z_n(f')$  à un sous-groupe de  $Z_n(f)$ . Ainsi  $Z_n(f') \subset Z_n(f)$  mais  $Z_n(f) \not\subset Z_n(f')$ : soit  $z \in Z_n(f)$  tel que  $z \neq 0$  et qu'il existe  $(\sigma, \gamma) \in z$  avec  $\text{Im } \gamma \not\subset \text{Im } \rho$  où  $\rho: B \rightarrow Z$  est la section nulle. Alors  $z \in Z_n(f)$  mais  $z \notin Z_n(f')$ .

v) *La propriété d'excision.* Il n'est pas difficile de voir que cette propriété n'est pas satisfaite en homologie sectionnelle (non-réduite). Il suffit simplement de noter que, pour  $n = \dim B = \dim A$ ,

$$H_n(f, f') = Z_n(f, f') \quad \text{et} \quad H_n(f_U, f'_U) = Z_n(f_U, f'_U).$$

On peut alors identifier  $Z_n(f_U, f'_U)$  à un sous-groupe de  $Z_n(f, f')$ , et tout cycle  $z \in Z_n(f, f')$  dont au moins un simplexe  $(\sigma, \gamma)$  est tel que

$$\text{Im } \gamma \cap (X - Y) \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im } \gamma \cap U \neq \emptyset,$$

n'appartient pas à  $Z_n(f_U, f'_U)$ .

**3. Propriétés de l'homologie sectionnelle réduite.** Nous montrons dans ce paragraphe que l'homologie sectionnelle réduite satisfait aux propriétés ii), iii), iv) au sens fort et faible, et v), mais pas à ii). Comme au dernier paragraphe, on omettra l'indice  $k$  ainsi que les expressions “ $k$ -fois différentiable” et “de classe  $C^k$ ”.

ii) *Suite longue d'homologie sectionnelle relative réduite.* Cette suite existe mais n'est pas toujours exacte. Elle ne provient pas d'une suite exacte courte puisque l'homologie sectionnelle réduite n'est pas définie par un complexe de chaînes. Soit  $(f, f'; g)$  un diagramme. Le morphisme

$$j_0: (f, f'; g) \rightarrow (f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}}$$

induit, selon le paragraphe 2 propriété ii), le morphisme  $(j_0)_*$  de la suite exacte d'homologie sectionnelle non-réduite associée à  $(f, f'; g)$  dans celle associée à  $(f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}}$ :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_q(f') & \xrightarrow{g_*} & H_q(f) & \xrightarrow{j_*} & H_q(f, f'; g) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(f') & \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow (j_0)_* & & \downarrow (j_0)_* & & \downarrow (j_0)_* & & \downarrow (j_0)_* & \\ \cdots & \rightarrow & H_q(f' \times 1_{\mathbf{R}}) & \xrightarrow{(g \times 1_{\mathbf{R}})_*} & H_q(f \times 1_{\mathbf{R}}) & \xrightarrow{(j \times 1_{\mathbf{R}})_*} & H_q((f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(f' \times 1_{\mathbf{R}}) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

Le diagramme étant commutatif, les homomorphismes de la suite exacte du bas appliquent les diverses images de  $(j_0)_*$  les unes dans les autres. On peut donc définir  $g_{*r}, j_{*r}$  et  $\partial_{*r}$  par les restrictions de  $(g \times 1_{\mathbf{R}})_*, (j \times 1_{\mathbf{R}})_*$  et  $\partial_*$  à  $H_{*r}(f'), H_{*r}(f)$  et  $H_{*r}(f, f'; g)$  respectivement; on obtient ainsi la suite longue d'homologie sectionnelle relative réduite.

Puisque, dans le diagramme (2), la suite du bas est exacte, le composé de deux homomorphismes successifs est nul. Il en est donc de même dans la suite d'homologie sectionnelle réduite. Par ailleurs, dans celle-ci, il n'est pas assuré que le noyau d'un homomorphisme soit inclus dans l'image de l'homomorphisme précédent. On peut formuler une condition suffisante

simple pour l'exactitude de la suite d'homologie sectionnelle réduite de  $(f, f'; g)$  en un groupe quelconque  $G_r$  de cette suite. Notons  $G$  le groupe correspondant en homologie sectionnelle non-réduite. Pour que la suite d'homologie sectionnelle réduite de  $(f, f'; g)$  soit exacte en  $G_r$ , il suffit que dans le diagramme (2), l'homomorphisme  $(j_0)_*$  dont la domaine est le groupe précédant immédiatement  $G$  soit surjectif, ou que l'homomorphisme  $(j_0)_*$  dont le domaine est le groupe suivant immédiatement  $G$  soit injectif.

Comme au paragraphe 2, la propriété iii) est évidente.

iv) *L'homologie sectionnelle réduite est invariante par homotopie aux sens fort et faible.* Il est suffisant de démontrer l'invariance par homotopie au sens faible. Soient

$$h_0, h_1: (f, f'_1; g_1) \rightarrow (f_1, f'_2; g_2)$$

deux morphismes homotopes au sens faible et

$$F = (F_A, F_X, F_B, F_Y): (f_1, f'_1; g_1) \times 1_{\mathbf{R}} \rightarrow 1 (f_2, f'_2; g_2)$$

l'homotopie faible. Définissons un morphisme

$$F_{\mathbf{R}} = (F_{\mathbf{R}_A}, F_{\mathbf{R}_X}, F_{\mathbf{R}_B}, F_{\mathbf{R}_Y}): (f_1, f'_1; g_1) \times 1_{\mathbf{R}} \rightarrow (f_2, f'_2; g_2) \times 1_{\mathbf{R}}$$

par:  $F_{\mathbf{R}j_t} = j_t F_{j_t}$  quel que soit  $t \in \mathbf{R}$ . Ceci détermine complètement  $F_{\mathbf{R}}$ . Il n'est pas difficile de voir que  $F_{\mathbf{R}_A}$  et  $F_{\mathbf{R}_B}$  sont des plongements puisque  $F_A$  et  $F_B$  sont des isotopies. Ainsi  $F_{\mathbf{R}}$  est un morphisme réalisant une homotopie forte entre

$$j_0 h_0 \text{ et } j_1 h_1: (f_1, f'_1; g_1) \rightarrow (f_2, f'_2; g_2) \times 1_{\mathbf{R}}.$$

Donc

$$(j_0)_*(h_0)_* = (j_1)_*(h_1)_*$$

d'où

$$(j_0)_*(h_0)_* = (j_0)_*(h_1)_*,$$

ce qui conduit, par la commutativité de (1), à  $(h_0)_{*r} = (h_1)_{*r}$ .

v) *L'homologie sectionnelle réduite vérifie la propriété d'excision.* Etablissons en premier lieu l'invariance par subdivision barycentrique de cette homologie. Commençons par le cas absolu.

Soit  $f: X \rightarrow A$  un diagramme de  $\mathcal{D}$  et notons  $\chi: C(f) \rightarrow C(f)$  l'opérateur de subdivision barycentrique dont la définition explicite suit un peu plus bas. On va construire une homotopie

$$\Lambda: C(f) \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}})$$

entre  $j_0 \chi, j_0: C(f) \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}})$  en adaptant le modèle de la preuve classique.

Soit  $L(\Delta_q)$  le complexe de chaînes défini au paragraphe 2, iv. a). Dé-

signons par  $b^\lambda \in \Delta_q$  le barycentre de l'image d'un simplexe  $\lambda$  de  $L(\Delta_q)$ , et par

$$C_x: L_l(\Delta_q) \rightarrow L_{l+1}(\Delta_q)$$

l'homomorphisme associant à toute chaîne  $c$  de  $L_l(\Delta_q)$  le cône linéaire de sommet  $x \in \Delta_q$  et de base  $c$ . L'opérateur de subdivision barycentrique

$$\chi^L: L(\Delta_q) \rightarrow L(\Delta_q)$$

est alors défini inductivement sur un simplexe  $\lambda$  de  $L_l(\Delta_q)$  par:

$$\text{i) } \chi_0^L = 1_{L_0(\Delta_q)}; \quad \text{ii) } \chi_l^L(\lambda) = C_{b^\lambda}(\chi_{l-1}^L \partial \lambda).$$

Désignant par

$$j_0^L: \Delta_q \rightarrow \Delta_q \times \mathbf{R}$$

l'identification de  $\Delta_q$  à  $\Delta_q \times \{0\}$ , les homomorphismes

$$\Lambda_l^L: L_l(\Delta_q) \rightarrow L_{l+1}(\Delta_q \times \mathbf{R})$$

définis par:

$$\text{i) } \Lambda_0^L = 0; \quad \text{ii) } \Lambda_l^L(\lambda) = C_{(b^\lambda, 1)}((j_0^L \chi^L - j_0^L - \Lambda_{l-1}^L \partial)\lambda),$$

réalisent une homotopie  $\Lambda^L$  entre  $j_0^L \chi^L$  et  $j_0^L$ .

Le morphisme  $\chi: C(f) \rightarrow C(f)$  et l'homotopie

$$\Lambda: C(f) \rightarrow C(f \times 1_{\mathbf{R}})$$

s'expriment alors sur  $(\sigma, \gamma) \in S_q(f)$  par

$$\chi_q(\sigma, \gamma) = (\sigma, \gamma)(\chi_q^L(1_{\Delta_q}))$$

$$\Lambda_q(\sigma, \gamma) = (\sigma \times 1_{\mathbf{R}}, \gamma \times 1_{\mathbf{R}})(\Lambda_q^L(1_{\Delta_q})).$$

Ainsi, quel que soit le simplexe  $(\sigma, \gamma) \in S_q(f)$ , il vient:

$$j_0(\sigma, \gamma) = (\sigma \times 1_{\mathbf{R}}, \gamma \times 1_{\mathbf{R}})(j_0^L(1_{\Delta_q})),$$

$$j_0 \chi(\sigma, \gamma) = (\sigma \times 1_{\mathbf{R}}, \gamma \times 1_{\mathbf{R}})(j_0^L \chi^L(1_{\Delta_q})),$$

$$\Lambda(\sigma, \gamma) = (\sigma \times 1_{\mathbf{R}}, \gamma \times 1_{\mathbf{R}})(\Lambda^L(1_{\Delta_q})),$$

et l'égalité

$$\partial \Lambda = j_0 \chi - j_0 - \Lambda \partial$$

est une conséquence immédiate de l'égalité analogue dans  $L(\Delta_q)$ .  
 Etendons ces définitions au cas relatif. Soit  $(f, f'; g)$  un diagramme de  $\mathcal{D}$  et notons  $\chi_f, \chi_{f'}, \Lambda_f, \Lambda_{f'}$  les morphismes et homotopies sur  $C(f)$  et  $C(f')$ . On définit

$$\chi: C(f, f'; g) \rightarrow C(f, f'; g) \text{ et}$$

$$\Lambda: C(f, f'; g) \rightarrow C((f, f'; g) \times 1_{\mathbf{R}})$$

par

$$\begin{aligned} \chi(x \oplus y) &= \chi_f(x) \oplus \chi_{f'}(y) \\ \Lambda(x \oplus y) &= \Lambda_f(x) \oplus (-\Lambda_{f'}(y)). \end{aligned}$$

La preuve donnant  $\Lambda$  comme homotopie entre  $j_0\chi$  et  $j_0$  est en tous points parallèle à celle établie à la fin du paragraphe 2, iv. a). De cette homotopie résulte que

$$j_{0*}\chi_*, j_{0*}: H_*(f, f'; g) \rightarrow H_*((f, f'); g) \times 1_{\mathbf{R}}$$

sont identiques.

Définissons enfin

$$\chi_{*r}: H_{*r}(f, f'; g) \rightarrow H_{*r}(f, f'; g)$$

de la façon habituelle: le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_*(f, f'; g) & \xrightarrow{\chi_*} & H_*(f, f'; g) \\ \downarrow j_{0*} & & \downarrow j_{0*} \\ H_*((f, f'); g) \times 1_{\mathbf{R}} & \xrightarrow{\chi_*} & H_*((f, f'); g) \times 1_{\mathbf{R}} \end{array}$$

permet de définir  $\chi_{*r}$  comme restriction du morphisme  $\chi_*$  du bas à  $H_{*r}(f, f'; g)$ . L'égalité  $(j_0)_*\chi_* = (j_0)_*$  entraîne le premier résultat cherché:  $\chi_{*r} = 1$ .

Soient  $(f_U, f'_U)$  une excision de  $(f, f')$  et  $j: (f_U, f'_U) \rightarrow (f, f')$  l'inclusion. Nous devons montrer que le morphisme  $j_{*r}$  du diagramme commutatif suivant est un isomorphisme:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} H_*(f_U, f'_U) & \xrightarrow{j_*} & H_*(f, f') \\ \downarrow j_{0*} & \searrow j_{0*} & \downarrow j_{0*} \\ H_*(f_U, f'_U) \times 1_{\mathbf{R}} & \xrightarrow{(j \times 1_{\mathbf{R}})_*} & H_*((f, f')) \times 1_{\mathbf{R}} \\ \downarrow \hookrightarrow & & \downarrow \hookrightarrow \\ H_{*r}(f_U, f'_U) & \xrightarrow{j_{*r}} & H_{*r}(f, f') \end{array}$$

On considérera ces homologies, selon une remarque du premier paragraphe, comme homologies de quotients de complexes:

$$H_*(f_U, f'_U) = H_*(C(f_U)/C(f'_U)), \dots$$

Or, (3) étant commutatif, il suffit, pour que  $j_{*r}$  soit surjectif, que le composé

$$(j_0)_*j_*: H_*(f_U, f'_U) \rightarrow H_{*r}(f, f')$$



le soit également. Soient  $g \in H_{qr}(f, f')$  quelconque et  $z \in Z_q(f, f')$  tel que  $(j_0)_*([z]) = g$ . Notons  $\hat{z} \in C_q(f)$  un représentant quelconque de  $z$ , et soit enfin  $(\sigma, \gamma)$  un simplexe de  $\hat{z}$ . L'ensemble  $\{X - \bar{U}, \text{int } Y\}$  formant un recouvrement ouvert de  $X$ ,  $\{\gamma^{-1}(X - \bar{U}), \gamma^{-1}(\text{int } Y)\}$  l'est également de  $\Delta_q$ . Désignant par  $\delta$  un nombre de Lebesgue de ce dernier recouvrement, on peut choisir  $\mu(\sigma, \gamma) \in \mathbf{N}$  tel que l'image de chaque simplexe de la chaîne  $\chi^{\mu(\sigma, \gamma)}(1_{\Delta_q})$  soit incluse dans une boule de rayon  $\delta$ . Ainsi, quel que soit

$$(\sigma', \gamma') \in \chi^{\mu(\sigma, \gamma)}(\sigma, \gamma),$$

on a  $\text{Im } \gamma' \subset X - \bar{U}$  ou  $\text{Im } \gamma' \subset \text{int } Y$ . Posons

$$\mu = \max_{(\sigma, \gamma) \in \hat{z}} \mu(\sigma, \gamma).$$

Alors  $\chi^\mu(z) \in Z_q(f, f')$  et il existe un représentant  $\hat{z}_\mu \in C_q(f)$  de  $\chi^\mu(z)$  tel que

$$\text{Im } \gamma' \subset X - \bar{U}$$

quel que soit  $(\sigma', \gamma') \in \hat{z}_\mu$ . On en déduit qu'il existe  $z_U \in Z_q(f_U, f'_U)$  tel que  $j(z_U) = \chi^\mu(z)$ , et il vient:

$$j_{0*}j_*([z_U]) = j_{0*}([jz_U]) = j_{0*}\chi^\mu_*([z]) = j_{0*}([z]) = g$$

car

$$(j_0)_*\chi^\mu_* = (j_0)_*.$$

Donc  $(j_0)_*j_*$  est surjectif, et  $j_{*r}$  l'est également.

Injectivité de  $j_{*r}$ . Soit  $g \in H_{qr}(f_U, f'_U)$  tel que  $j_{*r}(g) = 0$ . Notons  $z$  un élément de  $Z_q(f_U, f'_U)$  tel que

$$(j_0)_*([z]) = g;$$

le fait que  $j_{*r}(g)$  soit nul signifie que

$$(j_0)_*j_*([z]) = 0,$$

c'est-à-dire que  $[j_0j(z)] = 0$ . Il existe donc

$$c \in C_{q+1}(f \times \mathbf{1}_R) / C_{q+1}(f' \times \mathbf{1}_R)$$

tel que  $\partial c = j_0j(z)$ . Puisque

$$\{(X - \bar{U}) \times \mathbf{R}, \text{int } Y \times \mathbf{R}\}$$

est un recouvrement ouvert de  $X \times \mathbf{R}$ , il existe  $\mu \in \mathbf{N}$  tel que

$$\chi^\mu(c) = j \times 1_{\mathbf{R}}(c_U),$$

où

$$c_U \in C_{q+1}(f_U \times 1_{\mathbf{R}})/C_{q+1}(f'_U \times 1_{\mathbf{R}}).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} j \times 1_{\mathbf{R}}(\partial c_U) &= \partial(j \times 1_{\mathbf{R}})(c_U) = \partial\chi^\mu(c) \\ &= \chi^\mu j_0 j(z) = j_0 j \chi^\mu(z) = j \times 1_{\mathbf{R}}(j_0 \chi^\mu(z)). \end{aligned}$$

Enfin, le morphisme de complexes de chaînes  $j \times 1_{\mathbf{R}}$  est injectif, et l'égalité

$$j \times 1_{\mathbf{R}}(\partial c_U) = j \times 1_{\mathbf{R}}(j_0 \chi^\mu(z))$$

équivaut à

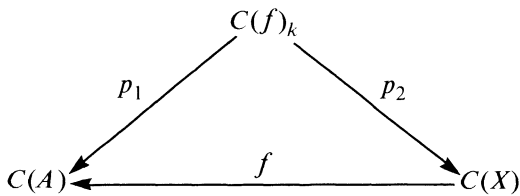
$$\partial c_U = j_0 \chi^\mu(z).$$

Donc

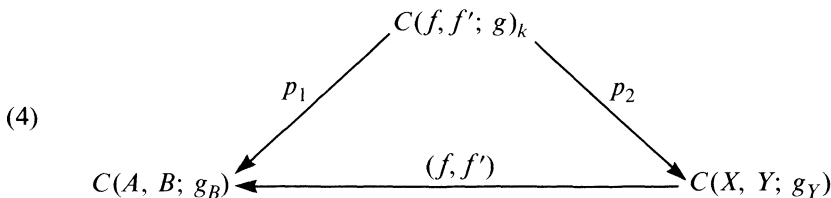
$$(j_0)_* \chi^\mu_*([z]) = 0,$$

ce qui exprime que  $(j_0)_*([z]) = g = 0$ .

**4. Degré sectionnel.** Soit  $f: X \rightarrow A$  un  $k$ -diagramme,  $0 \leq k \leq \infty$ . On définit les morphismes  $p_1$  et  $p_2$  du diagramme commutatif suivant

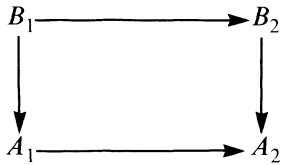


par  $p_1(\sigma, \gamma) = \sigma$  et  $p_2(\sigma, \gamma) = \gamma$ . Pour tout  $k$ -diagramme  $(f, f'; g)$ , on a alors le diagramme commutatif



où  $C(A, B; g_B)$  et  $C(X, Y; g_Y)$  sont les “mapping cone” des applications  $g_B$  et  $g_Y$  respectivement, notés  $C(\hat{g}_B)$  et  $C(\hat{g}_Y)$  par Eilenberg et Steenrod ([2], p. 155), et où les morphismes sont définis de la façon évidente. Le diagramme (4) induit alors des diagrammes correspondants en homologies sectionnelles non-réduite et réduite.

Il est clair que  $p_1$  et  $p_2$  se comportent de manière fonctorielle. On peut décrire  $p_1$  (et similairement  $p_2$ ) comme un foncteur de  $\mathcal{D}_k$  dans le catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les applications continues  $g_B: B \rightarrow A$  d'un espace topologique dans un autre, et les morphismes les diagrammes commutatifs



d'applications continues. Les morphismes  $(p_1)_*$  et  $(p_1)_{*r}$  induits par le diagramme (4) sont alors des transformations naturelles des foncteurs

$$H_*, H_{*r}: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{C}$$

dans le foncteur composé

$$H_*p_1: \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}.$$

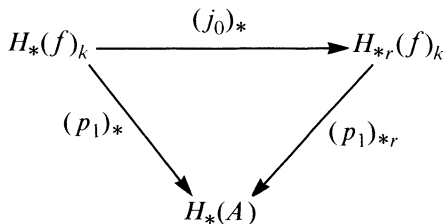
Soit  $f: X \rightarrow A$  un  $k$ -diagramme où  $A$  est une variété de classe  $C^k$  orientée, paracompacte et connexe de dimension  $n$ . Le degré sectionnel  $k$ -fois différentiable de  $f$  ([8]) est l'ordre du groupe quotient

$$H_n(A)/\text{Im}(p_1)_n \simeq \mathbf{Z}/\text{Im}(p_1)_n$$

moins 1, où

$$(p_1)_*: H_*(f)_k \rightarrow H_*(A)$$

est le morphisme défini ci-dessus. On le note  $\text{deg}(f)_k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . Remarquons que l'application  $(j_0)_*$  du diagramme suivant étant surjective



le degré sectionnel est le même que l'on utilise  $(p_1)_n$  ou  $(p_1)_{nr}$  pour le définir. Enfin, si  $0 \leq k' \leq k$ ,  $\text{deg}(f)_{k'}$  est bien défini puisque  $f$  est à fortiori un  $k'$ -diagramme, et l'on a:

PROPOSITION. Si  $\text{deg}(f)_{k'} \neq 0$ , il n'existe pas de section de classe  $C^{k'}$  de  $f$ .

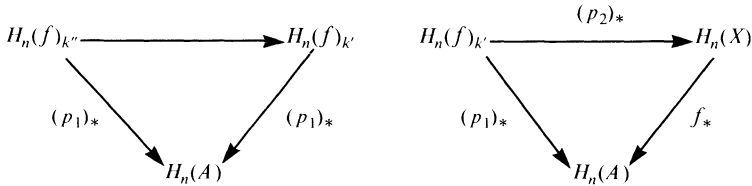
PROPOSITION. Soient  $k'$  et  $k''$  tels que  $0 \leq k' \leq k'' \leq k$ . Alors

$$\text{deg}(f)_{k''} \cong \text{deg}(f)_{k'} \text{ et } \text{deg}(f)_{k'} \cong \text{deg}_c f,$$

où  $\text{deg}_c f$  est le degré classique:

$$\left| H_n(A) / \text{Im}(H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(A)) \right| - 1.$$

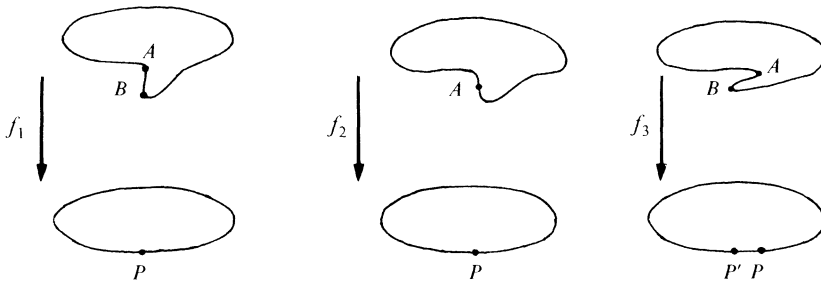
La démonstration de la première proposition est immédiate. Pour la seconde, il suffit de remarquer que les deux diagrammes suivants



sont commutatifs. Les première et seconde inégalités se déduisent des premier et second diagrammes.

Le degré sectionnel permet de tenir compte de la topologie des singularités d'une application donnée. Il fournit des obstructions fines pour l'existence de sections (prolongeant une section donnée) d'une application continue ou différentiable, problème pour lequel le degré classique est inapproprié. Les quelques exemples très simples qui suivent peuvent en donner un aperçu.

a) Soient  $f_1, f_2, f_3: S^1 \rightarrow S^1$  les projections de classe  $C^\infty$  suivantes:



où  $f_1$  applique le segment  $\overline{AB}$  sur  $P$ ,  $f_2$  le point critique  $A$  sur  $P$ , et  $f_3$  les points critiques  $A$  et  $B$  sur  $P$  et  $P'$  respectivement. Le degré classique, nul dans les trois cas, ne donne aucune obstruction à une section. Par ailleurs,  $\text{deg}(f_1)_k = \infty$  pour tout  $0 \leq k \leq \infty$ , indiquant qu'il n'existe aucune section continue ou différentiable de  $f_1$ ;

$$\deg(f_2)_0 = \deg(f_3)_0 = 0$$

et il existe effectivement une section continue de  $f_2$  (mais non de  $f_3$ ), alors que

$$\deg(f_2)_k = \deg(f_3)_k = \infty \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq \infty$$

montrant qu'il n'existe aucune section différentiable de  $f_2$  ou  $f_3$ .

b) Le degré sectionnel de l'application  $f$  considérée à l'exemple c), paragraphe 1, est infini car  $H_{2r}(f)_k = 0$ , alors que le degré classique est nul.

c) La définition du degré sectionnel peut être étendue au cas relatif. C'est le cas notamment lorsqu'on considère les sections globales d'une application  $f: X \rightarrow A$  où  $A$  est une variété à bord, ou lorsque l'on cherche les sections globales d'une application  $f: X \rightarrow A$  prolongeant une section donnée sur une sous-variété de  $A$  de codimension 1. Ainsi, dans l'exemple b), paragraphe 1,

$$\begin{aligned} & \deg(f, f|_{X_0})_k \\ &= \left| H_1(A, A_0) / \text{Im} \left( H_{1r}(f, f|_{X_0})_k \xrightarrow{P_1^*} H_1(A, A_0) \right) \right| - 1 = \infty \end{aligned}$$

quels que soient  $m$  et  $k \geq 1$ , indiquant qu'il n'existe pas de section différentiable globale de  $f$ .

#### REFERENCES

1. J. M. Boardman, *Singularities of differentiable maps*, Publications Mathématiques de l'IHES 33 (1967), 21-57.
2. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology* (Princeton University Press, 1952).
3. M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities* (Springer-Verlag, 1973).
4. F. Lalonde, *Homologie de Shih et applications au problème de Cauchy global*, Thèse de PhD., Université de Montréal, 1983.
5. ——— *Homologie de plongements dans les variétés différentiables*, C.R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), 987-990.
6. ——— *Homologie de Shih d'une submersion*, C.R. Acad. Sc. Paris 299 (1984), 1025-1028.
7. ——— *Homologie de Shih d'une submersion (Homologies non-singulières des variétés feuilletées)*, A paraître aux Mémoires Soc. Math. France (tiré d'une thèse d'Etat, Orsay, 1985).
8. W. Shih, *Un invariant algébrique associé à une application continue et le problème de Cauchy global*, C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 333-336.

*Université de Québec à Montréal,  
Montréal, Québec*