Canad. Math. Bull. Vol. **44** (1), 2001 pp. 115–120

Approximation algébrique simultanée de nombres de Liouville

Damien Roy

Abstract. The purpose of this paper is to show the limitations of the conjectures of algebraic approximation. For this, we construct points of $\mathbf{C}^m$ which do not admit good algebraic approximations of bounded degree and height, when the bounds on the degree and the height are taken from specific sequences. The coordinates of these points are Liouville numbers.

1 Introduction et résultat principal

Le but de ce travail est d'indiquer certaines limites aux conjectures d'approximation algébrique en construisant des points complexes de $\mathbf{C}^m$ qui se laissent mal approcher par des points algébriques de degré et de hauteur bornés. Comme notre construction le montrera, les coordonnées de ces points sont des nombres de Liouville.

Rappelons d'abord le contexte. On fixe un entier $m \geq 1$. On note $\bar{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$ et on définit le degré et la hauteur d'un point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de $\bar{\mathbf{Q}}^m$ en posant

$$\deg(\underline{\alpha}) = [\mathbf{Q}(\underline{\alpha}) : \mathbf{Q}] \quad \text{et} \quad h(\underline{\alpha}) = \sum_v \frac{d_v}{\deg(\underline{\alpha})} \log \max\{1, |\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_m|_v\},$$

où la somme porte sur toutes les places non triviales v du corps $\mathbf{Q}(\underline{\alpha})$, où d_v désigne le degré local de v, et où $|\ |_v$ désigne la valeur absolue de $\mathbf{Q}(\underline{\alpha})$ associée à v qui étend la valeur absolue usuelle de $\mathbf{Q}$ si $v|\infty$ ou la valeur absolue p-adique de $\mathbf{Q}$ si $v|p$. On définit aussi la taille de $\underline{\alpha}$ par

$$t(\underline{\alpha}) = \deg(\underline{\alpha}) \max\{1,\ h(\underline{\alpha})\}.$$

Avec ces notations, on peut reformuler de la manière suivante la conjecture $5'$ de M. Laurent dans [1]:

Conjecture Soit $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^m$ et soit k le degré de transcendance de $\mathbf{Q}(\underline{\theta})$ sur $\mathbf{Q}$. Supposons $k \geq 1$. Alors il existe une constante $c = c(\underline{\theta}) > 0$ qui possède la propriété suivante. Si $(d_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'entiers positifs et $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite non bornée de nombres réels positifs avec

$$d_n \leq d_{n+1} \leq 2d_n, \quad t_n \leq t_{n+1} \leq 2t_n \quad \text{et} \quad d_n \leq t_n$$

Reçu par les éditeurs le 22 janvier 1999.
Travail partiellement subventionné par le CRSNG et le CICMA.
Classification (AMS) par sujet: 11J82.

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-014-0 Published online by Cambridge University Press

pour tout $n \geq 0$, alors, pour une infinité d'entiers n, il existe un point $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{Q}}^m$ avec

$$\deg(\underline{\alpha}) \leq d_n, \quad t(\underline{\alpha}) \leq t_n \quad \text{et} \quad \|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \leq \exp(-cd_n^{1/k} t_n),$$

où $\| \ \|$ désigne la norme du maximum dans $\mathbf{C}^m$.

Cette conjecture est démontrée pour $k = 1$ dans [2], avec en plus une minoration du degré des approximations $\underline{\alpha}$ de la forme $\deg(\underline{\alpha}) \geq cd_n$. Nous allons montrer qu'on ne peut pas espérer une minoration de cette forme pour $k \geq 2$.

Dans un travail antérieur avec M. Waldschmidt, nous proposions une conjecture plus forte (Conjecture 1.7 de [4]). Dans notre énoncé la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ était remplacée par une suite de nombres réels $(h_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $1 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq 2h_n$ pour tout $n \geq 0$, et nous supposions que $d_n + h_n$ tende vers l'infini avec n. Nous espérions alors que, pour une infinité d'entiers n, il existe un point $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{Q}}^m$ avec $\deg(\underline{\alpha}) \leq d_n$, $h(\underline{\alpha}) \leq h_n$ et $\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \leq \exp(-cd_n^{1+1/k} h_n)$. Bien que cette conjecture soit encore vérifiée lorsque $k = 1$ (voir [2]), notre résultat principal montre qu'on ne peut pas en espérer autant en général:

Théorème *Soient b et c des nombres réels positifs avec*

$$c > 1 + b\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{1/m}.$$

Alors, il existe un entier $n_0 \geq 0$ et un point $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^m$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{Q}}^m$ avec

$$\deg(\underline{\alpha}) \leq n \quad \text{et} \quad h(\underline{\alpha}) \leq n^b,$$

on ait $\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \geq \exp(-n^c)$.

En effet, la conclusion du théorème implique que $\underline{\theta} \notin \bar{\mathbf{Q}}^m$ donc que le degré de transcendance de $\mathbf{Q}(\underline{\theta})$ sur $\mathbf{Q}$ est un entier $k \geq 1$. Si $m \geq 2$, on a

$$1 + b\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{1/m} < 1 + b + \frac{1}{m} \leq 1 + b + \frac{1}{k}$$

et donc la conjecture 1.7 de [4] est trop optimiste. Numériquement, le plus mauvais cas pour l'approximation algébrique se présente lorsque b est petit. Plus précisément, si on suppose $m \geq 2$ et qu'on choisit b avec $0 < b < 1$, alors on peut prendre $c = 1 + 2b^{1-1/m} < 1 + 2\sqrt{b}$, quantité qui est voisine de 1 pour b petit.

En termes de taille, on trouve:

Corollaire *Supposons $m \geq 2$. Soit t un nombre réel > 1. Alors, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$, un entier $n_0 \geq 0$ et un point $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^m$ avec $\underline{\theta} \notin \bar{\mathbf{Q}}^m$ qui possèdent la propriété suivante: si un point $\underline{\alpha} \in \bar{\mathbf{Q}}^m$ vérifie*

$$\deg(\underline{\alpha}) \leq n, \quad t(\underline{\alpha}) \leq n^t \quad \text{et} \quad \|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \leq \exp(-n^{t+1/m-\epsilon}) \tag{1}$$

pour un entier $n \geq n_0$, alors on a $\deg(\underline{\alpha}) \leq n^{1-\epsilon}$.

En effet, si ϵ est assez petit, on peut appliquer le théorème avec $b = t - 1 + \epsilon$ et $c = t + (1/m) - \epsilon$. Soit $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^m$ le point correspondant. On a $\underline{\theta} \notin \bar{\mathbf{Q}}^m$ et, si un point $\underline{\alpha}$ de $\bar{\mathbf{Q}}^m$ vérifie (1) pour un entier n assez grand, on conclut $h(\underline{\alpha}) > n^b$, donc $\deg(\underline{\alpha}) \leq t(\underline{\alpha})h(\underline{\alpha})^{-1} < n^{1-\epsilon}$. Par exemple, pour $m = 2$, le calcul montre qu'il suffit de choisir ϵ de telle sorte que $t < 1/(16\epsilon) + 1/2$.

Notons en passant que ce corollaire serait trivial si on ne précisait pas $\underline{\theta} \notin \bar{\mathbf{Q}}^m$ et ce, même si on autorisait $m = 1$. En fait, la condition $\underline{\theta} \notin \bar{\mathbf{Q}}^m$ jointe au théorème 1 de [2] implique que le corps $\mathbf{Q}(\underline{\theta})$ est de degré de transcendance au moins 2 sur $\mathbf{Q}$.

Nous renvoyons le lecteur à [1] pour un tour d'horizon plus complet des résultats connus et à l'article de P. Philippon [3] pour des résultats et des conjectures qui s'attachent à un aspect différent de l'approximation algébrique.

2 Démonstrations

La preuve du théorème est fondée sur le résultat suivant:

Proposition *Soit C_0 un nombre réel ≥ 1 et soit $\xi\colon [C_0, \infty) \to \mathbf{R}$ une fonction pour laquelle le quotient $\eta(x) = x^{-1}\xi(x)$ est croissant au sens large sur $[C_0, \infty)$ avec $\eta(C_0) > 1$. Alors, il existe une constante $C_1 \geq C_0$ et un point $\underline{\theta}$ de $\mathbf{C}^m$ qui possèdent la propriété suivante. Si d, h et v sont des nombres réels positifs avec*

$$h \geq C_1, \quad v \geq 4d\xi(2h) \quad \textit{et} \quad \xi \circ \overset{m}{\cdots} \circ \xi(2h) \geq 8dh \tag{2}$$

et si un point $\underline{\alpha}$ de $\bar{\mathbf{Q}}^m$ vérifie

$$\deg(\underline{\alpha}) \leq d \quad \textit{et} \quad h(\underline{\alpha}) \leq h$$

alors on a : $\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| > \exp(-v)$.

Pour déduire le théorème de la proposition, on choisit un nombre réel r avec

$$\frac{c-1}{b} > r > \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{1/m}$$

et on définit $\xi\colon [2, \infty) \to \mathbf{R}$ par $\xi(x) = x^r$ pour tout $x \geq 2$. Alors, pour n assez grand, toutes les conditions de la proposition sont vérifiées avec $d = n$, $h = n^b$ et $v = n^c$, et la conclusion suit.

Preuve de la proposition On définit une fonction $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de manière récursive en posant

$$\varphi(0) = [C_0] + 1 \quad \text{et} \quad \varphi(k) = \left[\xi\big(\varphi(k-1)\big)\right] + 1 \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots$$

où les crochets désignent la partie entière. Cette définition a un sens puisque $\varphi(0) \geq C_0$ et que, si on suppose $\varphi(k-1) \geq C_0$ pour un entier $k \geq 1$, on trouve

$$\varphi(k) \geq \xi\big(\varphi(k-1)\big) = \eta\big(\varphi(k-1)\big)\varphi(k-1) \geq \eta(C_0)\varphi(k-1) \geq C_0.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-014-0 Published online by Cambridge University Press

En fait, puisque $\eta(C_0) > 1$, ce calcul montre que φ est strictement croissante et vérifie $\varphi(k) \geq C_0\eta(C_0)^k$ pour tout $k \geq 0$. On en déduit que la suite de points

$$\underline{\theta}^{(k)} = (\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_m^{(k)}) \in \mathbf{Q}^m, \quad k \in \mathbf{N},$$

de coordonnées

$$\theta_j^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} (i+1)^{j-1} 2^{-\varphi(i)} \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

converge vers un point $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbf{R}^m$ lorsque k tend vers l'infini.

Pour chaque entier $k \geq 0$, on définit un polynôme $P_k(x)$ et des entiers $a_{k1}, \dots, a_{km}$ en posant

$$P_k(x) = (x-k-2)\cdots(x-k-m) = a_{k1} + a_{k2}x + \cdots + a_{km}x^{m-1}.$$

On définit aussi une forme linéaire

$$L_k(\underline{x}) = c_{k0} + c_{k1}x_1 + \cdots + c_{km}x_m \in \mathbf{Z}[\underline{x}] = \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_m]$$

en posant

$$c_{k0} = -\sum_{i=0}^{k} P_k(i+1) 2^{\varphi(k)-\varphi(i)} \quad \text{et} \quad c_{kj} = 2^{\varphi(k)} a_{kj} \quad \text{pour } j = 1, \dots, m.$$

Cette forme linéaire est construite de telle sorte qu'elle s'annule en chacun des points $\underline{\theta}^{(k)}, \dots, \underline{\theta}^{(k+m-1)}$ mais on n'utilisera pas directement ce fait. On se contente plutôt d'observer que, puisque P_k s'annule en $x = k+2, \dots, k+m$, on a:

$$|L_k(\underline{\theta})| = \Big| c_{k0} + 2^{\varphi(k)} \sum_{i=0}^{\infty} P_k(i+1) 2^{-\varphi(i)} \Big| = 2^{\varphi(k)} \sum_{i=k+m}^{\infty} P_k(i+1) 2^{-\varphi(i)}.$$

Comme $\varphi(i+1) - \varphi(i) \geq \big(\eta(C_0) - 1\big)\,\varphi(i)$ pour tout $i \geq 0$, et que la suite $\big(\varphi(i)\big)_{i\geq 0}$ croît au moins de manière exponentielle, on en déduit que

$$(3) \qquad |L_k(\underline{\theta})| \leq \frac{1}{2} e^{\varphi(k)} 2^{-\varphi(k+m)}$$

pour tout entier k assez grand. On trouve aussi

$$|c_{k0}| \leq \sum_{i=0}^{k} (k+m)^{m-1} 2^{\varphi(k)-\varphi(i)} \leq (k+m)^{m-1} 2^{\varphi(k)},$$

et que la longueur de P_k est $|P_k(-1)| \leq (k+m+1)^{m-1}$. Donc, la longueur de L_k est majorée par

$$(4) \qquad \mathcal{L}(L_k) \leq 2(k+m+1)^{m-1} 2^{\varphi(k)} \leq \frac{1}{2} e^{\varphi(k)}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-014-0 Published online by Cambridge University Press

pour tout entier k assez grand. On observe aussi que les valeurs de P_k sur $\mathbf{Z}$ sont toutes divisibles par $(m-1)!$ donc

$$c_{k0} \equiv -P_k(k+1) = (-1)^m(m-1)! \quad \bmod 2^{\varphi(k)-\varphi(k-1)}(m-1)!\,.$$

Par suite, la valeur absolue 2-adique de c_{k0} vérifie $|c_{k0}|_2 = |(m-1)!|_2 \geq 2^{-m}$. D'autre part, puisque les entiers $c_{k1}, \dots, c_{km}$ sont tous divisibles par $2^{\varphi(k)}$, on a aussi $\max_{1\leq j\leq m} |c_{kj}|_2 \leq 2^{-\varphi(k)}$. On en déduit que si $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est un zéro de L_k dans $\bar{\mathbf{Q}}^m$, alors, pour chaque place v de $\mathbf{Q}(\underline{\alpha})$ au-dessus de 2, on a:

$$2^{-m} \leq |c_{k0}|_v = |c_{k1}\alpha_1 + \cdots + c_{km}\alpha_m|_v \leq 2^{-\varphi(k)} \max\{|\alpha_1|_v, \dots, |\alpha_m|_v\}$$

et par suite $h(\underline{\alpha}) \geq \bigl(\varphi(k) - m\bigr) \log 2$.

Soit k_0 un entier ≥ 0 tel que les inégalités (3), (4) et $\bigl(\varphi(k) - m\bigr)\log 2 \geq \varphi(k)/2$ soient vérifiées pour tout $k > k_0$. On pose $C_1 = \varphi(k_0)/2$. On suppose aussi qu'il existe des nombres réels positifs d, h et v qui vérifient les conditions (2), et un point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \bar{\mathbf{Q}}^m$ avec $\deg(\underline{\alpha}) \leq d$ et $h(\underline{\alpha}) \leq h$, comme dans l'énoncé de la proposition. Il reste à montrer $\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| > \exp(-v)$.

L'hypothèse $\deg(\underline{\alpha}) \leq d$ implique $d \geq 1$. De plus, puisque φ est croissante et non bornée, il existe un entier $k > k_0$ tel que

$$\frac{1}{2}\varphi(k-1) \leq h < \frac{1}{2}\varphi(k). \tag{5}$$

Comme $h(\underline{\alpha}) \leq h < \varphi(k)/2 \leq \bigl(\varphi(k) - m\bigr)\log 2$, les considérations précédentes entraînent $L_k(\underline{\alpha}) \neq 0$. On peut donc minorer la valeur absolue de $L_k(\underline{\alpha})$ grâce à l'inégalité de Liouville. En utilisant la majoration de $\mathcal{L}(L_k)$ donnée par (4), on obtient ainsi

$$\log |L_k(\underline{\alpha})| \geq -\deg(\underline{\alpha}) h\bigl(L_k(\underline{\alpha})\bigr) \geq -\deg(\underline{\alpha})\bigl(\log \mathcal{L}(L_k) + h(\underline{\alpha})\bigr) \geq -d\bigl(\varphi(k) + h\bigr)\,.$$

Grâce à (3) et (4), on trouve aussi

$$|L_k(\underline{\alpha})| \leq |L_k(\underline{\theta})| + \mathcal{L}(L_k)\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\| \leq e^{\varphi(k)} \max\{2^{-\varphi(k+m)}, \|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\|\}.$$

En confrontant ces deux estimations et en tenant compte de la majoration de h fournie par (5), on obtient

$$\min\{\varphi(k+m)\log 2, -\log\|\underline{\theta} - \underline{\alpha}\|\} \leq (d+1)\varphi(k) + dh \leq \frac{5}{2}d\varphi(k). \tag{6}$$

Or, en utilisant cette même inégalité (5) puis l'hypothèse (2), la définition récursive de φ livre

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(k+m)}{\varphi(k)} &\geq \frac{\xi \circ \overset{m}{\cdots} \circ \xi\bigl(\varphi(k)\bigr)}{\varphi(k)} = \prod_{i=0}^{m-1} \eta \circ \xi \circ \overset{i}{\cdots} \circ \xi\bigl(\varphi(k)\bigr) \\ &\geq \prod_{i=0}^{m-1} \eta \circ \xi \circ \overset{i}{\cdots} \circ \xi(2h) = \frac{\xi \circ \overset{m}{\cdots} \circ \xi(2h)}{2h} \geq 4d.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-014-0 Published online by Cambridge University Press

On en déduit $\varphi(k{+}m)\log 2 \geq 4\log(2)d\varphi(k) > (5/2)d\varphi(k)$, et par suite l'inégalité (6) combinée à la minoration de h donnée par (5) fournit

$$-\log\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\| \leq \frac{5}{2}d\varphi(k) \leq \frac{5}{2}d\Big(\xi\big(\varphi(k-1)\big)+1\Big) \leq \frac{5}{2}d\big(\xi(2h)+1\big).$$

Comme $\xi(2h) \geq 2h \geq 2$, on conclut à l'aide de (2)

$$-\log\|\underline{\theta}-\underline{\alpha}\| \leq \frac{5}{2}d\cdot\frac{3}{2}\xi(2h) < 4d\xi(2h) \leq \nu.$$

Références

[1] M. Laurent, *New methods in algebraic independence.* In: Number Theory (eds. Györy, Pethö and Sós), Walter de Gruyter, Berlin, 1998, 311–330.

[2] M. Laurent et D. Roy, *Sur l'approximation algébrique en degré de transcendance un.* Ann. Inst. Fourier **49**(1999), à paraître.

[3] P. Philippon, *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques.* J. Number Theory **64**(1997), 291–338.

[4] D. Roy and M. Waldschmidt, *Simultaneous approximation and algebraic independence.* The Ramanujan Journal **1**(1997), 379–430.

Département de Mathématiques et de Statistiques
Université d'Ottawa
Ottawa, Ontario
K1N 6N5