

# CONSTRUCTION DE SOLUTIONS PERIODIQUES DU PROBLEME RESTREINT ELLIPTIQUE PAR LA METHODE DE HALE

Anne Sergysels-Lamy, Roland Sergysels  
Service de Mécanique Analytique, Université Libre  
de Bruxelles, Belgique

## 1. INTRODUCTION

Les équations du mouvement du troisième corps, dans les variables sans dimensions définies par Szebehely (1967, page 591) ont été données dans un article précédent (Sergysels-Lamy, 1975). Plusieurs changements de variables successifs permettent de ramener ces équations à la forme standard au sens de Hale :

$$\frac{dx}{d\theta} = \epsilon X(x, \theta, \epsilon) \quad (1)$$

où  $x$  et  $X$  sont des vecteurs à quatre composantes, et  $X$  est périodique en la variable indépendante  $\theta$ , anomalie vraie de l'orbite du troisième corps dans le système synodique.

Il est alors possible de démontrer, en utilisant le rapport de masse des primaires comme petit paramètre  $\epsilon$ , l'existence d'une classe de solutions de longue période du système (1), à l'aide de la méthode de Hale (1963). La démonstration d'existence reste valable pour un rapport de masse quelconque, à condition de considérer le mouvement au voisinage d'un des primaires.

## 2. RESULTATS NUMERIQUES

L'adaptation de la méthode de Hale au calcul numérique des solutions périodiques d'un système sous forme standard a été effectuée par un des auteurs (Sergysels, 1975).

La méthode comprend deux parties.

i) L'intervalle  $[0, T]$ , où  $T$  est la période du système (1),

est divisé en  $2n$  pas :

$$\theta_i = \frac{(i-1)T}{2n} \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1 \quad (2)$$

La suite numérique  $x_n(\theta_i)$  est alors construite de la manière suivante, les intégrales étant évaluées par des méthodes classiques (règle du trapèze, règle de Simpson, ...). Le premier élément de la suite est le vecteur constant  $a$  :

$$x_0(\theta_i) = a. \quad (3)$$

Connaissant l'élément  $x_n$ , l'élément  $x_{n+1}$  est obtenu par l'algorithme :

$$PX(x_n) = \frac{1}{T} \int_0^T d\theta X[x_n(\theta_i, a, \epsilon), \theta_i, \epsilon] \quad (4)$$

$$F[x_n(\theta_i, a, \epsilon), \theta_i, \epsilon] = \int_0^{\theta_i} d\theta \{X[x_n(\theta_j, a, \epsilon), \theta_j, \epsilon] - PX(x_n)\} \quad (5)$$

$$PF(x_n) = \frac{1}{T} \int_0^T d\theta F[x_n(\theta_i, a, \epsilon), \theta_i, \epsilon] \quad (6)$$

$$x_{n+1}(\theta_i, a, \epsilon) = a + \epsilon F[x_n(\theta_i, a, \epsilon), \theta_i, \epsilon] - \epsilon PF(x_n). \quad (7)$$

ii) La suite  $\{x_n\}$  converge pour  $\epsilon$  suffisamment petit et sa limite  $x^*$  est une solution  $T$ -périodique de moyenne  $a$  du système (1) s'il existe un vecteur  $a(\epsilon)$  tel que :

$$\int_0^T d\theta X[x^*(\theta_i, a, \epsilon), \theta_i, \epsilon] = 0. \quad (8)$$

La méthode analytique ne permet de calculer la valeur de  $a$  qu'en  $\epsilon = 0$ . Il est donc nécessaire de rechercher  $a(\epsilon)$ , soit en appliquant la méthode de Newton-Raphson aux équations de bifurcation (8), soit en effectuant un balayage systématique des valeurs de  $a$ , ce qui n'est évidemment pratique que si le vecteur  $a$  n'est pas de dimension trop élevée.

Dans le cas du problème restreint elliptique le vecteur  $a$  est de dimension quatre. Toutefois, pour effectuer la démonstration d'existence nous avons dû utiliser la propriété E de Hale (1963) (page 43) :

$$S X(Sx, -\theta, \epsilon) = -X(x, \theta, \epsilon) \quad (9)$$

où  $S$  est la matrice diag  $(1, -1, 1, -1)$ .

Nous nous restreignons alors à la recherche d'orbites symé-

triques par rapport à la ligne des syzygies, pour lesquelles nous avons la propriété :

$$S_a = a. \quad (10)$$

Les composantes  $a_2$  et  $a_4$  du vecteur  $a$  sont donc nulles. Comme l'application de la méthode de Newton-Raphson exige une itération supplémentaire et allonge donc le programme nous avons recherché la valeur des composantes non nulles par balayage, jusqu'à ce que les membres de gauche des équations (8) soient inférieurs à  $10^{-14}$ .

Tous les calculs ont été effectués dans le cas où les deux primaires sont de masses égales et nous avons choisi une période  $T$  de  $40\pi$ .

Les figures 1 et 2 représentent une orbite rétrograde, respectivement dans le système pulsant et dans le système physique, l'excentricité de l'orbite des primaires étant .6. Dans le système pulsant, le primaire perturbateur se trouve à 20 unités sur l'axe  $\xi$ . Dans le système physique, il oscille entre 5.625 et 22.5 unités sur l'axe  $x$ .

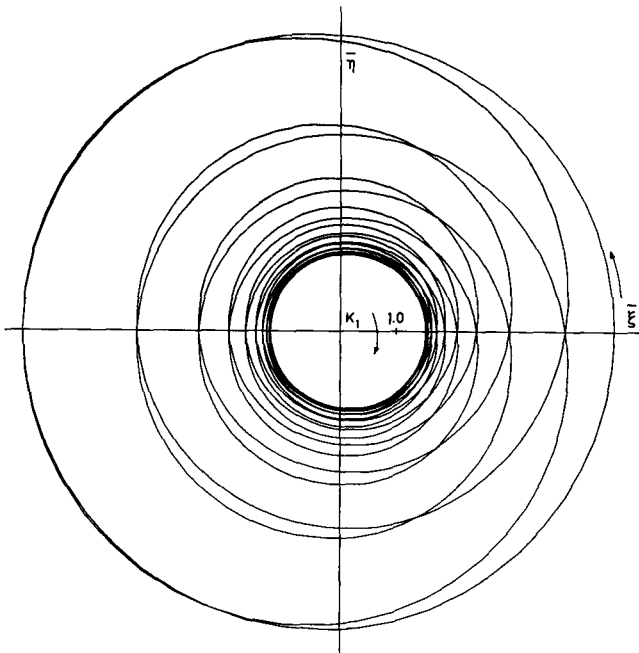


Fig.1. Orbite rétrograde, système pulsant,  $e=.6$ .

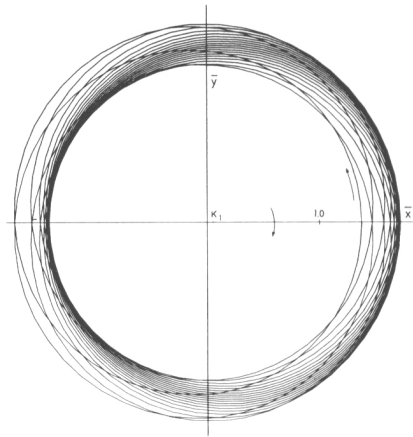


Fig. 2. Orbite rétrograde, système physique,  $e=.6$ .

Les figures 3 et 4 représentent une orbite directe, l'excentricité des primaires étant  $.4$ . Dans le système pulsant, le primaire perturbateur est situé à 20 unités sur l'axe  $\xi$ . Dans le système physique, il oscille entre 8.57142 et 20 unités sur l'axe  $x$ .

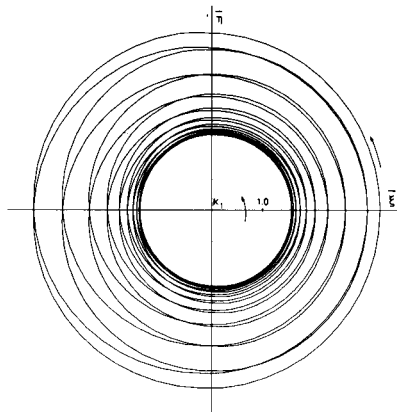


Fig. 3. Orbite directe, système pulsant,  $e=.4$ .

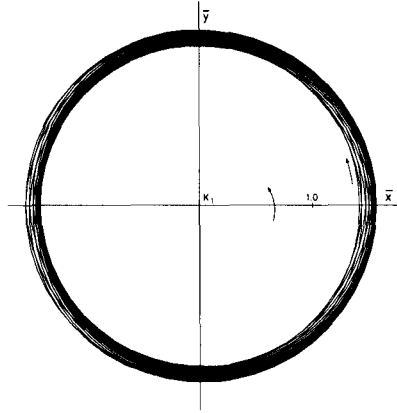


Fig. 4. Orbite directe, système physique,  $e=.4$ .

Les figures 5 et 6 représentent une orbite directe, l'excentricité des primaires étant .001. Bien que sa période soit de  $40\pi$ , les lobes sont pratiquement superposés, donnant à cette orbite une période apparente de  $2\pi$ .

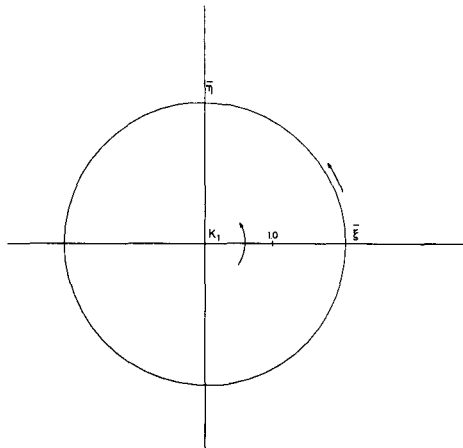


Fig. 5 Orbite directe, système pulsant,  $e=.001$ .

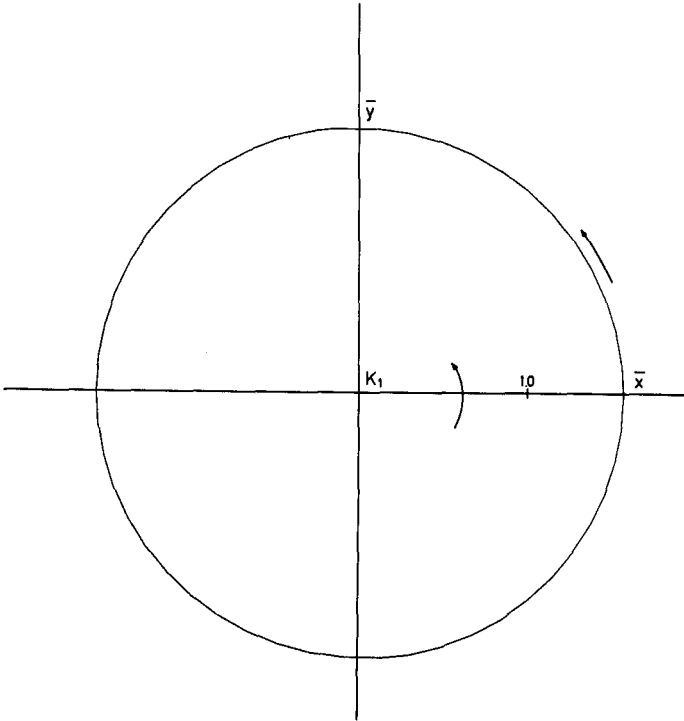


Fig. 6. Orbite des primaires Orbite génératrice

L'évolution de l'excentricité de l'orbite génératrice, en fonction de l'excentricité de l'orbite des primaires est résumée dans le tableau 1.

	Orbite des primaires	Orbite génératrice
Orbites directes	.001	.000081
	.2	.0219
	.3	.041
	.4	.073
Orbites rétrogrades	.001	.000079
	.2	.0189
	.4	.070
	.6	.229

Tableau 1.

Il semble donc que la classe d'orbites que nous avons étudiée constitue le prolongement des solutions périodiques de première sorte du problème restreint circulaire.

'Construction of Periodic Orbits of the Elliptic Restricted Problem by Hale's Method' by A. Sergysels-Lamy

ABSTRACT. This paper contains numerical results following the theoretical demonstration already published in *Celes. Mech.* 11 (1975) 43; the numerical method is described in R. Sergysel's paper in *Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg.* 61 (1975) 888.

#### REFERENCES

- HALE, J.K. : 1963, *Oscillations in Nonlinear Systems*, Mc Graw-Hill, New-York.
- SERGYSELS, R : 1975, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sc.* 61, 888.
- SERGYSELS-LAMY, A. : 1975, *Celes. Mech.* 11, 43.
- SZEBEHELY, V. : 1967, *Theory of Orbits*, Academic Press, New-York.