Canad. Math. Bull. Vol. **50** (4), 2007 pp. 594–597

Ramification des groupes abéliens d'automorphismes des corps $\mathbb{F}_q((X))$

François Laubie

Résumé. Soit q une puissance d'un nombre premier p. Dans cette note on établit la généralisation suivante d'un théorème de Wintenberger : tout sous-groupe abélien fermé du groupe des $\mathbb{F}_q$-automorphismes continus du corps des séries formelles $\mathbb{F}_q((X))$ muni de sa filtration de ramification est un groupe filtré isomorphe au groupe de Galois d'une extension abélienne d'un corps local à corps résiduel $\mathbb{F}_q$, filtré par les groupes de ramification de l'extension en numérotation inférieure.

Dans cette note, les corps locaux considérés admettent le corps fini $\mathbb{F}_q$ pour corps résiduel et tous les automorphismes de corps valués sont supposés continus.

Le groupe $\mathcal{G}$ des $\mathbb{F}_q$-automorphismes de $\mathbb{F}_q((X))$ est compact totalement discontinu pour la topologie déduite de la valuation $i(\sigma) = \operatorname{ord}(\frac{\sigma(X)}{X} - 1)$. Ses sous-groupes de ramification sont les $\mathcal{G}[x] = \{\sigma \in \mathcal{G} \ ; \ i(\sigma) \geq x\}$. Si n est le plus petit entier $\geq x > 0$, $\mathcal{G}[x] = \mathcal{G}[n]$ et $(\mathcal{G} : \mathcal{G}[n]) = (q-1)q^{n-1}$. Si G est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$, ses sous-groupes de ramification sont les $G[x] = \mathcal{G}[x] \cap G$ et leur filtration définit sur G la topologie induite. La fonction φ_G de Hasse–Herbrand est définie par $\varphi_G(x) = \int_0^x \frac{dt}{(G:G[t])}$. On dit que G est arithmétiquement profini (resp. strictement arithmétiquement profini) si $\lim_{x\to+\infty} \varphi_G(x) = +\infty$ (resp. si $\liminf_{x\to+\infty} \frac{x}{(G:G[x])} > 0$).

Toute extension abélienne totalement ramifiée L d'un corps local K est strictement arithmétiquement profinie en ce sens que $\liminf_{u\to+\infty} \frac{\psi_{L/K}(u)}{(G:G(u))} > 0$ où $(G(u))_{u\geq 0}$ désigne la filtration de ramification de $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ *en numérotation supérieure* et $\psi_{L/K}$ la fonction de Hasse–Herbrand : $\psi_{L/K}(u) = \int_0^u (G : G(t))\, dt$. *La numérotation inférieure* de la ramification de L/K est donnée par $G[x] = G(\varphi_{L/K}(x))$ où $\varphi_{L/K}$ est la fonction réciproque de $\psi_{L/K}$.

La théorie du corps de normes [2] permet d'associer à L/K un sous-groupe abélien fermé A de $\mathcal{G}$ et un isomorphisme Φ de $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ sur A tel que $\Phi(G[x]) = A[x]$, pour tout $x \geq 0$.

Réciproquement si A est un sous-groupe abélien fermé et topologiquement de type fini de $\mathcal{G}$, J.-P. Wintenberger a montré [3, corollaire 3.2] qu'il existe une extension abélienne L d'un corps local K et un isomorphisme Φ de $\operatorname{Gal}(L/K)$ sur A comme ci-dessus. Il en résulte [3, théorème 4.1] que tout sous-groupe abélien A de $\mathcal{G}$, qu'il soit topologiquement de type fini ou non, satisfait les congruences suivantes qui généralisent le théorème de Hasse–Arf : $i_0 \equiv 0 \bmod (A : A[i_0])$ et $i_n \equiv i_{n+1} \bmod (A : A[i_{n+1}])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $(i_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite croissante des sauts de la filtration $(A[x])_{x\geq 0}$. Autrement dit le groupe A est arithmétiquement

Reçu par la rédaction le 30 juin, 2005 .
Classification (AMS) par sujet: 11S15.

https://doi.org/10.4153/CMB-2007-057-0 Published online by Cambridge University Press

profini et les sauts de sa filtration de ramification en numérotation supérieure définie par $A(u) = A[\varphi_A(u)]$ sont entiers.

Théorème 1 *Pour tout sous-groupe abélien fermé A de $\mathcal{G}$, il existe une extension abélienne L/K de corps locaux à corps résiduel $\mathbb{F}_q$ et un isomorphisme Φ de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ sur A tel que $\Phi(G[x]) = A[x]$ pour tout $x \geq 0$. En particulier le groupe d'automorphismes A est strictement arithmétiquement profini.*

Remarque

(i) Il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où A n'est pas un groupe topologiquement de type fini. L'ensemble des $\mathbb{F}_q$-automorphismes de $\mathbb{F}_q((X))$ qui appliquent X sur une série de la forme $\sum_{i\geq 0} a_i X^{q^i}$, $a_i \in \mathbb{F}_q$, $a_0 \neq 0$, est un exemple de sous-groupe abélien fermé de $\mathcal{G}$ qui n'est pas topologiquement de type fini. Cet exemple a déjà été traité [4, pp. 43–44].

(ii) On ignore si l'on peut prolonger le foncteur de Wintenberger (voir [2, §1]) de sorte que tous les couples de la forme $(\mathbb{F}_q((X)), A)$ ci-dessus soient dans son image essentielle.

Démonstration Supposons que le sous-groupe A de $\mathcal{G}$ ne soit pas topologiquement de type fini. Soit $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \ldots$ les sauts non nuls de la filtration $(A[x])_{x\geq 0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un système de représentants T_n des classes de A modulo $A[i_n]$ de sorte que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ soit croissante et désignons par A_n l'adhérence du sous-groupe de A engendré par T_n. L'inclusion $A_n \hookrightarrow A$ induit un isomorphisme de groupes filtrés de $A_n/A_n[i_n]$ sur $A/A[i_n]$.

Étant donné un groupe G muni d'une filtration $(G_x)_{x\geq 0}$, on appelle G-extension toute extension galoisienne L d'un corps local K telle qu'il existe un isomorphisme Φ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur G vérifiant $\forall x \geq 0, \Phi(\mathrm{Gal}(L/K)[x]) = G_x$. Si A contient au moins un élément d'ordre infini, pour tout entier n assez grand, A_n est un groupe de Lie p-adique abélien infini et il existe une extension abélienne L_n d'un corps local K_n à corps résiduel $\mathbb{F}_q$ qui est une A_n-extension [3]. C'est encore vrai avec $K_n = \mathbb{F}_q((X))$ si tout élément de A est d'ordre fini. En particulier les n premiers sauts de ramification supérieurs de A, et donc tous les sauts de ramification supérieurs $\{u_m = \varphi_A(i_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ de A sont entiers.

Soit ψ_A (resp. ψ_{A_n}) la fonction réciproque de φ_A (resp. φ_{A_n}). On note $A(u) = A[\psi_A(u)]$ et $A_n(u) = A_n[\psi_{A_n}(u)]$, pour tout $u \geq 0$, et on désigne par υ_A (resp. υ_{A_n}) la fonction d'ordre de la filtration $(A(u))_{u\geq 0}$ (resp. $(A_n(u))_{u\geq 0}$) : $\forall \sigma \in A, \upsilon_A(\sigma) = \sup_{\sigma\in A(u)} u$ (resp. $\forall \sigma \in A_n, \upsilon_{A_n}(\sigma) = \sup_{\sigma\in A_n(u)} u$).

Montrons que, pour tout $u \geq 0$, $A(u)^p \subset A(pu)$. Supposons le contraire. Soit $\sigma_0 \in A$ tel que $\upsilon_A(\sigma_0^p) < p\upsilon_A(\sigma_0)$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > p\upsilon_A(\sigma_0)$. On peut choisir T_{n_0} de sorte que $\sigma_0 \in T_{n_0}$, alors $\upsilon_{A_{n_0}}(\sigma_0^p) < p\upsilon_{A_{n_0}}(\sigma_0)$ et une inégalité analogue a lieu dans $H = \mathrm{Gal}(L_{n_0}/K_{n_0})$. Or, pour tout $x \geq 0$, on a $H(x)^p \subset H(\lambda(x))$ avec $\lambda(x) = \min\{px, x + e_0\}$ où $e_0 \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ désigne l'indice de ramification absolu de K_{n_0} ; il en résulte que $e_0 \leq (p-1)\upsilon_A(\sigma_0)$. Pour tout entier $m \geq 0$, $L_m^{A[i_m]}/K_m$ est une $A/A[i_m]$-extension, le groupe $A/A[i_m]$ étant filtré par $(A[x]/A[i_m])_{x\in[0,i_m]}$. Pour tout entier $m \geq n_0$, considérons l'ensemble $\mathcal{A}_m$ des couples $(L/K, \{\Phi_j\})$ où L décrit les $A/A[i_m]$-extensions des extensions finies K de $\mathbb{Q}_p$ (contenues dans une clôture algébrique fixée), de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ et d'indice de ramification absolu $\leq (p-1)v_A(\sigma_0)$, et où $\{\Phi_j\}$ est l'ensemble de tous les isomorphismes Φ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $A/A[i_m]$ vérifiant $\forall x \in [0, i_m], \Phi(\mathrm{Gal}(L/K)[x]) = A[x]/A[i_m]$. Pour $m \geq m' \geq n_0$, on note $\mathcal{R}_{m,m'}$ l'application de $\mathcal{A}_m$ dans $\mathcal{A}_{m'}$ telle que $\mathcal{R}_{m,m'}(L/K, \{\Phi_j\}) = (L^{\mathrm{Gal}(L/K)[i_{m'}]}/K, \{\Phi'_{j'}\})$ où $\{\Phi'_{j'}\}$ contient les isomorphismes de groupes filtrés $\overline{\Phi}_j$ canoniquement déduit de Φ_j. On définit ainsi un système projectif d'ensembles finis non vides, il existe donc une extension abélienne M d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ et un isomorphisme Φ de $\mathrm{Gal}(M/K)$ sur A tel que $\forall x \geq 0, \Phi(\mathrm{Gal}(M/K)[x]) = A[x]$ et on conclut que le groupe A aurait alors un nombre fini de générateurs topologiques. Montrons qu'on a aussi $A_n(u)^p \subset A_n(pu)$ pour tout $u \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\varphi_{A/A_n}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(A : A[\psi_{A_n}(t)]A_n)},$$

ce qui définit une fonction concave φ_{A/A_n} vérifiant $A_n(u) = A(\varphi_{A/A_n}(u)) \cap A_n$ pour tout $u \geq 0$. Comme $\varphi_{A/A_n}(pu) \leq p\varphi_{A/A_n}(u)$, on a

$$A_n(u)^p \subset A(\varphi_{A/A_n}(u))^p \cap A_n \subset A(\varphi_{A/A_n}(pu)) \cap A_n = A_n(pu).$$

Par la théorie du corps de classes local, il s'ensuit que, pour n assez grand, le corps local K_n est de caractéristique p car si son indice de ramification absolu e_n était fini, on aurait $A_n(u)^p = A_n(u + e_n)$ pour tout u assez grand.

On peut donc supposer que $K_n = \mathbb{F}_q((X))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme ci-dessus, il en résulte un système projectif $\{\mathcal{A}_m, \mathcal{R}_{m,m'}\}$, $\mathcal{A}_m$ étant un ensemble de couples $(L/\mathbb{F}_q((X))/K, \{\Phi_j\})$ où $L/\mathbb{F}_q((X))$ est une $A/A[i_m]$-extension. Comme les $A/A[i_m]$-extensions de $\mathbb{F}_q((X))$ sont en nombre fini et que $A = \varprojlim A/A[i_m]$, un élément de la limite projective non vide est constitué d'une A-extension $M/\mathbb{F}_q((X))$ et des isomorphismes Φ de $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{F}_q((X)))$ sur A tels que $\forall x \geq 0,\ \Phi(\mathrm{Gal}(M/\mathbb{F}_q((X)))[x]) = A[x]$. ■

Soit U le groupe des unités de l'anneau $\mathbb{F}_q[[X]]$ filtré par les $U^{(n)} = 1 + X^n\mathbb{F}_q[[X]]$.

Corollaire 1 *Soit G un groupe abélien compact muni d'une filtration $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui n'est pas topologiquement de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe un sous-groupe abélien fermé A de $\mathcal{G}$ et un isomorphisme Φ de G sur A tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(G^n) = A[\varphi_A(n)]$.*
(ii) *Il existe un homomorphisme surjectif de groupes Ψ de U sur G tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Psi(U^{(n)}) = G^n$.*
(iii) *Le groupe quotient G/G^1 est cyclique d'ordre divisant $q-1$, pour tout $n \geq 1$, les groupes G^n/G^{n+1} sont p-élémentaires d'ordre $\leq q$, l'élévation à la puissance p applique G^n sur G^{pn} et induit une surjection de G^n/G^{n+1} sur G^{pn}/G^{pn+1}.*

https://doi.org/10.4153/CMB-2007-057-0 Published online by Cambridge University Press

Démonstration Compte-tenu du théorème, ces équivalences résultent de la théorie du corps de classes local et des théorèmes de M. A. Marshall. (Voir [1], en particulier, les théorèmes 5, 6 et 7. La démonstration du théorème 7 s'applique sans changement aux groupes abéliens infinis compacts.) ■

Corollaire 2 *Soit A le sous-groupe fermé de $\mathcal{G}[1]$ engendré par une famille infinie de $\mathbb{F}_q$-automorphismes de $\mathbb{F}_q((X))$ d'ordres finis non bornés et qui commutent deux à deux. Alors le sous-groupe fermé de A engendré par les éléments d'ordre infini n'est pas topologiquement de type fini.*

Démonstration Soit H le sous-groupe fermé de A engendré par ses éléments d'ordre infini. Comme $\mathcal{G}[1]$ est un pro-p-groupe, si H était topologiquement de type fini, il serait isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$ (pour un certain entier $r \geq 1$) et le groupe quotient A/H, étant constitué d'éléments d'ordres finis non bornés, ne serait pas compact et ne saurait donc être un groupe de Galois. ■

Remarque Le théorème principal est susceptible d'être étendu par les mêmes méthodes aux groupes compacts résolubles G de $\mathbb{F}_q$-automorphismes de $\mathbb{F}_q((X))$ qui satisfont la propriété : tout sous-groupe fermé topologiquement de type fini de G est un groupe de Lie p-adique.

Remerciements L'auteur remercie Rachid Bouchenna de l'Université d'Alger de lui avoir signalé les anomalies d'une première rédaction.

Références

[1] M. A. Marshall, *Ramification groups of Abelian local field extensions.* Canad. J. Math. **23**(1971), no. 2, 278–281.

[2] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux: applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **16**(1983), no. 1, 59–89.

[3] ———, *Extensions abéliennes et groupes d'automorphismes des corps locaux.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290**(1980), no. 5, A201–A203.

[4] ———, *Automorphismes et extensions galoisiennes de corps locaux.* Thèse du troisième cycle, Institut Fourier, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1978.

Xlim UMR 6172 CNRS-Université de Limoges
Faculté des Sciences et techniques
123, Avenue Albert Thomas
87060 Limoges
France
e-mail': francois.laubie@unilim.fr