Can. J. Math., Vol. XXV, No. 6, 1973, pp. 1295–1312

SUR DES CLASSES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LE DISQUE ET INDÉFINIMENT DÉRIVABLES À LA FRONTIÈRE

A.-M. CHOLLET

Introduction. On note D le disque unité ouvert du plan complexe, $\bar{D}$ le disque fermé et $\mathbf{T}$ l'ensemble des réels modulo 2π.

Soit $(N_n)_{n \geqq 0}$ une suite de réels positifs; on désigne par $\{N_n\}^+$ la classe des fonctions f, analytiques dans D, continues ainsi que toutes leurs dérivées dans $\bar{D}$, qui vérifient la propriété suivante: il existe des constantes A_f et M_f telles que pour tout z dans $\bar{D}$ et tout entier n positif ou nul $|f^{(n)}(z)| \leqq M_f A_f^n N_n$.

On s'intéresse à deux problèmes, concernant le comportement de ces fonctions à la frontière:

Si la classe $\{N_n\}^+$ est non quasi-analytique, c'est-à-dire s'il existe une fonction de la classe, non identiquement nulle, qui s'annule en un point ainsi que toutes ses dérivées, existe-t-il une fonction de la classe, non identiquement nulle, qui s'annule sur un ensemble infini ainsi que toutes ses dérivées?

Existe-t-il dans une classe $\{N_n\}^+$ non quasi-analytique des fonctions f admettant un facteur singulier non constant, c'est-à-dire telle que dans la dècomposition canonique $f = BSF$, S diffère d'une constante?

Dans une première partie, on précise les hypothèses faites sur la suite $(N_n)_{n \geqq 0}$ et on démontre que dans le cadre considéré, la partie extérieure d'une fonction de $\{N_n\}^+$ appartient à $\{N_n\}^+$.

La deuxième et la troisième parties sont consacrées à la démonstration du résultat suivant (Théorèmes 1 et 2):

Si la classe $\{n!M_n\}^+$ est non-quasi analytique, il existe un sous-ensemble E de T, parfait de mesure nulle ayant la propriété suivante:

(a) il existe une fonction f, non identiquement nulle, dans la classe $\{M_{2n}\}^+$ s'annulant sur E, ainsi, évidemment, que toutes ses dérivées;

(b) toute mesure singulière positive, dont le support est contenu dans E, est la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de $\{M_{2n}\}^+$.

Dans le cas des classes de Gevrey $\{n^{pn}\}^+$, on déduira de ce résultat que la non quasi-analyticité de la classe équivaut à l'existence de fonctions dans la classe admettant des facteurs singuliers. Ceci complète une remarque de Korenblyum [**5**]. De plus, si on note $(l_\nu)_{\nu \geqq 1}$ les longueurs des intervalles contigus à E, sous-ensemble fermé de mesure nulle de $\mathbf{T}$, on montrera que la condition

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu^{1-\alpha} < \infty, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

Reçu le 4 août, 1972 et sous forme revisée, le 17 octobre, 1972.

est suffisante pour que toute mesure positive de support contenu dans E soit la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de $\{n^{2n/\alpha}\}^+$.

Première partie

1. On note
D le disque ouvert $\{z \in \mathbf{C}:|z| < 1\}$
$\bar{D}$ le disque fermé $\{z \in \mathbf{C}:|z| \leqq 1\}$
$\mathbf{T}$ l'ensemble des réels modulo 2π que l'on identifiera librement tantôt à la frontière de $\bar{D}$, tantôt à un intervalle réel $[a, a + 2\pi[$.
$A^\infty(D)$ la classe des fonctions analytiques dans D dont toutes les dérivées sont continues dans $\bar{D}$.

Soit (N_n) une suite de réels positifs. *On dèsigne par $\{N_n\}^+$ la classe des fonctions f de $A^\infty(D)$ qui ont la propriété suivante: il existe des constantes M_f et A_f telles que pour tout z dans $\bar{D}$ et tout entier n positif ou nul $|f^{(n)}(z)| \leqq M_f A_f^n N_n$.*

Pour une fonction de $\{N_n\}^+$, on convient de noter $\tilde{f}(\theta) = f(e^{i\theta})$. On vérifie, par exemple par l'intermédiaire des développements de Fourier et des normes quadratiques, que, pour une constante absolue C convenable, on a:

$$\sup_\theta |\tilde{f}^{(n-1)}(\theta)| \leqq Ce^n \sup_z |f^{(n)}(z)|$$

et

$$\sup_z |f^{(n-1)}(z)| \leqq C \sup_\theta |\tilde{f}^{(n)}(\theta)|.$$

On note $C_{\mathbf{T}}(N_n)$ la classe des fonctions F indéfiniment dérivables sur $\mathbf{T}$ qui vérifient la propriété suivante: il existe des constantes M_F et A_F telles que pour tout θ de $\mathbf{T}$ et tout entier n positif ou nul $|F^{(n)}(\theta)| \leqq M_F A_F^n N_n$.

Sous l'hypothèse de stabilité de la classe $C_{\mathbf{T}}(N_n)$, précisée plus loin, $\{N_n\}^+$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $C_{\mathbf{T}}(N_n)$ dont les coefficients de Fourier sur les entiers négatifs sont nuls.

On dit que la classe $C_{\mathbf{T}}(N_n)$ est *non quasi-analytique* s'il existe une fonction dans la classe non identiquement nulle qui s'annule en un point de $\mathbf{T}$ ainsi que toutes ses dérivées.

On dit que la classe $\{N_n\}^+$ est non quasi-analytique s'il existe une fonction dans la classe, non identiquement nulle, qui s'annule en un point de $\bar{D}$ ainsi que toutes ses dérivées.

On sait que *la classe $\{N_n\}^+$ est non quasi-analytique si et seulement si la classe $C_{\mathbf{T}}(\sqrt{N_n})$ est non quasi-analytique* [**3**].

Dans tout ce qui suit, on fera sur la classe $\{N_n\}^+$ les hypothèses suivantes:

(i) La suite $(N_n)_{n \geqq 0}$ est logarithmiquement convexe et $N_0 = 1$.

(ii) La classe $C(N_n)$ est stable par dérivation, c'est-à-dire, il existe une constante K telle que

$$\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)^{1/n} \leqq K \quad \text{pour tout } n \text{ positif.} \tag{1.1}$$

(iii) La classe $\{N_n\}^+$ est non quasi-analytique, c'est-à-dire, les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées pour tout n positif:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\right)^{1/2} < \infty \tag{1.2}$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{N_n}\right)^{1/2n} < \infty. \tag{1.3}$$

Remarque. Les suites n^{pn}, $n^{2n}(\log n)^{pn}$, $p > 2$ vérifient ces hypothèses.

On utilisera donc dans la suite les inégalités suivantes que l'on supposera vérifiées pour tout entier n positif

$$\left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\right)^{1/2} \leqq \frac{1}{n+1}; \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{(N_n)^{1/2n}} \leqq \frac{1}{n}; \tag{1.5}$$

$$N_n \geqq n^{2n}. \tag{1.6}$$

2. Proposition 1. *La partie extérieure d'une fonction de* $\{N_n\}^+$ *appartient à* $\{N_n\}^+$.

Toute fonction f de $A^\infty(D)$ s'écrit de façon unique comme le produit d'une fonction intérieure I et d'une fonction extérieure F. Si f appartient à $A^\infty(D)$, F appartient à $A^\infty(D)$ [**6**]. On adapte la démonstration de cette dernière propriété en usant de techniques classiques [**4**].

Posons

$$F(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^\infty c_n e^{in\theta}. \tag{2.1}$$

On a presque partout sur ∂D, $F(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\overline{I(e^{i\theta})}$. De là, si $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ et $I(z) = \sum_0^\infty b_j z^j$

$$c_n = \sum_{k=n}^\infty a_k \overline{b_{k-n}}.$$

Soit, puisque I est bornée par 1, $|b_j| < 1$ pour tout j et

$$|c_n| \leqq \sum_{k=n}^\infty |a_k| \tag{2.2}$$

f appartient à $\{N_n\}^+$, on a donc $|\tilde{f}^{(n)}(\theta)| \leqq M\, A^n N_n$; si on note

$$\tau(r) = \sup_p \frac{r^p}{N_p} \tag{2.3}$$

on a pour tout k supérieur ou égal à 1 $|a_k| \leqq M/\tau(k/A)$.

On supposera dans la suite $M = 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

On a donc quels que soient les entiers k et p

$$|a_k| \leqq \frac{N_{p+2}A^{p+2}}{k^{p+2}}$$

et d'après (2.2)

$$|c_n| \leqq \frac{A^{p+2}N_{p+2}}{n^p} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

D'après l'hypothèse (ii) sur la suite N_n, il existe une constante C ne dépendant que de la suite telle que pour tout p

$$N_{p+2} \leqq C^p N_p.$$

De là quels que soient le entiers n et p

$$|c_n| \leqq \lambda A^{p+2}C^p \frac{N_p}{n^p} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Donc

(2.4)
$$|c_n| \leqq \lambda A^2 \frac{1}{\tau(n/CA)}.$$

Si les coefficients de Fourier de F satisfont une telle inégalité F appartient à $\{N_n\}^+$. En effet, d'après (2.1) et (2.4)

$$|F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|k^n \leqq \lambda A^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k^n}{\tau(k/CA)}.$$

Mais on a

$$\frac{1}{\tau(k/CA)} \leqq \frac{A^{n+2}C^{n+2}}{k^{n+2}} N_{n+2}.$$

De là, en utilisant à nouveau l'hypothèse (ii) sur N_n,

(2.5)
$$|F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq B\, D^n\, N_n$$

avec $B = A^2C^2\lambda^2$ et $D = AC^2$.

F vérifie (2.5), appartient à $A^{\infty}(D)$ donc à $\{N_n\}^+$.

3. On suppose dans tout ce qui suit

(3.1)
$$N_n = n!M_n$$

où M_n est une suite logarithmiquément convexe.

On déduit de (1.4), (1.5), (1.6) et (3.1) que, pour tout entier n positif, on a

(3.2)
$$\frac{M_n}{M_{n+1}} \leqq \frac{1}{n+1};$$

(3.3)
$$\frac{1}{(M_n)^{1/n}} \leqq \frac{1}{n};$$

(3.4)
$$M_n \geqq n^n.$$

La classe $\{N_n\}^+$ est non quasi-analytique, il existe donc une fonction f dans la classe, non identiquement nulle, s'annulant en un point de ∂D, frontière de D, ainsi que toutes ses dérivées.

PROPOSITION 2. *Soit f une fonction de $\{n!M_n\}^+$, non identiquement nulle, telle que pour tout entier n positif ou nul, $f^{(n)}(e^{ia}) = 0$ et $\sup_{z\in\bar{D}} |f^{(n)}(z)| \leqq A^n n!M_n$. Alors, pour tout entier n positif ou nul, si $|\theta - a| \leqq (1/2A)M_n/M_{n+1}$, on a*

$$|f^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{|\theta - a|^n T(1/2A|\theta - a|)}$$

où on note $T(r) = \sup_k r^k/M_k$.

Etant donné n, pour tout entier p positif ou nul, on a

$$|f^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{|\theta - a|^p}{p!} A^{n+p}(n+p)!M_{n+p}$$

ou encore

$$|f^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{|\theta - a|^{p+n}}{|\theta - a|^n} \frac{A^{n+p}(n+p)!M_{n+p}}{p!}$$

$(n+p)! \leqq n!\, p!\, 2^{n+p}$ pour tout couple d'entiers n et p

$$|f^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{|\theta - a|^n} \inf_{p\geqq 0} (2A)^{n+p}|\theta - a|^{n+p}M_{n+p}.$$

Soit $u_p = (2A)^{n+p}|\theta - a|^{n+p}M_{n+p}$

$$\frac{u_1}{u_0} = 2A|\theta - a| \frac{M_{n+1}}{M_n}.$$

Si $u_1/u_0 \leqq 1$, c'est-à-dire si $|\theta - a| \leqq (1/2A)M_n/M_{n+1}$

$$\inf_{p\geqq 0} (2A)^{n+p}|\theta - a|^{n+p}M_{n+p} = \inf_{k\geqq 0} (2A)^k|\theta - a|^k M_k.$$

Si donc $|\theta - a| \leqq (1/2A)M_n/M_{n+1}$

$$|f^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{|\theta - a|^n} \frac{1}{T(1/2A|\theta - a|)}.$$

PROPOSITION 3. *Dans toute classe $\{n!M_n\}^+$ non quasi-analytique, il existe une fonction extérieure F et il existe une constante D telles que*

(a) *Pour tout entier n positif ou nul on ait*

$$\sup_{\theta\in\mathbf{T}} |F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq D^n n!M_n \tag{3.5}$$

$$F^{(n)}(1) = 0. \tag{3.6}$$

(b) *Pour tout entier n positif ou nul si $|\theta| \leqq (1/2D)M_n/M_{n+1}$ on ait*

$$|F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{|\theta|^n T(1/2D|\theta|)}. \tag{3.7}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

La Proposition 3 se déduit des propositions 1 et 2. Puisque la classe $\{n!M_n\}^+$ est non quasi-analytique il existe une fonction f dans la classe non identiquement nulle s'annulant au point 1 de ∂D ainsi que toutes ses dérivées, et il existe une constante A telles que l'on ait $|f^{(n)}(z)| \leqq A^n n!M_n$; alors, F étant la partie extérieure de f, $|F^{(n)}(z)| \leqq BD^n n!M_n$ d'après (2.5).
On a de plus $F^{(n)}(1) = 0$ pour tout n. En effet, $f(z)(z-1)^{-n} = I(z)F(z)(z-1)^{-n}$ et donc

$$(3.8) \qquad |f(e^{i\theta})||e^{i\theta} - 1|^{-n} = |F(e^{i\theta})||e^{i\theta} - 1|^{-n}.$$

Or pour une fonction f de $A^\infty(D)$, les propositions suivantes sont équivalentes:
(a) pour tout n, $f^{(n)}(1) = 0$.
(b) pour tout n, $f(e^{i\theta})(e^{i\theta} - 1)^{-n}$ tend vers 0 lorsque θ tend vers 0.
D'après (3.8), F s'annule donc ainsi que toutes ses dérivées au point 1. De là, quitte à diviser $F(e^{i\theta})$ par B, on a la Proposition 3.

Deuxième partie

On se pose ici le problème suivant:
Etant donnée une classe $\{N_n\}^+$ non quasi-analytique, existe-t-il dans la classe une fonction, non identiquement nulle, qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur un ensemble infini?
La réponse est affirmative pour les classes $\{n^{pn}\}^+$, $p > 2$ [**1**].
On retrouve ici ce résultat et on obtient la même conclusion pour les classes $n^{2n}(\log n)^{pn}$, $n^{2n}(\log n)^{4n}(\log\log n)^{pn}$, $p > 4$.

THÉORÈME 1. *Si la classe $\{n!M_n\}^+$ est non quasi-analytique, il existe un sous-ensemble E parfait de mesure nulle de* **T** *sur lequel s'annule une fonction G de $\{M_{2n}\}^+$ non identiquement nulle. La fonction G vérifie de plus la propriété suivante (P): il existe une constante K telle que pour tout entier n positif ou nul, si $d(\theta, E) \leqq M_n/M_{n+1}$, on ait*

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{K^n}{d(\theta, E)^{2n} T[1/d(\theta, E)]}.$$

où $d(\theta, E)$ désigne la distance de θ à E et $T(r)$ est défini dans la Proposition 2.

Démonstration du Théorème 1. Nous allons d'abord, quitte à changer M_n en $(4D)^n M_n$, supposer que dans la Proposition 3 on a $D = 1/4$. Il existe donc une fonction extérieure F de $\{n!M_n\}^+$ vérifiant:
(a) Pour tout entier n positif ou nul

$$(4.1) \qquad \sup_{\theta \in T} |F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq (\tfrac{1}{4})^n n!M_n$$

$$(4.2) \qquad F^{(n)}(1) = 0.$$

(b) Pour tout entier n positif ou nul

$$(4.3) \qquad \text{si } |\theta| \leqq \frac{M_n}{M_{n+1}} \text{ on a } |F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{n!}{|\theta|^n T(1/|\theta|)}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

Notons $F = \exp \varphi$, on a $|F(z)| = \exp [\operatorname{Re} \varphi(z)] \leqq 1$ d'après (4.1).
On sait de plus que

$$\int_0^{2\pi} \log |F(e^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta}) d\theta > -\infty .$$

La fonction Re φ est négative, intégrable et tend vers $-\infty$ lorsque θ tend vers 0; il existe donc une suite $\{\epsilon_\nu\}_{\nu \geqq 1}$ tendant vers 0 en décroissant telle que

$$\text{(4.4)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\epsilon_\nu} [\operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta}) + \operatorname{Re} \varphi(e^{i(\theta-\epsilon_\nu)})] d\theta > -\infty .$$

On peut remarquer que ceci implique

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu \log T\left(\frac{1}{\epsilon_\nu}\right) < \infty .$$

On a en effet pour tout θ de $\mathbf{T}$ et pour tout n

$$|F(e^{i\theta})| \leqq M_n |\theta^n|$$

soit

$$|F(e^{i\theta})| \leqq 1/T(1/|\theta|).$$

D'où (4.5) $\operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta}) \leqq -\log T(1/|\theta|)$.
(4.4) et (4.5) impliquent

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\epsilon_\nu} \log T\left(\frac{1}{|\theta|}\right) d\theta < \infty .$$

$T(r)$ est une fonction croissante de r. On a donc

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu \log T\left(\frac{1}{\epsilon_\nu}\right) < \infty .$$

Lorsque ϵ_ν tend vers 0, $T(1/\epsilon_\nu)$ tend vers $+\infty$ et l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu < \infty .$$

Quitte à modifier les premiers termes de la série, on peut supposer $\sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon_\nu = 2\pi$. Il existe donc un ensemble E fermé de mesure nulle de T tel que si on note $T \backslash E = \bigcup_1^{\infty}]a_\nu, b_\nu[$, on ait $b_\nu - a_\nu = \epsilon_\nu$.
Pour un bon choix des a_ν, E est un ensemble parfait.

En effet, on peut, on peut enumérer les rationnels de $[0, 1]$ sous la forme $r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ et si on pose

$$a_\nu = \sum_{\mu; r_\mu < r_\nu} \epsilon_\mu \quad \text{et} \quad b_\nu = a_\nu + \epsilon_\nu$$

les intervalles $]a_\nu, b_\nu[$ sont les intervalles contigus à un parfait de mesure nulle.

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

A chaque intervalle $]a_\nu, b_\nu[$ on associe la fonction extérieure défine par

$$F_\nu(z) = F(ze^{-ia_\nu}) \cdot F(ze^{-ib_\nu})$$

où F vérifie (4.1), (4.2), (4.3).

La suite $(n!M_n)$ est logarithmiquement convexe, $M_0 = 1$, on a donc

(4.6) $\quad |F_\nu^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq (1/2)^n\, n!M_n$ pour tout θ de T et tout entier n

(4.7) $\quad F_\nu^{(n)}(e^{ia_\nu}) = F_\nu^{(n)}(e^{ib_\nu}) = 0$ pour tout n.

Posons $F_\nu(z) = \exp \varphi_\nu(z)$.

On a donc

$$\varphi_\nu(e^{ix}) = \varphi(e^{i(x-a_\nu)}) + \varphi(e^{i(x-b_\nu)}). \tag{4.8}$$

Soit u la fonction, négative, définie presque partout sur ∂D par:

(4.9) $\quad u(e^{ix}) = \operatorname{Re} \varphi_\nu(e^{ix})$ si x appartient à $]a_\nu, b_\nu[$.

On a d'après (4.4)

$$\int_0^{2\pi} u(e^{ix})dx > -\infty.$$

En effet

$$\int_0^{2\pi} u(e^{ix})dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_\nu}^{b_\nu} [\operatorname{Re} \varphi(e^{i(x-a_\nu)}) + \operatorname{Re} \varphi(e^{i(x-b_\nu)})]dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\epsilon_\nu} [\operatorname{Re} \varphi(e^{i\xi}) + \operatorname{Re} \varphi(e^{i(\xi-\epsilon_\nu)})]d\xi > -\infty.$$

Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} u(e^{ix})dx, \qquad z = re^{i\theta} \tag{4.10}$$

u est de classe C^∞ sur $\partial D \backslash e^{iE}$, intégrable sur le cercle; donc ψ est analytique dans D, de classe C^∞ dans $\bar{D} \backslash e^{iE}$. De là, d'après (4.9)

$$\operatorname{Re} \psi(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta}) = \operatorname{Re} \varphi_\nu(e^{i\theta}) \tag{4.11}$$

si θ appartient à $]a_\nu, b_\nu[$.

Soit $G(z) = \exp \psi(z)$.

On se propose de prouver que G appartient à $\{M_{2n}\}^+$ et s'annule sur E ainsi que toutes ses dérivées.

Pour cela, on établira successivement les propositions suivantes:

(1) il existe une constante K telle que pour tout entier n et tout θ dans le complémentaire de E

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq K^n M_{2n},$$

(2) si θ_0 est un point de E

$$\lim_{\theta \to \theta_0} G^{(n)}(e^{i\theta}) = 0,$$

θ dans le complémentaire de E.

(1) Soit θ un point du complémentaire de E; θ appartient à un intervalle contigu à E, θ dans $]a_\nu, b_\nu[$ par exemple.

On a

$$G = e^{\psi} = e^{\psi - \varphi_\nu} \cdot e^{\varphi_\nu} = H_\nu \cdot F_\nu \tag{4.12}$$

où on note $$H_\nu = e^{\psi - \varphi_\nu}.$$

Re $(\psi - \varphi_\nu)(e^{ix}) = 0$ si x appartient à $]a_\nu, b_\nu[$ d'après (4.11) donc

$$|H_\nu(e^{ix})| = 1 \text{ si } x \text{ appartient à }]a_\nu, b_\nu[. \tag{4.13}$$

Ainsi, si $z = e^{i\theta}$

$$(\psi - \varphi_\nu)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} (\text{Re } \psi - \text{Re } \varphi_\nu)(e^{ix}) dx$$

$$(\psi - \varphi_\nu)^{(k)}(z) = (-1)^k \frac{k!}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{(e^{ix} - z)^{k+1}} (\text{Re } \psi - \text{Re } \varphi_\nu)(e^{ix}) dx$$

$$(\psi - \varphi_\nu)^{(k)}(z) = (-1)^k \frac{k!}{\pi} \int_{T \setminus]a_\nu, b_\nu[} \frac{e^{ix}}{(e^{ix} - z)^{k+1}} (\text{Re } \psi - \text{Re } \varphi_\nu)(e^{ix}) dx.$$

D'où

$$|(\psi - \varphi_\nu)^{(k)}(z)| \leqq \frac{k!}{\pi} \int_{T \setminus]a_\nu, b_\nu[} \frac{1}{|e^{ix} - z|^{k+1}} (|\text{Re } \psi| + |\text{Re } \varphi_\nu|)(e^{ix}) dx.$$

$|e^{ix} - z| \geqq d(\theta, E)/\pi$ si on pose $d(\theta, E) = \inf\,(\theta - a_\nu, b_\nu - \theta)$.

Soit

$$|(\psi - \varphi_\nu)^{(k)}(z)| \leqq k! \frac{\pi^k}{d(\theta, E)^{k+1}} \int_0^{2\pi} (|\text{Re } \psi| + |\text{Re } \varphi_\nu|)(e^{ix}) dx.$$

L'intégrale figurant dans le membre de droite de cette inégalité est majorée par une constante indépendante de ν. En effet Re φ_ν est négative

$$\int_0^{2\pi} \text{Re } \varphi_\nu(e^{ix}) dx = \log |F_\nu(0)| = \log |F(0)|^2,$$

et Re ψ est négative et intégrable d'après (4.11), (4.8) et (4.4).

De là

$$|(\psi - \varphi_\nu)^{(k)}(z)| \leqq k! \frac{B^k}{d(\theta, E)^{k+1}}. \tag{4.14}$$

On rapelle une formule de Fa di Bruno donnant la dérivée $k$ième d'une fonction $F = g \circ f$ [**1**]

$$F^{(k)}(z) = k! \sum_{p=1}^{k} \frac{g^{(p)}[f(z)]}{p!} \sum_{J_p} c_{p,j} \left[\frac{f'(z)}{1!}\right]^{j_1} \left[\frac{f''(z)}{2!}\right]^{j_2} \cdots \left[\frac{f^{(k)}(z)}{k!}\right]^{j_k} \tag{4.15}$$

où J_p désigne l'ensemble des k-uples $j = (j_1, j_2, \ldots j_k)$ tels que

$$j_1 + 2j_2 + \ldots + kj_k = k, \quad j_1 + j_2 + \ldots + j_k = p$$

avec $\sum_{J_p} c_{p,j} = C_{k-1}^{p-1}$ où C_{p-1}^{k-1} désigne le coefficient du binôme

$$(k-1)!/(p-1)!(k-p)!.$$

On applique (4.15) à $H_\nu = \exp(\psi - \varphi_\nu)$ au point $e^{i\theta}$ avec $g(t) = \exp t$ et $f(z) = (\psi - \varphi_\nu)(z)$.

On a d'après (4.13) et (4.14)

$$|H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq k! \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p!} \sum_{J_p} c_{p,j} \frac{B^k}{d(\theta, E)^{p+k}}.$$

Soit

$$|H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq k! \frac{B^k}{d(\theta, E)^k} \sum_{p=1}^{k} C_{k-1}^{p-1} \frac{1}{p!d(\theta, E)^p}.$$

Si

$$\frac{1}{d(\theta, E)} \leqq k, \text{ alors, } \frac{1}{p!d(\theta, E)^p} \leqq e^{1/d(\theta,E)} \leqq e^k$$

pour tout p.

On a donc

$$|H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq k! \frac{(2Be)^k}{d(\theta, E)^k}.$$

Si $1/d(\theta, E) \geqq k$ alors $1/d(\theta, E) \geqq p$ pour tout p vérifiant $1 \leqq p \leqq k$. On a donc $1/p!d(\theta, E)^p \leqq 1/k!d(\theta, E)^k$ et $|H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq (2B)^k/d(\theta, E)^{2k}$.

On a donc pour tout k:

$$(4.16) \qquad \begin{cases} |H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq C^k k!/d(\theta, E)^k & \text{si } 1/d(\theta, E) \leqq k \\ |H_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq C^k 1/d(\theta, E)^{2k} & \text{si } 1/d(\theta, E) \geqq k \end{cases}$$

$C = 2Be$ ne dépend ni de θ, ni de ν.

Par ailleurs, d'après (4.6), (4.7) et la Proposition 2, la fonction $F_\nu = e^{\varphi_\nu}$ vérifie pour tout k:

$$(4.17) \qquad \begin{cases} |F_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq k!M_k \text{ pour tout } \theta \\ |F_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq \dfrac{k!}{d(\theta, E)^k T[1/d(\theta, E)]} & \text{si } \dfrac{1}{d(\theta, E)} \geqq \dfrac{M_{k+1}}{M_k}. \end{cases}$$

On utilise (4.16) et (4.17) pour majorer la dérivée $n$ième de G au point $e^{i\theta}$, θ dans $]a_\nu, b_\nu[$ sachant que G s'écrit alors

$$G = H_\nu \cdot F_\nu$$

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \sum_{k=0}^{n} C_n^k |F_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| \, |H_\nu^{(n-k)}(e^{i\theta})|.$$

On se propose d'établir que pour tout k tel que $0 \leqq k \leqq n$

$$(4.18) \qquad |F_\nu^{(k)}(e^{i\theta})| |H_\nu^{(n-k)}(e^{i\theta})| \leqq C^n M_{2n}.$$

On note $d = d(\theta, E) = \inf[(\theta - a_\nu), (b_\nu - \theta)]$. Les expressions à majorer sont de quatre types.

Si

$$1/d \leqq M_{k+1}/M_k, \tag{4.19}$$

on doit alors majorer

$$\text{soit } k!M_k/d^{2(n-k)} \quad \text{si } 1/d \geqq n-k$$
$$\text{soit } k!M_k(n-k)!/d^{(n-k)} \quad \text{si } 1/d \leqq n-k.$$

De l'hypothèse (4.19) on peut déduire que

$$M_k d^k \leqq M_{k+1} d^{k+1} \leqq \ldots \leqq M_n d^n.$$

On a alors:

dans le premier cas

$$\frac{k!M_k}{d^{2(n-k)}} \leqq \frac{k!}{M_k}(M_n)^2 \leqq (M_n)^2 \leqq M_{2n}$$

car $M_k \geqq k!$ pour tout k d'après (3.4)

dans le deuxième cas, d'après (3.4) également,

$$\frac{k!M_k(n-k)!}{d^{n-k}} \leqq n!M_n.$$

Si

$$1/d \geqq M_{k+1}/M_k, \tag{4.20}$$

on doit alors majorer

$$\text{soit } \frac{k!}{d^k T\left(\frac{1}{d}\right)} \frac{1}{d^{2(n-k)}} \text{ si } \frac{1}{d} \geqq n-k$$

$$\text{soit } \frac{k!}{d^k T\left(\frac{1}{d}\right)} \frac{(n-k)!}{d^{(n-k)}} \text{ si } \frac{1}{d} \leqq n-k.$$

Par définition de T, on a

$$1/d^k T(1/d) \leqq M_k.$$

De l'hypothèse (4.20), on déduit que

$$k!d^k < 1.$$

En effet,

$$1/d \geqq M_{k+1}/M_k \geqq k \text{ d'après (3.2).}$$

Ainsi, on a dans le premier cas

$$\frac{k!}{d^k T\left(\frac{1}{d}\right) d^{2(n-k)}} \leqq \frac{1}{d^{2n} T\left(\frac{1}{d}\right)} \leqq M_{2n}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

et dans le deuxième cas

$$\frac{k!(n-k)!}{d^n T\left(\frac{1}{d}\right)} \leqq n! M_n.$$

Ainsi pour tout entier n et tout θ dans $]a_\nu, b_\nu[$

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq (2C)^n M_{2n}. \tag{4.21}$$

De là (4.21) vaut pour tout θ dans le complémentaire de E.

$G = \exp \psi$ est de classe C^∞ dans $\bar{D}\backslash e^{iE}$ d'après la définition de ψ en (4.10), s'annule exactement sur E et vérifie (4.21) pour tout θ dans le complémentaire de E.

(2) Il reste à prouver que si θ_0 est un point de E, on a, pour tout n

$$\lim_{\theta \to \theta_0} G^{(n)}(e^{i\theta}) = 0,$$

θ dans le complémentaire de E.

Pour tout entier n, si θ appartient au complémentaire de E, θ dans $]a_\nu, b_\nu[$ par exemple si $1/d(\theta, E) \geqq M_{n+1}/M_n$, on a

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{(2C)^n}{d(\theta, E)^{2n} T\left(\frac{1}{d(\theta, E)}\right)}. \tag{4.22}$$

En effet, si $1/d(\theta, E) \geqq M_{n+1}/M_n$, on a pour tout k compris entre 0 et n, $1/d(\theta, E) \geqq M_{k+1}/M_k$ et $1/d(\theta, E) \geqq n - k$; on est donc dans l'hypothèse (4.20), premier cas.

D'où

$$|F_\nu^{(k)}(e^{i\theta})|\,|H_\nu^{(n-k)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{C^n}{d(\theta, E)^{2n} T\left(\frac{1}{d(\theta, E)}\right)}$$

ce qui établit (4.22).

Soit $(\theta_j)_{j \geqq 1}$, une suite de points du complémentaire de E, tendant vers θ_0, un point de E.

Si, à partir d'un certain rang, tous les points de cette suite appartiennent au même intervalle contigu $]a_\nu, b_\nu[$ c'est-à-dire si θ_j tend vers a_ν par exemple, on a d'après (4.22),

$$|G^{(n)}(e^{i\theta_j})| \leqq \frac{(2C)^n}{d(\theta_j, E)^{2n} T\left(\frac{1}{d(\theta_j, E)}\right)} \leqq (2C)^n M_{2n+1} d(\theta_j, E). \tag{4.23}$$

Donc

$$\lim_{\theta_j \to a_\nu, \theta_j \in T\backslash E} |G^{(n)}(e^{i\theta_j})| = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

Sinon les θ_j appartiennent à des intervalles contigus dont les longueurs ϵ_{ν_j} tendent vers 0. Mais, puisque $d(\theta_j, E) \leqq \epsilon_{\nu_j}$, le résultat suit d'après (4.23).

On a ainsi

$$\lim_{\theta_j \to \theta_0, \theta_j \in T \setminus E} G^{(n)}(e^{i\theta_j}) = 0.$$

Les valeurs au bord de G coïncident presque partout avec une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{T}$, nulle sur E, ainsi que toutes ses dérivées.

G appartient donc à $A^\infty(D)$, s'annule sur E ainsi que toutes ses dérivées et vérifie pour tout θ dans $\mathbf{T}$

$$|G^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq (2C)^n M_{2n}.$$

Ainsi G appartient à $\{M_{2n}\}^+$ et vérifie (4.22) ce qui établit le théorème.

Pour éliminer l'hypothèse $D = 1/4$, faite au début de la démonstration, on observe que, si $\{n!M_n\}^+$ est non quasi-analytique, il en est de même d'une certaine classe $\{n!M_n^*\}^+$ avec $(M_n^*/M_n)^{1/n} = o(1)$. On applique la Proposition 3 à la classe $\{n!M_n^*\}^+$ et on observe que, pour n assez grand, $(4D^*)^n M_n^* \leqq M_n$ et que $T^*(r) > T(r)$.

En complément du Théorème 1, on peut remarquer qu'il existe pour chaque classe $\{n!M_n\}^+$ non quasi-analytique une suite ϵ_ν tendant vers 0 en décroissant, satisfaisant $\sum_\nu \epsilon_\nu \log T(1/\epsilon_\nu) < \infty$, et telle que, pour tout sous-ensemble fermé de mesure nulle de $\mathbf{T}$, dont les longueurs l_ν des intervalles contigus satisfont $l_\nu \leqq \epsilon_\nu$, la conclusion subsiste.

Il suffit en effet que (4.4) ait lieu pour $l_\nu = \epsilon_\nu$. On conviendra de dire d'un tel ensemble qu'il est *associé* à $\{n!M_n\}^+$.

On ne sait pas, en général, si lorsque la classe $\{n!M_n\}^+$ est non-quasi analytique la condition $\sum_\nu l_\nu \log T(1/l_\nu) < \infty$ est suffisante pour que sur un sous-ensemble fermé de mesure nulle de $\mathbf{T}$ s'annule une fonction de $\{M_{2n}\}^+$ non identiquement nulle ainsi que toutes ses dérivées. Le résultat est vrai pour les classes $\{(n!)^p\}^+$, $p > 2$, [**1**] et $\{n!e^{n^p}\}^+$, $p > 1$, [**7**]. En effet, dans [**7**], Taylor et Williams caractérisent les sous-ensembles fermés de mesure nulle de $\mathbf{T}$ qui sont les ensembles de zéros de $\{n!e^{n^p}\}^+$, $p > 1$.

Troisième partie

1. Toute fonction f de $A^\infty(D)$ s'écrit de façon unique $f = BSF$ où B est un produit de Blaschke, S une fonction singulière et F une fonction extérieure [**2**].

Définition. On dira qu'il existe dans une classe des fonctions admettant un facteur singulier non constant, s'il existe dans la classe une fonction $f = BSF$ avec S non constante.

On notera μ la mesure positive, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, associée à S

$$S(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} d\mu(e^{ix}).$$

On peut remarquer que *l'existence dans une classe* $\{N_n\}^+$ *de fonctions admettant un facteur singulier non constant implique la non quasi analyticité de la classe.*

On sait, en effet, que si $f = SF$ et S diffère d'une constante, f et toutes ses dérivées s'annulent sur le support de la mesure μ associée à S [**6**].

2. Théorème 2. *Si la classe* $\{n!M_n\}^+$ *est non quasi-analytique, il existe un sous-ensemble* E *parfait de mesure nulle de* $\mathbf{T}$, *tel que toute mesure positive de support contenu dans* E *soit la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de* $\{M_{2n}\}^+$.

Plus généralement, si E est un ensemble associé à $\{n!M_n\}^+$, toute mesure positive de support contenu dans E est la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de $\{M_{2n}\}^+$.

Le Théorème 2 est une conséquence du Théorème 1 et de la proposition suivante:

Proposition 4. *Soit* E *un sous-ensemble fermé de mesure nulle de* $\mathbf{T}$ *sur lequel s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, une fonction* G *non identiquement nulle de* $\{M_{2n}\}^+$, *vérifiant de plus la propriété* (P) *du Théorème 1; alors, toute mesure positive sur* E *est la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de* $\{M_{2n}\}^+$.

Démonstration de la proposition. Soit μ une mesure positive dont le support est contenu dans E; μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit S la fonction singulière associée définie par

$$S(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\mu(e^{ix}), \qquad z = re^{i\theta}.$$

On note $S(z) = \exp[-f(z)]$.

On a alors, pour tout entier k supérieur ou égal à 1

$$f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1} \frac{k!}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{(e^{ix} - z)^{k+1}}\, d\mu(e^{ix}), \qquad z = re^{i\theta}.$$

Ainsi

$$|f^{(k)}(z)| \leqq \frac{k!}{\pi} \int_E \frac{d\mu(e^{ix})}{|e^{ix} - z|^{k+1}}, \qquad z = re^{i\theta}.$$

Si θ appartient au complémentaire de E

$$|e^{ix} - z| \geqq \frac{1}{\pi}|x - \theta| \geqq \frac{1}{\pi} d(\theta, E).$$

On a donc, en supposant égale à 1, la masse totale de la mesure, pour tout θ appartenant au complémentaire de E.

$$|f^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq k!\pi^k / d(\theta, E)^{k+1}.$$

De là, puisque $|S(e^{i\theta})| = 1$, en tout point θ du complémentaire de E, on a,

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

en appliquant à $S = \exp(-f)$ la formule (4.15), comme dans la deuxiéme partie:

$$|S^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq \frac{k!}{d(\theta, E)^k} \sum_{p=1}^{k} C_{k-1}^{p-1} \frac{1}{p!} \frac{1}{d(\theta, E)^p}.$$

Ainsi donc, il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout entier k:

$$\begin{cases} |S^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq \dfrac{C^k k!}{d(\theta, E)^k} & \text{si } \dfrac{1}{d(\theta, E)} \leqq k \\ |S^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq \dfrac{C^k}{d(\theta, E)^{2k}} & \text{si } \dfrac{1}{d(\theta, E)} \geqq k \end{cases}$$

et

$$(5.1) \qquad \begin{cases} |G^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq C^k M_{2k} \text{ pour tout } \theta \text{ dans } \mathbf{T} \\ |G^{(k)}(e^{i\theta})| \leqq \dfrac{C^k}{[d(\theta, E)]^{2k} T\left(\dfrac{1}{d(\theta, E)}\right)} & \text{si } \dfrac{1}{d(\theta, E)} \geqq \dfrac{M_{k+1}}{M_k} \end{cases}$$

d'après les hypothèses faites sur G.

Soit F la fonction définie par

$$F(z) = G(z) \cdot S(z)$$

F est analytique dans D, de classe C^∞ dans $\bar{D} \backslash e^{iE}$. On se propose d'établir que F appartient à $\{M_{2n}\}^+$.

Les calculs se développent comme dans la démonstration du Théorème 1, mais ici la propriété (P) de G joue un rôle essentiel. Elle assurera au produit de G, fonction de $\{M_{2n}\}^+$, par S, fonction singulière, de rester dans la classe $\{M_{2n}\}^+$.

Soit n un entier positif et θ un point du complémentaire de E. On pose $d = d(\theta, E)$

$$F^{(n)}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k G^{(k)}(e^{i\theta}) S^{(n-k)}(e^{i\theta}).$$

On va majorer le module de chacun des termes de la somme.

Si

$$(5.2) \qquad 1/d \leqq M_{k+1}/M_k,$$

on doit majorer

$$\text{soit } M_{2k}/d^{2(n-k)} \text{ si } 1/d \geqq (n-k)$$
$$\text{soit } M_{2k}(n-k)!/_d{}^{(n-k)} \text{ si } 1/d \leqq (n-k).$$

De l'hypothèse (5.2), on tire

$$M_k d^k \leqq \ldots \leqq M_n d^n$$

soit $1/d^{n-k} \leqq M_n/M_k$ d'où $1/d^{2(n-k)} \leqq (M_n/M_k)^2 \leqq M_{2n}/M_{2k}$, car $(M_n/M_k)^2 \leqq M_{2n}/M_{2k}$ d'après l'hypothèse de convexité faite sur la suite $a_k = \log M_k$. On a bien, en effet $2(a_n - a_k) \leqq a_{2n} - a_{2k}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-136-3 Published online by Cambridge University Press

On a donc, dans le premier cas

$$M_{2k}/d^{2(n-k)} \leqq M_{2n}.$$

Dans le deuxième cas

$$M_{2k}(n-k)!/d^{(n-k)} \leqq M_{2k}(n-k)^{2(n-k)} \leqq M_{2k} \cdot M_{2(n-k)} \leqq M_{2n}$$

puisque $1/d \leqq n-k$, que M_n vérifie (3.4) et est logarithmiquement convexe.

(5.3) Si $$1/d \geqq M_{k+1}/M_k,$$

on doit majorer

$$\text{soit } \frac{1}{d^{2k}T(1/d)} \cdot \frac{1}{d^{2(n-k)}} \quad \text{si } \frac{1}{d} \geqq (n-k)$$

$$\text{soit } \frac{1}{d^{2k}T(1/d)} \cdot \frac{(n-k)!}{d^{(n-k)}} \quad \text{si } \frac{1}{d} \leqq (n-k).$$

On a dans le premier cas

$$1/d^{2n}T(1/d) \leqq M_{2n}$$

et dans le deuxième cas

$$(n-k)!/d^{n+k}T(1/d) \leqq n!M_n \leqq M_{2n}$$

car $1/d \leqq (n-k)$ entraine $1/d^k \leqq n!/(n-k)!$.

Ainsi pour chacune des hypothèses (5.2) et (5.3) on a

$$|G^{(k)}(e^{i\theta})H^{(n-k)}(e^{i\theta})| \leqq C^n M_{2n}.$$

D'où, pour tout entier n et tout θ dans le complémentaire de E

$$|F^{(n)}(e^{i\theta})| \leqq (2C)^n M_{2n}.$$

De plus si $d(\theta, E) \leqq M_n/M_{n+1}$

$$|G^{(k)}(e^{i\theta}) \cdot H^{(n-k)}(e^{i\theta})| \leqq 1/d^{2n}T(1/d) \leqq M_{2n+1}d.$$

De là, comme dans la démonstration du Théorème 1, on a

$$\lim_{\theta \to \theta_0} F^{(n)}(e^{i\theta}) = 0.$$

Ainsi F appartient à $\{M_{2n}\}^+$ ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

3. Dans ce paragraphe, on établit sur les classes de Gevrey $\{n^{pn}\}^+$ des résultats plus complets.

PROPRIÉTÉ 5. *La quasi analyticité de la classe $\{n^{pn}\}^+$ équivaut à l'absence dans la classe de fonctions admettant des facteurs singuliers non constants.*

On sait que la quasi-analyticité de la classe implique l'absence dans la classe de fonctions admettant des facteurs singuliers non constants.

Il s'agit donc de montrer que s'il n'existe pas dans la classe $\{n^{pn}\}^+$ de fonctions admettant des facteurs singuliers non constants, la classe est quasi-analytique.

Supposons donc $\{n^{pn}\}^+$ non quasi-analytique, c'est-à-dire $p > 2$, $p = 2/\alpha$ par exemple avec $0 < \alpha < 1$. Alors $\{n!M_n\}^+ = \{n!n^{n/\alpha}\}^+$ est encore non quasi-analytique; mais, d'après le Théorème 2, il existe dans la classe $\{M_{2n}\}^+ = \{n^{2n/\alpha}\}^+$ des fonctions admettant des facteurs singuliers non constants, ce qui est absurde et établit la propriété 5.

Si E est un sous-ensemble fermé de mesure nulle de $\mathbf{T}$, on note l_ν, $\nu \geqq 1$, les longueurs des intervalles $]a_\nu, b_\nu[$ contigus à E.

PROPRIÉTÉ 6. *Soit E un sous-ensemble fermé de mesure nulle de* $\mathbf{T}$, *tel que*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu^{1-\alpha} < \infty, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

alors toute mesure positive de support contenu dans E est la mesure associée au facteur singulier d'une fonction de $\{n^{2n/\alpha}\}^+$.

D'après la démonstration de la Proposition 4, il suffit de prouver que la condition $\sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu^{1-\alpha} < \infty$ assure l'existence d'une fonction extérieure G nulle sur E ainsi que toutes ses dérivées telle que la propriété (P) soit vérifiée. (On a ici $M_n = n^{n/\alpha}$).

Pour construire G on reprend la démonstration du Théorème 1 en utilisant la fonction F définie par

$$F(z) = \exp\,[-(1 - z)^{-\alpha}] = \exp \varphi(z).$$

En effet F appartient à $\{n!M_n\}^+$ [**1**] et s'annule au point $z = 1$. De plus si x est un point de $\mathbf{T}\backslash\{0\}$, on a

$$|\varphi(e^{ix})| = |1 - e^{ix}|^{-\alpha} \leqq \pi/|x|^\alpha.$$

Ainsi, à chaque intervalle $]a_\nu, b_\nu[$, on associe la fonction F_ν définie par

$$F_\nu(z) = F(ze^{-ia_\nu}) \cdot F(ze^{-ib_\nu}) = \exp \varphi_\nu(z).$$

Alors la fonction définie presque partout sur $\mathbf{T}$ par

$$u(e^{ix}) = \operatorname{Re} \varphi_\nu(e^{ix})$$

si x appartient à $]a_\nu, b_\nu[$, est intégrable sur $\mathbf{T}$.

En effet,

$$u(e^{ix}) = \operatorname{Re} \varphi(e^{i(x-a_\nu)}) + \operatorname{Re} \varphi(e^{i(x-b_\nu)})$$

et

$$\int_0^{2\pi} |u(e^{ix})|dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_\nu}^{b_\nu} |\operatorname{Re} \varphi_\nu(e^{ix})|dx \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_\nu}^{b_\nu} |\varphi_\nu(e^{ix})|dx.$$

Mais, d'après (5.7)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_\nu}^{b_\nu} |\varphi(e^{i(x-a_\nu)})|dx \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\pi}{(x - a_\nu)^\alpha}\, dx = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu^{1-\alpha} < \infty.$$

De là en suivant la démonstration du théorème 1 on établit que $G = \exp \psi$ où ψ est définie par

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} u(e^{ix}) dx,$$

satisfait aux hypothèses de la Proposition 4, ce qui achève la démonstration.

Note adressée en cours d'épreuve: L'auteur donne dans [C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 276, (1973), 731-733] une condition suffisante pour que, sur un sous ensemble fermé de mesure nulle de **T**, s'annule une fonction de $\{M_{2n}\}^+$, non identiquement nulle, ainsi que toutes ses dérivées. Cette fonction vérifie la propriété (P) du Théorème 1.

Bibliographie

1. A. M. Chollet, *Zéros dans les classes de Gevrey de type analytique*, Bull. Sci. Math. *96* (1972), 65–82.
2. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions* (Prentice Hall, New York, 1962).
3. B. I. Korenbljum, *Quasi analytic classes of functions in a circle*, Soviet Math. Dokl. *6* (1965), 1155–1158.
4. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications* (Gauthier-Villars, Paris, 1952).
5. H. S. Shapiro, *Smoothness of the boundary function of a holomorphic function of bounded type*, Ark. Mat. *7* (1968), 443–447.
6. B. A. Taylor and D. L. Williams, *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*, Can. J. Math. *22* (1970), 1266–1283.
7. ——— *Boundary zero sets of A^∞ functions satisfying growth conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. (à paraitre).

Université de Paris-Sud,
Centre D'Orsay, France