Canad. Math. Bull.Vol. **34** (4), 1991 pp. 447–455

JV-ALGÈBRES ET JH^*-ALGÈBRES

ALI BENSEBAH

RÉSUMÉ. In the present article we generalize Theorem 2.3 of [6] in the case of JV-algebras without a unit element and we obtain as a consequence that the multiplicativity of the involution $((xy)^* = y^*x^*)$ in the definition of a JH^*-algebra is redundant (see [3]). We end this paper with a theorem on unital JH^*-algebra which is a nonassociative extension of the main result in [4].

Introduction. En se servant des techniques utilisées dans [6], on démontre que l'involution, d'une JV-algèbre sans élément unité, est multiplicative (théorème 2); ensuite on démontre qu'une JH^*-algèbre est une JV-algèbre (théorème 3). La conséquence immédiate qui découle de ces deux résultats est que l'involution d'une JH^*-algèbre est toujours multiplicative, par conséquent les deux théorèmes de structure pour une JH^*-algèbre (voir [3]) restent vrais en ôtant l'hypothèse de multiplicativité de l'involution. Si la JH^*-algèbre possédait un élément unité de norme 1, alors la conséquence précédente pourrait s'obtenir directement en utilisant le théorème principal de [7]; de plus, on démontre que dans cette circonstance la JH^*-algèbre est de dimension finie. Ce dernier résultat est une extension du théorème principal de [4] au cas non-associatif.

Notations et définitions. Une $\mathbb{K}$-algèbre A est une $\mathbb{K}$-algèbre (qui n'est pas nécessairement associative) sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Une $\mathbb{K}$-algèbre normée A est une algèbre dans laquelle est définie une norme satisfaisant à $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|, \quad \forall a, b \in A$.

On désignera par A' le dual de A et par $S(A)$ la sphère unité de A, c'est-à-dire

$$S(A) = \{x \in A : \|x\| = 1\}.$$

Pour x dans $S(A)$, on définit l'ensemble suivant

$$D(A,x) = \{f \in A' : f(x) = 1 = \|f\|\},$$

le théorème de Hahn-Banach nous garantit que $D(A,x)$ est non vide pour tout x dans $S(A)$.

Pour tout $a \in A$ et $x \in S(A)$, on définit l'ensemble suivant

$$V(A,a,x) = \{f(ax) : f \in D(A,x)\}.$$

Le domaine numérique de $a \in A$ est défini par

$$V(A,a) = \cup\big\{\{\,V(A,a,x)\}\ : x \in S(A)\big\}.$$

Reçu par les editeurs le 9 décembre 1989; révisé le 13 septembre 1990.
AMS subject classification: 46H70.

Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, on notera par π le sous-ensemble du produit cartésien $X \times X'$ défini par

$$\pi = \{(x,f) : x \in S(X), f \in S(X'), f(x) = 1\}$$

Le domaine numérique spatial $W(T)$ d'un élément $T \in BL(X)$ (où $BL(X)$ est l'algèbre associative des opérateurs linéaires bornés sur X munie de la norme sup) est défini par

$$W(T) = \{f(Tx) : (x,f) \in \pi\}.$$

Notons que si $D(X,x) = \{f \in X' : \|f\| = f(x) = 1\}$, alors

$$W(T) = \cup \big\{\{f(Tx) : f \in D(X,x)\}, x \in S(X)\big\}.$$

Dans la suite on utilisera le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Pour chaque T dans $BL(X)$ on a que*

$$\overline{\mathrm{co}}W(T) = V[BL(X), T]$$

où $\overline{\mathrm{co}}W(T)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de $W(T)$.

PREUVE. Voir théorème 4 p. 84 de [2]. ∎

PROPOSITION 2. *Soit a un élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée A, alors*
i) $V(A,a) \subset V[BL(A), L_a]$,
ii) $\overline{\mathrm{co}}V(A,a) = V[BL(A), L_a]$,

où L_a est l'opérateur de multiplication à gauche dans A défini par

$$b \longmapsto L_a(b) = ab.$$

PREUVE. i) Soit $\lambda \in V(A,a)$ alors il existe y dans $S(A)$ et il existe g dans $D(A,y)$ tels que

$$\lambda = g(ay).$$

Soit F l'application de $BL(A)$ dans $\mathbb{K}$ définie par $T \longmapsto F(T) = g(Ty)$, alors

$$F(I) = g(y) = 1, \text{ et } |F(T)| = |g(Ty)| \leq \|Ty\| \leq \|T\| \, \|y\| = \|T\|,$$

ce qui montre que $F \in D[BL(A), I]$, où I est l'élément unité de $BL(A)$, et $\lambda = g(ay) = g\big(L_a(y)\big) = F(L_a) \in V[BL(A), L_a, I] = V[BL(A), L_a]$. Cette dernière égalité provient du lemme 2 p. 15 de [2].

ii) D'après la proposition 1, on a que

$$\overline{\mathrm{co}}W(L_a) = V[BL(A), L_a] \tag{1}$$

$$\begin{aligned} W(L_a) &= \cup\big\{\{f\big(L_a(x)\big) : f \in D(A,x)\} : x \in S(A)\big\} \\ &= \cup\big\{\{f(ax) : f \in D(A,x)\} : x \in S(A)\big\} \\ &= \cup\{V(A,a,x) : x \in S(A)\} \\ &= V(A,a) \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-072-5 Published online by Cambridge University Press

donc,

$$W(L_a) = V(A, a) \tag{2}$$

et par conséquent, en vertu de (1) et (2), nous obtenons que

$$\overline{\mathrm{co}}V(A, a) = V[BL(A), L_a]. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre normée, ne possédant pas un élément unité, il existe une construction standard pour obtenir une algèbre A_e qui contient un élément unité e. On définit A_e comme étant l'ensemble de toutes les paires (a, α) avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $a \in A$, $A_e = \{(a, \alpha) : \alpha \in \mathbb{K},\ a \in A\}$, dans lequel on définit les opérations suivantes:

$$\begin{gathered}(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)\\ \beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)\\ (a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta),\end{gathered}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $a, b \in A$.

On vérifie aisément que A_e munie de ces opérations est une algèbre (qui est en plus une algèbre de Jordan si A est une algèbre de Jordan) et que l'ensemble

$$A_1 = \{(a, 0) : a \in A\},$$

est un idéal dans A_e qui est isomorphe à A et on notera cet isomorphisme par

$$\begin{aligned}\tau : A &\longrightarrow A_1\\ a &\longmapsto \tau_a = (a, 0).\end{aligned}$$

On définit l'application $\|\,.\,\| : A_e \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a, \alpha) \longmapsto \|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$$

qui est une norme sur A_e et A_e munie de cette norme est complète si et seulement si A est complète.

Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan avec unité e, le spectre d'un élément a de A est l'ensemble $\mathrm{Sp}(A, a)$ de nombres complexes défini comme suit

$$\mathrm{Sp}(A, a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - a) \text{ n'est pas inversible dans } A\}.$$

Voir [5], ou la preuve de la proposition 4, pour la notion d'inversibilité dans une algèbre de Jordan.

PROPOSITION 3. *Soit a un élément d'une $\mathbb{C}$-algèbre normée A, alors*

$$\mathrm{Sp}[BL(A), L_a] \subseteq \mathrm{Sp}[BL(A_1), L^1_{(a,0)}] \subseteq \mathrm{Sp}[BL(A_e), L^e_{(a,0)}],$$

où $L^1_{(a,0)}$ (resp. $L^e_{(a,0)}$) est un opérateur sur A_1 (resp. sur A_e) défini par

$$\begin{gathered}(b, 0) \longmapsto L^1_{(a,0)}(b, 0) = (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)\\ \big(\textit{resp. } (b, \alpha) \longmapsto L^e_{(a,0)}(b, \alpha)(a, 0)(b, \alpha) = (ab + \alpha a, 0)\big).\end{gathered}$$

PREUVE. *i) Soit* $\lambda \notin \mathrm{Sp}[BL(A_1), L^1_{(a,0)}]$, *alors il existe* T *dans* $BL(A_1)$ *tel que*

$$(\lambda I^1 - L^1_{(a,0)})T = T(\lambda I^1 - L^1_{(a,0)}) = I^1,$$

où I^1 *est l'élément unité de* $BL(A_1)$.

Soit $\tilde{T}$ un opérateur sur A défini par $b \longmapsto \tilde{T}(b) = \tau^{-1}T\tau(b)$, où τ est une application de A dans A_1 définie par $b \longmapsto \tau(b) = (b, 0)$.

Alors, on vérifie aisément que $(\lambda I - L_a)\tilde{T} = \tilde{T}(\lambda I - L_a) = I$ et que $\tilde{T} \in BL(A)$, ce qui montre que $\lambda \notin \mathrm{Sp}\big(BL(A), L_a\big)$. Remarquons que l'inclusion que nous venons de montrer est réellement une égalité car τ est un isomorphisme.

ii) Soit $\lambda \notin \mathrm{Sp}[BL(A), L_a]$, alors il existe T dans $BL(A_e)$ tel que

$$(\lambda I^e - L^e_{(a,0)})T = T(\lambda I^e - L^e_{(a,0)}) = I^e,$$

où I^e est l'élément unité de $BL(A_e)$.

Soit Γ une application de A_e dans A_1 définie par $(b,\alpha) \longmapsto \Gamma(b,\alpha) = (b, 0)$, et soit $\tilde{T}$ un opérateur dans A_1 défini par $(b, 0) \longmapsto \tilde{T}(b, 0) = \Gamma T(b, 0)$. Alors on vérifie aisément que $(\lambda I^1 - L^1_{(a,0)})\tilde{T} = \tilde{T}(\lambda I^1 - L^1_{(a,0)}) = I^1$, et $\tilde{T} \in BL(A_1)$. Ainsi donc, nous obtenons que $\lambda \notin \mathrm{Sp}\big(BL(A_1), L^1_{(a,0)}\big)$. ∎

PROPOSITION 4. *Soit* A *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Jordan normée et complète, alors*

$$\mathrm{Sp}\big(A_e, (a,0)\big) \subseteq \overline{\mathrm{co}}V(A,a) \cup \{0\},$$

pour tout a *dans* A.

PREUVE. D'après la proposition 2, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Sp}\big(A_e, (a,0)\big) \subseteq V\big(BL(A), L_a\big) \cup \{0\}.$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\big(A_e, (a,0)\big)$ (avec $\lambda \neq 0$), c'est-à-dire $\lambda(0,1) - (a,0) = (-a,\lambda)$ n'est pas inversible dans A_e, donc il n'existe pas de x dans A tel que les équations suivantes soient satisfaites simultanément

$$\begin{cases} (-a,\lambda)\big(x, \frac{1}{\lambda}\big) = (0,1) \\ (-a,\lambda)^2\big(x, \frac{1}{\lambda}\big) = (-a,\lambda) \end{cases}$$

Ce dernier système est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} ax - \lambda x + \frac{1}{\lambda}a = 0 \\ a^2x - 2\lambda ax + \lambda^2 x + \frac{1}{\lambda}a^2 - a = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On pose $J = (\lambda I - L_a)BL(A)\big(= \{(\lambda I - L_a)T : T \in BL(A)\}\big)$.

Supposons que I soit un élément de J, alors il existe T dans $BL(A)$ tel que

$$(\lambda I - L_a)T = I.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-072-5 Published online by Cambridge University Press

Ainsi donc, $\lambda T(b) - aT(b) = b$, pour tout b dans A, en particulier si nous posons

$$b = \frac{a}{\lambda}, \text{ nous avons } \lambda T\Big(\frac{a}{\lambda}\Big) - aT\Big(\frac{a}{\lambda}\Big) = \frac{a}{\lambda},$$

maintenant en multipliant les deux membres de cette dernière équation par a on obtient

$$\lambda aT\Big(\frac{a}{\lambda}\Big) - a^2T\Big(\frac{a}{\lambda}\Big) = \frac{a^2}{\lambda}.$$

Par conséquent, nous voyons bien que l'élément $T\big(\frac{a}{\lambda}\big)$ est une solution du système d'équations (1), et cela est en contradiction avec le fait que $(-a, \lambda)$ n'est pas inversible, donc I n'est pas un élément de J.

Par suite on a que J est un idéal à droite distinct de $BL(A)$. Etant donné que $BL(A)$ est une algèbre de Banach unitaire, alors

$$\|I - T\| \geq 1, \quad \forall T \in J.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe F dans $\big(BL(A)\big)'$ telle que

$$F(I) = 1 = \|F\| \text{ et } F(T) = 0, \quad \forall T \in J.$$

Donc $F \in D\big(BL(A), I\big)$ et $F(\lambda I - L_a) = 0$(car $\lambda I - L_a \in J$). Cela nous donne $\lambda = F(L_a) \in V[BL(A), L_a]$. ∎

Définitions. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre normée, on dit qu'un élément $h \in A$ est *hermitien* si $V(A,h) \subseteq \mathbb{R}$, on notera par $H(A)$ l'ensemble de tous les éléments hermitiens de A.

Une involution * dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel X est une application de X dans X satisfaisant à: $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, x^{**} = x$, pour tout x, y dans X et pour tout λ dans $\mathbb{C}$ (où $\bar{\lambda}$ est le nombre complexe conjugué de λ).

Une $\mathbb{C}$-algèbre munie d'une involution est dite algèbre involutive.

Une involution * dans une $\mathbb{C}$-algèbre A est dite *multiplicative* si

$$(ab)^* = b^* a^*, \qquad \text{pour tout } a \text{ et } b \text{ dans } A.$$

On dit qu'un élément a d'une algèbre involutive est *symétrique* si $a^* = a$. On désignera par $\mathrm{Sym}(A)$ l'ensemble de tous les éléments symétriques de A.

LEMME. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan normée et complète. Si $a \in H(A)$ et $a^2 = b + ic$ avec $b, c \in H(A)$, alors $[L_b, L_c] = 0$, où $[L_b, L_c] = L_bL_c - L_cL_b$.*

PREUVE. En vertu de la proposition 2 nous avons que $h \in H(A)$ si et seulement si $L_h \in H\big(BL(A)\big)$, et en utilisant le lemme 4 (de [2], p. 47) pour l'algèbre de Banach unitaire $BL(A)$, nous obtenons que

$$i[L_h, L_k] \in H\big(BL(A)\big), \text{ pour tout } h \text{ et } k \text{ dans } H(A).$$

Maintenant, le reste de la preuve est la même que celle du lemme 2.2 de [6]. ∎

On démontre le théorème suivant (voir le théorème 2.3 de [6]) pour les algèbres de Jordan sans élément unité.

THÉORÈME 1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan normée et complète et soit $a \in H(A)$ tel que $a^2 = b + ic$ avec $b, c \in H(A)$, alors $a^2 \in H(A)$.*

PREUVE. $L_{a^2} = L_b + iL_c$, d'après le lemme ci-dessus, nous avons que

$$[L_b, L_c] = 0.$$

Maintenant en utilisant le théorème 14 de [2] (p. 54) nous obtenons

$$V[BL(A), L_{a^2}] = \operatorname{Co}\operatorname{Sp}[BL(A)k, L_{a^2}].$$

En vertu des résultats suivants: la proposition 3, le théorème 1.2 de [6], le théorème 1.1 de [6] et la proposition 4, nous avons successivement les inclusions suivantes

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}[BL(A), L_{a^2}] &\subseteq \operatorname{Sp}[BL(A_e), L^e_{(a,0)^2}] \subseteq \frac{1}{2}\big[\operatorname{Sp}[A_e, (a,0)^2] + \operatorname{Sp}[A_e, (a,0)^2]\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[\{\operatorname{Sp}[A_e, (a,0)]\}^2 + \{\operatorname{Sp}[A_e, (a,0)]\}^2\big] \\ &\subseteq \frac{1}{2}\Big[\big\{\overline{\operatorname{co}}V(A,a) \cup \{0\}\big\}^2 + \big\{\overline{\operatorname{co}}V(A,a) \cup \{0\}\big\}^2\Big] \subseteq \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

La dernière inclusion s'explique par le fait que a est dans $H(A)$. Ce qui montre que $V[BL(A), L_{a^2}] \subseteq \mathbb{R}$, par suite d'après la proposition 2(i), $a^2 \in H(A)$. ∎

DÉFINITION. Une JV-algèbre est une algèbre de Jordan (sans élément unité) normée et complète A telle que

$$A = H(A) \oplus iH(A).$$

Remarquons que si A est une JV-algèbre, alors l'application $*$ de A dans A définie par $(h + ik)^* = h - ik$ $\big(h, k \in H(A)\big)$ est une involution sur A qu'on appellera involution naturelle de A.

THÉORÈME 2. *Si A est une JV-algèbre, alors l'involution naturelle de A est multiplicative.*

PREUVE. D'après le théorème 1 on a que $a^2 \in H(A)$, pour tout a dans $H(A)$.

Soient $a, b \in H(A)$,

$$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - a^2 - b^2\} \in H(A)$$

donc $H(A)$ est une sous-algèbre réelle de A.

Montrons maintenant que l'involution naturelle de A est multiplicative. Soient $a = h_1 + ik_1$ et $b = h_2 + ik_2 \in A$

$$\begin{aligned}(ab)^* &= [(h_1 + ik_1)(h_2 + ik_2)]^* = [(h_1h_2 - k_1k_2) + i(h_1k_2 + k_1h_2)]^* \\ &= (h_1h_2 - k_1k_2) - i(h_1k_2 + k_1h_2) = (h_1 - ik_1)(h_2 - ik_2) \\ &= a^*b^*.\end{aligned}$$

∎

DÉFINITION.

1) Une JH^*-algèbre A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan normée et complète qui satisfait aux conditions suivantes:

 i) L'espace de Banach A est un espace de Hilbert;

 ii) Pour tout $x \in A$, il existe un élément dans A noté x^* et appelé symétrique de x tel que $\langle xy, z\rangle = \langle y, x^*z\rangle$ pour tout y, z dans A.

2) Nous dirons qu'une algèbre A est *propre* si

$$\{a \in A : ax = 0\ (\forall x \in A)\} = \{0\}.$$

En supposant que l'involution dans une JH^*-algèbre (appelée J^*-algèbre dans [3]) propre est multiplicative, Devappakkiam a réussi à généraliser les théorèmes de représentations d'Ambrose (voir [1]) du cas d'une algèbre associative au cas d'une algèbre de Jordan. Le théorème suivant montre que l'involution dont il est question est toujours multiplicative, par conséquent les deux théorèmes de structure pour une JH^*-algèbre (voir [3]) restent vrais en ôtant l'hypothèse de multiplicativité de l'involution.

THÉORÈME 3. *Toute JH^*-algèbre propre A est une JV-algèbre dont l'involution originale coïncide avec l'involution naturelle de A (et donc l'involution originale est multiplicative).*

PREUVE. Soit $x \in S(A)$ et soit $f \in D(A,x)$, d'après le théorème de Riesz, on sait qu'il existe $y \in A$ tel que

$$f(z) = \langle z, y\rangle\ \forall z \in A \text{ et } \|y\| = \|f\|\ (= 1).$$

En particulier, $1 = f(x) = \langle x, y\rangle \leq \|x\|\,\|y\| = 1$, d'où $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$. Donc, x et y sont linéairement dépendants c'est-à-dire il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $y = \alpha x$

$$1 = \langle x, \alpha x\rangle = \bar{\alpha}\|x\|^2 = \bar{\alpha},\ \text{d'où } y = x.$$

Ce qui montre que $D(A,x)$ se réduit à une seule fonctionnelle, c'est-à-dire

$$D(A,x) = \{\langle\,.\,, x\rangle : A \longrightarrow \mathbb{C}\}.$$

Soit a un élément quelconque dans A

$$\begin{aligned} V(A,a,x) &= \{\langle ax, x\rangle\} = \{\langle x, a^*x\rangle\} = \{\overline{\langle a^*x, x\rangle}\} \\ &= \overline{V(A,a^*,x)} \end{aligned}$$

Ainsi donc,

$$V(A,a,x) = \overline{V(A,a^*,x)} \quad \forall a \in A \text{ et } \forall x \in S(A).$$

Montrons maintenant que $\mathrm{Sym}(A) = H(A)$.

Soit $a \in \mathrm{Sym}(A)$ (i.e. $a^* = a$), alors d'après ce qui précède nous avons que

$$V(A,a,x) \subseteq \mathbb{R},\ \text{pour tout } x \text{ dans } S(A),$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-072-5 Published online by Cambridge University Press

par suite $V(A,a) = \cup\{\, V(A,a,x) : x \in S(A)\} \subseteq \mathbb{R}$, ainsi donc $a \in H(A)$.

Inversement, soit $a \in H(A)$, donc $a \in A = \mathrm{Sym}(A) \oplus i\,\mathrm{Sym}(A)$, et par conséquent il existe u et v dans $\mathrm{Sym}(A)$ tels que $a = u + iv$. D'après l'inclusion $\mathrm{Sym}(A) \subseteq H(A)$, que nous venons de montrer, nous pouvons affirmer que u et v sont dans $H(A)$ et $iv = a - u \in H(A)$.

Maintenant en utilisant la proposition 2, nous obtenons

$$V[BL(A), L_v] = \overline{\mathrm{co}}V(A,v) \subseteq \mathbb{R},$$
$$V[BL(a), iL_v] = \overline{\mathrm{co}}V(A,iv) \subseteq \mathbb{R}.$$

D'où il découle que

$$V[BL(A), L_v] \subseteq \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}.$$

Par suite, d'après le théorème 1 p. 34 de [2], on a que $L_v \equiv 0$, et par conséquent $v = 0$, puisque A est propre. Ainsi donc $a = u \in \mathrm{Sym}(A)$, ce qui montre que

$$A = H(A) \oplus iH(A).$$

Par suite, on a que l'involution originale de A coïncide avec l'involution naturelle de A qui est multiplicative (en vertu du théorème 2), ce qui montre que l'involution originale de A est multiplicative. ∎

L. Ingelstam (voir [4]) a démontré qu'une algèbre de Hilbert associative unitaire est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce très beau résultat était une conjecture de I. Kaplansky. Par la suite M. F. Smiley (voir [8]) a donné une preuve simplifiée de ce théorème. Dans ce qui suit nous démontrons une version de ce théorème pour une algèbre de Jordan sans utiliser les méthodes employées dans [4] et [8].

THÉORÈME 4. *Soit A une JH^*-algèbre. Si A possède un élément unité e satisfaisant à*

$$\|e\| = 1,$$

alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$ (et donc A est de dimension finie).

PREUVE. Etant donné que A possède un élément unité alors A est une JH^*-algèbre propre. Soit $a \in A$ et $a \neq 0$.

En répétant le raisonnement qui a été développé dans la preuve du théorème 3, nous obtenons que

$$V(A,a,x) = \{\,\langle ax, x\rangle\,\}, \quad \forall x \in S(A).$$

Maintenant une brève inspection de la preuve du lemme 2 p. 15 de [2], nous révèle que l'associativité n'a pas été utilisée, donc

$$V(A,a) = V(A,a,e) = \{\,\langle a, e\rangle\,\}. \tag{1}$$

D'après le théorème 1 p. 34 de [2], on a que

$$\|L_a\| \leq \exp(1)\sup\{\,|\lambda| : \lambda \in V\big(BL(A), L_a\big)\},$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-072-5 Published online by Cambridge University Press

par suite, en utilisant la proposition 1.3 de [6], et le fait que $\|L_a\| = \|a\|$, on obtient

$$\|a\| \leq \exp(1) \sup\{\,|\lambda| : \lambda \in V(A,a)\}. \tag{2}$$

En combinant les estimations (1) et (2), on obtient

$$\|a\| \leq \exp(1) |\langle a, e\rangle|. \tag{3}$$

Sachant que $\mathrm{Sp}(A,a)$ est non vide, $\mathrm{Sp}(A,a) \subseteq V(A,a)$ (voir le théorème 1.4 de [6]), et $V(A,a)$ est réduit à un singleton, alors

$$\mathrm{Sp}(A,a) = \{\langle a, e\rangle\}. \tag{4}$$

Ainsi donc, en vertu des assertions (3) et (4) nous avons que $0 \notin \mathrm{Sp}(A,a)$, par conséquent a est inversible.

Cela montre que tout élément non nul de A est inversible, alors d'après le résultat de [9] nous avons que A est isomorphe à $\mathbb{C}$. ■

RÉFÉRENCES

1. W. Ambrose, *Structure theorems for a special class of Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **57**(1945), 364–386.
2. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*. Lecture Notes series 2, London Math. Soc., Cambridge, 1971.
3. C. V. Devapakkiam, *Hilbert space methods in the theory of Jordan algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78**(1975), 293–300.
4. L. Ingelstam, *Hilbert algebras with identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **69**(1963), 794–796.
5. N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. **39**.
6. J. M. Martinez, *JV-algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **87**(1980), 47–50.
7. P. A. Rodriguez, *Non-associative normed algebras spanned by Hermitian elements*, Proc. London Math. Soc. (3)**47**(1983), 258–274.
8. M. F. Smiley, *Real Hilbert algebras with identity*, Proc. Amer. Math. Soc. **16**(1965), 440–441.
9. K. Urbanik and F. B. Wright, *Absolute-valued algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 861–866.

Département de Mathématiques et de Statistiques
Université de Montréal
C.P. 6128 succursale A
Montréal, Québec H3C 3J7

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-072-5 Published online by Cambridge University Press