Can. J. Math., Vol. XXXVII, No. 1, 1985, pp. 75-81

RESULTATS NOUVEAUX SUR LES FAISCEAUX QUASI-UNIPOTENTS

PHILIPPE MATHIEU

Introduction. Dans cette note, nous donnons une réponse à un problème posé dans [**5**]: nous démontrerons que le niveau de quasi-unipotence de la monodromie avec coefficients est le meilleur possible (voir le paragraphe 2 pour l'énoncé précis).

1. Faisceaux quasi-unipotents. Nous rappelons ici la définition et les propriétés fondamentales de ces faisceaux (voir [**3**], cf. [**5**]).

Par D nous désignons un disque ouvert de $\mathbf{C}$ centré à l'origine et de rayon aussi petit qu'on veut. Un faisceau $\mathbf{V}$ lisse (ou, suivant une autre terminologie, localement constant) constructible sur $D^* = D - \{0\}$ est dit *quasi-unipotent* (*de niveau* d) si la monodromie T opérant sur la fibre générique de $\mathbf{V}$ vérifie $(T^a - 1)^b = 0$, où a et b sont des entiers non-négatifs (et $b \leqq d$).

Définition (1.1). Soient X un espace analytique, Y un sous-espace analytique de X, et $\mathbf{V}$ un faisceau constructible sur $X - Y$. $\mathbf{V}$ est dit *quasi-unipotent* (*de niveau* d) *le long de* Y si, pour tout germe d'application analytique $g:D \to X$ telle que $g^{-1}(Y) = \{0\}$, $(g_{|_{D^*}})^{-1}\mathbf{V}$ est quasi-unipotent (de niveau d).

Une caractérisation fondamentale de ces faisceaux est donnée par la proposition suivante (cf. [**5**]).

PROPOSITION (1.2). *Soient X un espace analytique; Y un sous espace analytique de X à complémentaire dans X, X^*, lisse; $p:X' \to X$ une résolution des singularités de X telle que $Y' = p^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux; et* $\mathbf{V}$ *un faisceau lisse constructible sur X^*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathbf{V}$ *est quasi-unipotent le long de Y*;

(ii) $\mathbf{V}$ *est quasi-unipotent le long de* $Y - \mathrm{Sing}(Y)$;

(iii) $p^{-1}(\mathbf{V})$ *est quasi-unipotent le long de Y'*;

(iv) $p^{-1}(\mathbf{V})$ *est quasi-unipotent le long de* $Y' - \mathrm{Sing}(Y')$;

(v) *pour tout $y \in Y'$, il y a un voisinage ouvert de (y, y) dans la paire (X', Y') isomorphe à une paire $(D^{n+m}, \{0\} \times D^m)$ tel que les m automorphismes, engendrés par les rotations d'un tour autour de chacun des m axes de $\{0\} \times D^m$, opèrent sur la fibre générique de $p^{-1}(\mathbf{V})$ de façon quasi-unipotente*;

Reçu le 1 septembre 1983.

(vi) *il y a un ouvert U de Y' contenant un point de chaque composante irréductible de Y' et un isomorphisme g de $U \times D^*$ sur un voisinage de U dans X' qui induit l'application identique sur U tel que, pour tout $u \in U$, la restriction du faisceau $g^{-1}(\mathbf{V})$ à $\{u\} \times D^*$ soit quasi-unipotente.*

La démonstration de cette proposition est donnée *in extenso* dans [**3**].

Soit maintenant X une variété algébrique lisse. Comme on le sait, il existe une variété algébrique complète et lisse $\bar{X}$ et un plongement $j:X \to \bar{X}$ tel que $\bar{X} - j(X)$ soit un diviseur à croisements normaux. Nous ne ferons pas de distinction dans les notations entre X et $j(X)$. $\bar{X}$ est une *compactification* de X. On a aussi l'existence de compactifications d'un morphisme de variétés algébriques en un sens clair.

PROPOSITION (1.3). *Soient X une variété algébrique lisse et $\mathbf{V}$ un faisceau localement constant constructible sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe une compactification $\bar{X}$ de X telle que $\mathbf{V}$ soit quasi-unipotent de niveau d le long de $\bar{X} - X$;*

(ii) *pour toute compactification $\bar{X}$ de X, $\mathbf{V}$ est quasi-unipotent de niveau d le long de $\bar{X} - X$;*

(iii) *pour toute courbe algébrique localement fermée C dans X, la restriction $\mathbf{V}_{|C}$ est quasi-unipotente de niveau d le long du diviseur $\bar{C} - C$, où $\bar{C}$ est la complétion projective canonique de C.*

Définition (1.4). Sur une variété algébrique X un faisceau $\mathbf{V}$ est dit *quasi-unipotent* (*de niveau d*) s'il est constructible et satisfait aux propriétés équivalentes de la proposition précédente sur chaque strate d'une stratification de X. On vérifie que cette propriété ne dépend pas de la stratification choisie.

2. Propriétés de stabilité. Il s'agit d'étudier comment se comportent, sous les opérations usuelles sur les faisceaux, la quasi-unipotence (voir [**5**]) et son niveau. Les démonstrations complètes de ces résultats sont dans [**3**].

PROPOSITION (2.1). *Soient $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ deux faisceaux quasi-unipotents* (*de niveau d*) *sur une variété algébrique X. Les faisceaux* $\mathrm{Ext}^q(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ *et* $\mathrm{Tor}_q(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ *sont quasi-unipotents* (*de niveau d*).

On se ramène facilement par des procédés classiques à supposer que $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont lisses constructibles quasi-unipotents sur une courbe lisse X. On a

$$\mathrm{Ext}^q(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)_x \cong \mathrm{Ext}^q(\mathbf{V}_{1,x}, \mathbf{V}_{2,x}) \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Tor}_q(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)_x \cong \mathrm{Tor}_q(\mathbf{V}_{1,x}, \mathbf{V}_{2,x})$$

et on utilise le lemme suivant.

LEMME (2.2). *Un multi-foncteur additif sur la catégorie des* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels respecte la quasi-unipotence et son niveau.*

PROPOSITION (2.3). *Soient* $f:X \to Y$ *un morphisme de variétés algébriques et* $\mathbf{V}$ *un faisceau sur* Y. *Si* $\mathbf{V}$ *est quasi-unipotent de niveau* d *sur* Y, *alors* $f^{-1}(\mathbf{V})$ *est quasi-unipotent de niveau* d *sur* X. *De plus, si* $\mathbf{V}$ *est lisse ou bien si* f *est surjective, alors* $\mathbf{V}$ *est quasi-unipotent de niveau* d *si et seulement si* $f^{-1}(\mathbf{V})$ *l'est.*

Les hypothèses faites servent à assurer la constructibilité des différents faisceaux. Les assertions concernant la quasi-unipotence sont faciles à démontrer.

Le résultat fondamental est la proposition suivante. Elle répond à une question posée dans **[5]**, question naturelle eu égard aux travaux de P. Deligne (La conjecture de Weil II, Publ. Math. IHES, *52*, 1980) et de N. Nilsson (**[6]** et **[7]**).

PROPOSITION (2.4). *Soient* $f:X \to Y$ *un morphisme de variétés algébriques et* $\mathbf{V}$ *un faisceau quasi-unipotent* (*de niveau* d) *sur* X. *Le faisceau* $R^pf_!\mathbf{V}$ *est quasi-unipotent* (*de niveau* $d + p$).

Remarque. Le niveau de quasi-unipotence obtenu pour $R^pf_!\mathbf{V}$ est le meilleur possible: dans le cas où $\mathbf{V} \cong \mathbf{C}_X$, il est $p + 1$ et on sait, par des exemples de B. Malgrange, que celui-ci ne saurait être amélioré.

Soient $\bar{X} \to \bar{Y}$ une compactification de f et $g:D \to \bar{Y}$ un germe d'application analytique telle que

$$g^{-1}(\bar{Y} - Y) = \{0\}.$$

Soit Z le produit fibré $\bar{X} \times_{\bar{Y}} D$ et $\mathbf{W}$ l'image inverse par la projection $Z \to \bar{X}$ de $\mathbf{V}$ prolongé par zéro à l'infini. La Proposition (2.4) résultera du lemme suivant, où $h:Z \to D$ dénote la deuxième projection.

LEMME (2.5). $R^ph_*\mathbf{W}$ *est quasi-unipotent de niveau* $d + p$ *le long de* $\{0\}$.

LEMME (2.6). *Pour tout* $t \in D^*$ *nous avons un isomorphisme équivariant sous l'action de la monodromie*

$$H^p(Z_t,\mathbf{W}_{|Z_t}) \cong H^p(\Gamma(Z_0, i^{-1}\Omega^{\cdot}_{Z/D}(\log Z_0)(\mathbf{W}))),$$

où Z_t *désigne la fibre* (*géométrique*) *de* h *en* t *et*

$$\mathrm{i}:Z_0 \to Z$$

l'injection canonique.

Ce dernier lemme résulte de l'isomorphisme

$$\mathbf{H}^p(Z_0, R\Psi_{\mathrm{h}}\mathbf{W}) \cong \mathbf{H}^p(Z_t, \mathbf{W}_{|Z_t})$$

("suite spectrale des cycles évanescents") et du fait que les complexes $R\Psi_h \mathbf{W}$ et $i^{-1}\Omega^{\cdot}_{Z/D}(\log Z_0)(\mathbf{W})$ sont quasi-isomorphes (voir [**4**]).

La monodromie opère sur $i^{-1}\Omega^{\cdot}_{Z/D}(\log Z_0)(\mathbf{W})$ fibre par fibre. Soit T_{x_0} l'automorphisme induit par cette action sur le fibre en $x_0 \in Z_0$. Pour prouver le Lemme (2.5), il suffit de démontrer le lemme:

LEMME (2.7). *On a*

$$(T_{x_0}^{a(x_0)} - 1)^{d+p} = 0,$$

où $a(x_0): Z_0 \to \mathbf{N}^*$ *est une fonction constructible sur* Z_0.

Au voisinage de x_0, Z est difféomorphe à $\mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{C}^N$. Soit B_{x_0} une boule de rayon suffisament petit centrée en x_0 et $D' \subset D$ un disque de $\mathbf{C}$ centré à l'origine et de rayon petit devant le rayon de B. h induit une fibration

$$h': Z' = B_{x_0} \cap h^{-1}(D') \to D'$$

lisse au-dessus de D'^*. Au-dessus de D'^* cette fibration lisse est dite fibration de Milnor de h en x_0. Soit $t \in D'^*$. On obtient un difféomorphisme Ψ de Z'_t en faisant tourner t une fois autour de l'origine. Un tel difféomorphisme, dit caractéristique, induit un automorphisme T de la fibre en x_0 de

$$i^{-1}\Omega^{\cdot}_{Z/D}(\log z_0)(\mathbf{W})$$

qui est conjugué à T_{x_0}. Nous allons expliciter un tel difféomorphisme et montrer que l'automorphisme T qu'il définit vérifie

$$(T^a - 1)^{d+p} = 0.$$

Il résultera de la démonstration que a est, en tant que fonction de x_0, constructible.

Nous utiliserons pour cela la description suivante.

PROPOSITION (2.8). *Pour* $x_0 \in Z_0$ *et pour une forme linéaire générique* $z = z_{x_0}$ *sur* $\mathbf{C}^N$ *telle que* $z(x_0) = 0$, *il existe des polydisques* $D_z \times P \subset \mathbf{C}^N$ *centré en* x_0, *et* $D_z \times D'_t \subset \mathbf{C}^2$ *centré à l'origine et une courbe*

$$\Delta = \Delta_{x_0} \subset D_z \times D'_t$$

tels que:

(i) *la restriction* Φ *de l'application* (z, h) *à* $D_z \times P \cap Z'$ *induit une fibration lisse de* $\Phi^{-1}(D_z \times D'_t - \Delta)$ *sur* $D_z \times D'_t - \Delta$ *et la restriction de* $\mathbf{W}$ *à* $D_z \times D'_t - \Delta$ *est lisse*;

(ii) h *induit une fibration lisse de* $\Phi^{-1}(D_z \times D'_t - D_z \times \{0\})$ *sur* $D'_t - \{0\}$ *isomorphe fibre à fibre à la fibration de Milnor de* h *en* x_0;

(iii) *la restriction de* Φ *à* $\{z = 0\}$ *est isomorphe fibre à fibre à la fibration de Milnor en* x_0 *de la restriction de* h *à* $Z' \cap \{z = 0\}$;

(iv) *on obtient un difféomorphisme caractéristique* Ψ *en relevant un carrousel* ψ *dont l'ensemble des points distingués est* $D_z \times \{t\} \cap \Delta$:

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}(D_z \times \{t\}) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \Phi^{-1}(D_z \times \{t\}) \arrow[d, "\Phi"] \\ D_z \times \{t\} \arrow[r, "\psi"] & D_z \times \{t\} \end{tikzcd}$$

(v) *les exposants de Puiseux des branches de* Δ *sont constructibles en tant que fonctions de* x_0.

Les idées de la construction précédente sont essentiellement dues à N. Nilsson ([**6**]), à R. Thom et à D. T. Lê qui a popularisé, sous le nom de carrousel, une construction de N. Nilsson (loc. cit. et [**7**]). Voir [**2**] pour la définition de la notion de carrousel.

La proposition précédente est essentiellement l'énoncé (1.1) de [**2**]. (v) résulte du travail de O. Zariski [**8**].

Pour démontrer le Lemme (2.6), on applique au carrousel ψ la technique des paragraphes 3 et 4 du travail de N. Nilsson [**7**]. L'assertion (v) de la Proposition (2.7) entraîne la constructibilité de la fonction $a(x_0)$.

COROLLAIRE (2.9). *Avec les notations ci-dessus, soient*

$$\omega \in \Gamma(Z', \Omega^n_{Z'/D'}(\log z_o)(\mathbf{W})) \quad et$$

$$\gamma(t) \in H_n(Z'_t)$$

une fonction holomorphe de $t \in D'^*$. *On a un développement en série convergent dans* D'^*:

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \sum_{\substack{0 \leqq k \leqq n+d \\ \alpha \in \mathbf{Q}}} c_{\alpha,k} t^\alpha (\log t)^k,$$

l'ensemble des α *étant borné inférieurement, les* $\exp(2\pi i\alpha)$ *étant des valeurs propres de la monodromie, et* $c_{\alpha,k} \in \mathbf{C}$.

Que la période $\int_{\gamma(t)}\omega$ admette un développement du type indiqué est un résultat classique ("théorie de Picard-Fuchs"); les résultats précédents donnent la borne $n + d$ pour k.

COROLLAIRE (2.10). *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme de variétés algébriques et* $\mathbf{V}$ *un faisceau quasi-unipotent sur* X *de niveau* d. *Alors* $R^p f_* \mathbf{V}$ *est quasi-unipotent de niveau* $(p + 1)\left(\frac{p}{2} + d\right)$.

Soit $j:X \to \bar{X}$ une compactification de Y et $\bar{f}$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

On a une suite spectrale:

$$E_2^{p,q-p} = R^p\bar{f}_*R^{q-p}j_*\mathbf{V} \Rightarrow R^pf_*\mathbf{V}.$$

Les faisceaux $R^{q-p}j_*\mathbf{V}$ sont quasi-unipotents de niveau d; le faisceau $R^p\bar{f}_*R^{q-p}j_*\mathbf{V}$ est quasi-unipotent de niveau $p + d$. La suite spectrale ci-dessus donne:

$$Gr_q^F R^pf_*\mathbf{V} \cong E_\infty^{p-q,q},$$

où F est la "seconde filtration". Ainsi $R^pf_*\mathbf{V}$ est quasi-unipotent de niveau

$$\sum_{q=0}^{p} p - q + d = (p + 1)\left(\frac{p}{2} + d\right).$$

PROPOSITION (2.11). *Soit $f:X \to D$ un morphisme de variétés algébriques lisse au-dessus de D^* et tel que sa fibre X_0 en $0 \in D$ soit un diviseur à croisements normaux et à composantes lisses. Soit encore $\mathbf{V}$ un faisceau sur $X - X_0$ quasi-unipotent le long de X_0 de niveau d. Alors les faisceaux* (*sur* X_0) *des cycles évanescents $R^p\Psi_f\mathbf{V}$ sont quasi-unipotents de niveau d.*

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension relative de f (cf. L. Illusie: *in* SGA $4\frac{1}{2}$, Théorèmes de finitude, Springer, 1977). Puisque le problème est local, on peut supposer $X \subset \mathbf{C}^N$. Par l'hypothèse de récurrence, les restrictions de $R^p\Psi_f\mathbf{V}$ à toute fibre générale des diverses projections

$$X_0 = f^{-1}(0) \subset \mathbf{C}^N \overset{pr_i}{\to} \mathbf{C}$$

sont quasi-unipotentes de niveau d. Il résulte facilement de ceci qu'il existe, pour $1 \leqq i \leqq N$, un ouvert de Zariski U_i de $\mathbf{C}$, un faisceau $\mathscr{H}_i$ quasi-unipotent de niveau d sur $pr_i^{-1}(U_i)$ et un morphisme

$$\mathscr{H}_i \to R^p{}_f\mathbf{V}_{|pr_i^{-1}(U_i)}$$

dont la restriction à toute fibre $pr_i^{-1}(x)$, $x \in U_i$, est un isomorphisme. Ce morphisme définit

$$v_i : j_{i!}\mathscr{H}_i \to R^p\Psi_f\mathbf{V},$$

où on a noté j_i l'inclusion canonique de $pr_i^{-1}(U_i)$ dans X. On pose alors

$$\Psi = \bigoplus_i \operatorname{Im}(v_i).$$

Il est clair que $\Phi = R^p\Psi_f\mathbf{V}/\Psi$ est un faisceau (sur X_0) à support fini. Puisque la catégorie des faisceaux quasi-unipotents de niveau d sur X_0 est stable par extension (i.e., épaisse) il nous reste à prouver que Φ est quasi-unipotent de niveau d; ce qui revient ici à démontrer:

LEMME (2.12). *Le faisceau Φ est constructible.*

En prenant l'adhérence de X dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, nous pouvons supposer X projectif. On a alors la suite spectrale des cycles évanescents:

$$E_2^{p,q} = H^p(X_0, R^q\Psi_f\mathbf{V}) \Rightarrow H^{p+q}(X_t, \mathbf{V}_{|X_t}),$$

pour $t \in D^*$. Pour que Φ soit constructible il suffit que $H^0(X_0, \Phi)$ soit de dimension finie. La suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \to \Psi \to R^p\Psi_f\mathbf{V} \to \Phi \to 0$$

fournit les isomorphismes $E_2^{p,q} \cong H^p(X_0, \Phi)$ dans la catégorie quotient de celle des $\mathbf{C}$-vectoriels par la sous-catégorie épaisse des $\mathbf{C}$-vectoriels de dimension finie. Dès lors, il résulte de la dégénérescence de la suite spectrale précédente que

$$E_2^{0,q} \cong H^q(X_t, \mathbf{V}_{|X_t}).$$

$H^0(X_0, \Phi)$ est donc de dimension finie et le lemme est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. T. Lê, *Le théorème de la monodromie singulier*, CRAS de Paris *288*, série A, 985-988.
2. ——— *The geometry of the monodromy theorem*; in *Ramanujam, a tribute* (Springer, 1977), 157-173
3. P. Mathieu, *On quasi-unipotent sheaves*, à paraître dans les Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa.
4. ——— *Généralisation d'une formule de Katz-Steenbrink*, Rend. Cir. Mat. di Palermo (1985).
5. ——— *Faisceaux quasi-unipotents*; *in* Actualités math., Congrès de Luxembourg (Gauthier-Villars, Paris, 1981).
6. N. Nilsson, *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*, Ark. f. Mat. *5* (1965), 463-476.
7. ——— *Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals*, Ark. f. Mat. *18* (1980), 181-198.
8. O. Zariski, *Studies in equisingularity II*, Amer. J. of Math. *87* (1965) 972-1006.

Scuola Normale Superiore,
Pise, Italy