Canad. Math. Bull. Vol. **24** (2), 1981

SUR UNE FAMILLE DE GROUPES ABÉLIENS SUPER-DÉCOMPOSABLES

PAR
K. BENABDALLAH* ET A. BIRTZ

Un groupe abélien est dit super-décomposable si il ne possède pas de facteur direct indécomposable non nul. Les groupes super-décomposables doivent être nécessairement sans-torsion et un premier exemple en fut donné par A. L. S. Corner [1]. Un exemple différent apparait dans P. A. Krylov [4]. De plus P. Jambor et J. Bečvar, ont développé, dans [3] une généralisation de la notion de sous-groupe de base dans laquelle apparait de façon naturelle des groupes super-décomposables. Dans cette note, nous donnons d'abord un critère pour qu'un groupe soit super-décomposable et nous construisons ensuite une famille de groupes qui satisfont à ce critère, donnant ainsi de nouveaux exemples de groupe super-décomposable. Finalement, nous établissons une série de propriétés remarquables de ces groupes. Nous utilisons dans ce qui suit une notation conforme à celle de [2] de plus, le mot groupe veut dire ici, groupe abélien sans torsion.

1. Un critère de super-decomposabilité.

Nous avons besoin d'un ensemble d'indices possédant des propriétés spéciales.

Définition 1.1. Pour chaque entier non négatif n on pose:

$$S_n = \{(n, m) \mid 0 \le m < 2^n\} \quad \text{et} \quad S = \bigcup_0^\infty S_n.$$

L'ensemble S s'appelle un arbre binaire complet de racine $(0, 0)$. On considère

$$A_{n,m} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(n+k, j) \mid 2^k m \le j < 2^k(m+1)\}$$

$A_{n,m}$ est appelé le sous-arbre complet de S de racine (n, m) ainsi $S = A_{0,0}$. La terminologie ci-dessus est suggérée par l'image que l'on obtient en dessinant le graphe dont les sommets sont les points de S et de chaque $(n, m) \in S$ émanant deux flèches allant respectivement vers $(n+1, 2m)$ et $(n+1, 2m+1)$.

Théorème 1.2. *Soit G un groupe. Si G possède une famille de sous-groupes*

Reçu par les rédacteurs le 20 novembre 1979, et, dans sa version revisée, le 8 avril 1980.

* Travail effectué dans le cadre de la subvention C.S.N.R.C. fond no A5591.

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-033-2 Published online by Cambridge University Press

totalement invariants non-nuls $\{G_{m,n} \mid (m, n) \in S\}$ *telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites*

(i) $G_{00} = G$.

(ii) $G_{n,m} = G_{n+1,2m} \oplus G_{n+1,2m+1}$ *pour tout* $(n, m) \in S$).

(iii) *toute chaine descendante infinie de* $G_{m,n}$ *a une intersection nulle.*

Alors, G est super-décomposable.

Preuve. Soit H un facteur direct de G. Disons $G = H \oplus K$, alors $G_{n,m}$ étant totalement invariant dans G, on a:

$$G_{n,m} = (G_{n,m} \cap H) \oplus (G_{n,m} \cap K). \tag{1}$$

On considère maintenant l'équation correspondante pour $G_{n+1,2m}$ et $G_{n+1,2m+1}$. En additionnant terme à terme ces deux équations et en utilisant (ii) on obtient:

$$G_{n,m} = (G_{n+1,2m} \cap H) \oplus (G_{n+1,2m+1} \cap H) \oplus (G_{n+1,2m} \cap K) \oplus (G_{n+1,2m+1} \cap K). \tag{2}$$

En comparant (1) et (2) il découle que:

$$G_{n,m} \cap H = (G_{n+1,2m} \cap H) \oplus (G_{n+1,2m+1} \cap H).$$

Donc, si H est indécomposable et si $H \subset G_{n,m}$ alors soit

$$G_{n+1,2m} \cap H = 0 \quad \text{ou} \quad G_{n+1,2m+1} \cap H = 0.$$

En faisant le raisonnement ci-dessus pour $(0, 0)$ on obtient que $H \subset G_{10}$ ou $H \subset G_{11}$ et en répétant l'argument pour les stages successifs indéfiniment on voit que H est contenu dans l'intersection d'une chaine descendante infinie de $G_{n,m}$. Donc par (iii) $H = 0$ et G ne possède aucun facteur indécomposable non-nul.

2. Un exemple de groupe super-décomposable.

Nous partons d'un espace vectoriel V sur le corps des nombres rationels Q de dimension infinie. Nous choisissons dans V une famille d'éléments indexés par S ayant les propriétés suivantes:

A. Pour chaque entier $n \geq 0$

$$\{x_{ni} \mid 0 \leq i < 2^n\} \text{ est un ensemble linéairement indépendant.}$$

B. $x_{n,m} = x_{n+1,2m} + x_{n+1,2m+1}$ pour tout $(n, m) \in S$.

Une telle famille peut être construite inductivement par le procédé suivant:

Supposons $x_{n,o}, \ldots, x_{n,2^n-1}$ construits alors comme dim $V = \infty$, on choisit 2^n éléments indépendants et indépendants des x_{ni} déja construits. On donne à ces éléments les indices $(n+1, 2j)$, $0 \leq j < 2^{n+1} - 1$ et on pose $x_{n+1,2j+1} = x_{n,j} - x_{n+1,2j}$. Les éléments ainsi obtenus sont clairement linéairement indépendants.

Maintenant comme l'ensemble S est dénombrable, il existe une injection de S dans l'ensemble P de tous les nombres premiers. On obtient donc une famille de nombres premiers $\{p_{m,n}\}(m, n) \in S$. A l'aide de ces nombres premiers nous définissons les nombres $q_{n,m}$ comme suit

$$q_{n,m} = p_{n,m_0} \cdot p_{n-1,m_1} \cdot \cdots \cdot p_{n-j,m_j} \cdot \cdots \cdot p_{0,0}$$

où $m_0 = m$ et pour $j \geq 1$, m_j est le plus petit entier inférieur ou égal à $m_{j-1}/2$. (Ainsi par exemple $q_{3,5} = p_{3,5} \cdot p_{2,2} \cdot p_{1,1} \cdot p_{0,0}$).

On pose alors:

$$H_{n,m} = \langle q_{n,m}^{-\infty} x_{n,m} \rangle.$$

Rappelons que $H_{n,m}$ est le sous-groupe de V engendré par les éléments de V de la forme $(a/b) \cdot x_{n,m}$ où $a,b \in Z$ et b possède les mêmes facteurs premiers que $q_{n,m}$.

Posons:

$$H_n = \bigoplus_{0 \leq m < 2^n} H_{n,m} \quad \text{et} \quad G = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Nous allons montrer maintenant que G est super-décomposable. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 2.1. *Les H_n sont des sous-groupes purs de G.*

Preuve. Notons d'abord que $H_{n,m} \subset H_{n+1,2m} \oplus H_{n+1,2m+1}$ en effet, p.g.c.d. $(q_{n+1,2m}, q_{n+1,2m+1}) = q_{n,m}$ donc $q_{n,m}^{-s} x_{n+1,2m} \in H_{n+1,2m}$ et $q_{n,m}^{-s} x_{n+1,2m+1} \in H_{n+1,2m+1}$, pour tout $s \geq 0$ et il s'en suit que

$$H_{n,m} = \langle q_{n,m}^{-s} x_{n,m} \mid s \geq 0 \} \rangle \subset H_{n+1,2m} \oplus H_{n+1,2m+1}.$$

Il suffit donc de montrer que $H_{n,m}$ est pur dans $K = H_{n+1,2m} \oplus H_{n+1,2m+1}$. Soit $y \in K$ et p un nombre premier tels que $py \in H_{n,m}$, comme $H_{n,m}$ est $q_{n,m}$-divisible on peut supposer que $(p, q_{n,m}) = 1$. Ecrivons $y = (a/b)x_{n+1,2m} + (c/d)x_{n+1,2m+1}$ alors $py = (e/f)x_{n,m} = (e/f)(x_{n+1,2m} + x_{n+1,2m+1})$ d'où $pa/b = e/f = pc/d$ et $paf = eb$ et $pcf = ed$ si p ne divise pas e, il doit diviser b et d simultanément. Donc, p est un facteur premier commun à $q_{n+1,2m}$ et $q_{n+1,2m+1}$ et par la remarque du début p doit diviser $q_{n,m}$ ce qui est une contradiction. On conclut que p divise e et que $y \in H_{n,m}$. Par conséquent, $H_{n,m}$ est pur dans K et H_n est pur dans G.

Soit $A_{n,m}$ le sous-arbre complet de racine (n, m) de S. On pose maintenant

$$G_{n,m} = \bigcup_{(i,j) \in A_{n,m}} H_{i,j}.$$

LEMME 2.2. *$G_{n,m}$ est le sous-groupe $q_{n,m}$-divisible maximal de G.*

Preuve. Montrons d'abord que $G_{n,m}$ est $q_{n,m}$-divisible. Pour cela, il suffit de montrer que $H_{i,j}$ est $q_{n,m}$-divisible pour chaque $(i, j) \in A_{n,m}$. Or nous savons que

$i=n+k$ et $2^k m \le j < 2^k(m+1)$. Pour un certain $k \ge 0$. Alors

$$q_{ij} = p_{n+k,j_0} \cdot \cdots \cdot p_{nj_k} \cdot \cdots \cdot p_{00}$$

où les j_s satisfont aux inégalités

(1) $$j_s - 1 \le 2j_{s+1} \le j_s \qquad s \ge 0$$

et par un procédé standard pour les inégalités à recurrences on voit que $j_k = m$ et donc, que $q_{n,m}$ divise $q_{i,j}$. Comme $H_{i,j}$ est clairement $q_{i,j}$-divisible, il est aussi $q_{n,m}$-divisible. Maintenant comme les H_i sont purs dans G, la partie $q_{n,m}$-divisible de G est l'union des parties $q_{n,m}$ divisibles des H_i. Mais $H_i = \oplus H_{i,j}$ où $0 \le j < 2^i$. Il reste donc à déterminer parmi les $H_{i,j}$ ceux qui posèdent une partie $q_{n,m}$ divisible non-nulle et comme ils sont de rang 1, cela revient à trouver parmi eux ceux qui sont $q_{n,m}$-divisibles. En fait il suffit de trouver pour quelle valeurs de (i, j), $p_{n,m}$ apparait dans la décomposition de $q_{i,j}$. Il s'en suit que $i \ge n$ et si $i = n+k$ $k \ge 0$ alors $m = j_k$ et comme j_s doit satisfaire (1). On a encore $2^k m \le j < 2^k(m+1)$. Donc $(i, j) \in A_{m,n}$.

THÉORÈME 2.3. *Le groupe G est super-décomposable.*

Preuve. Les sous-groupes $G_{n,m}$ étant les parties $q_{n,m}$-divisibles de G, sont totalement invariants dans G. De plus, clairement (i) $G_{0,0} = G$ et (ii) $G_{n,m} = G_{n+1,2m} \oplus G_{n+1,2m+1}$ car si on pose $H^m_{n+k} = \oplus H_{n+k,j}$ avec $2^k m \le j < 2^k(m+1)$, on a $G_{n,m} = \bigcup_{k=0}^{\infty} H^m_{n+k}$ et en écrivant les équations correspondantes pour $G_{n+1,2m}$ et $G_{n+1,2m+1}$ un calcul de routine démontre (ii). Il ne reste plus qu à montrer que toute chaine descendente infinie des $G_{n,m}$ a une intersection nulle. Or comme les $G_{n,m}$ sont divisibles par $p_{n,m}$, l'intersection de la chaine est divisible par une infinité de nombre premier. Comme $G = \bigcup H_n$, $x \in H_n$ pour un certain $n \ge 0$ et comme H_n est pur x a la même propriété dans H_n. Mais $H_n = \oplus H_{n,m}$ et $H_{n,m}$ est de rang 1, divisible seulement par un nombre fini de nombres premiers (les facteurs premiers de $q_{n,m}$) donc les projections de x sur chaque $H_{n,m}$ sont nulles et par conséquent $x = 0$, et le résultat découle du Théorème 1.2.

3. Quelques propriétés remarquables du groupe construit.

Le groupe G construit dans la section précédente, en outre d'être super-décomposable, possède un bon nombre de propriétés intéressantes. Nous en soulignons quelques unes ici.

PROPOSITION 3.1. *Soit G le groupe construit dans las section précédente alors*

(1) *G est l'union d'une chaine dénombrable croissante de sous-groupes complètement décomposables de rang fini.*

(2) *Les endomorphismes de G sont déterminés par la valeur qu'ils prennent sur x_{00}.*

(3) *$E(G)$ est un anneau commutatif et $E(G) \simeq G$ en tant que groupes.*

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-033-2 Published online by Cambridge University Press

(4) *Les facteurs directs de G sont de la forme* $\bigoplus_{i \in F} G_{ni}$, $F \subset \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$

(5) *Toute décomposition directe de G contient un nombre fini de facteurs.*

(6) *Pour tout* $f \in E(G)$, *on a* $G = \ker f \oplus \langle \operatorname{Im} f \rangle_*$.

Preuve.

(1) Par construction $G = \bigcup_0^\infty H_n$ et nous avons déja établi que H_n est pur dans G et H_n est une somme directe finie de groupe de rang 1.

(2) Soit $f \in E(G)$, alors $f(x_{0,0}) \in H_n$ pour un certain $n \geq 0$ donc $f(x_{0,0}) = \sum a_{n,i} x_{n,i}$, $0 \leq i < 2^n$. Mais $x_{0,0} = \sum x_{n,i}$ donc $f(x_{0,0}) = \sum f(x_{n,i}) = \sum a_{n,i} x_{n,i}$. Cependant $G = \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} G_{n,i}$ et les $G_{n,i}$ sont totalement invariants. Donc $f(x_{n,i}) \in G_{n,i}$ d'où $f(x_{n,i}) = a_{n,i} x_{n,i}$, $0 \leq i < 2^n$. De plus si on écrit

$$f(x_{0,0}) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} b_{n+1,i} x_{n+1,i} \quad \text{on a} \quad b_{n+1,2i} = a_{n,i} = b_{n+1,2i+1}.$$

Donc, par induction, f restreint à $G_{n,m}$ est la multiplication par $a_{n,m}$, et f est donc complètement déterminé par $f(x_{0,0})$.

(3) $E(G)$ est commutatif car si $f, g \in E(G)$ il existe $n \geq 0$ tel que

$$f(x_{0,0}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{n,i} x_{n,i} \quad \text{et} \quad g(x_{0,0}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_{n,i} x_{n,i}$$

et d'après la remarque précédente f et g restreints à $G_{n,m}$ sont respectivement les multiplications par $a_{n,m}$ et $b_{n,m}$. Maintenant $G = \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} G_{n,i}$ et les $G_{n,i}$ sont totalement invariants. Soit $y \in G$ alors $y = \sum_{i=0}^{2^n-1} y_i$ avec $y_i \in G_{n,i}$ et

$$(fg)(y) = \sum (f(g(y_i)) = \sum a_{n,i} b_{n,i} y_i = \sum b_{n,i} a_{n,i} y_i = (gf)(y) \quad \text{et} \quad fg = gf.$$

On pose pour chaque $f \in E(G)$, $\theta(f) = f(x_{0,0})$ alors θ est un homomorphisme entre le groupe additif et $E(G)$ et G de plus si $\theta(f) = 0$ alors $f(x_{0,0}) = 0$ et donc $f = 0$. Par conséquent θ est injectif. Maintenant si $y \in G$ alors $y = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{n,i} x_{n,i}$ et si on défini f restreint à $G_{n,i}$ par la multiplication par $a_{n,i}$ alors $f(x_{0,0}) = y$ car $x_{0,0} = \sum_{i=0}^{2^n-1} x_{n,i}$. Il s'en suit que θ est un isomorphisme.

(4) Notons que parce que $E(G)$ est commutatif tous les sous-groupes qui sont des noyaux ou des images d'endomorphismes sont totalement invariants. En particulier les facteurs directs de G le sont aussi. Soit donc K un facteur direct de G. Soit $y = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{n,i} x_{n,i} \in K$. Mais $K = \sum_{i=0}^{2^n-1} (K \cap H_{n,i})$, donc $a_{n,i} x_{n,i} \in K \cap H_{n,i}$ et comme c'est là des sous-groupes purs, on a: $x_{n,i} \in K$ pour chaque $a_{n,i} \neq 0$. Le même raisonnement appliqué à $x_{n,m} = \sum_k x_{n+k,i}$, $2^k m \leq i < 2^k(m+1)$ montre que $x_{n+k,i} \in K$ c'est-à-dire $G_{n,i} \subset K$ pour tous les i pour lesquels $a_{n,i} \neq 0$. Alors $K \supset \bigoplus_{i \in F} G_{n,i}$ où $F = \{i \mid a_{n,i} \neq 0\}$. Maintenant si $K \neq 0$, il existe un premier n tel que $K \cap H_n \neq 0$ et alors $K = \bigoplus_{i \in L} G_{n,i}$ où L est l'ensemble des i pour lesquels il existe un élément dand K dont la projection sur $H_{n,i}$ n'est pas nulle, $0 \leq i < 2^n$.

(5) Toute décomposition directe de G est finie. En effet si $G=\bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i$ alors $x_{0,0}\in\bigoplus_{i=0}^{n} K_i$ pour un certain n donc $G=G_{0,0}\subset\bigoplus_{i=0}^{n} K_i$ c'est-à-dire $K_i=0$ pour tout $i>n$.

(6) Soit $f\in E(G)$. Et soit $f(x_{0,0})=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_{n,i}x_{n,i}$ alors f restreint à $G_{n,i}$ est la multiplication par $a_{n,i}$. alors $\operatorname{Ker} f\supset G_{n,i}$ tels que $a_{n,i}=0$ et $\langle \operatorname{Im} f\rangle_{**}$ contient les $G_{n,i}$ tels que $a_{n,i}\neq 0$. On aura donc le résultat si l'on montre que $\operatorname{Ker} f\cap \operatorname{Im} f=0$. Soit donc $y\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f$.

$$y=\sum b_{n,i}x_{n,i} \quad \text{et} \quad f(y)=0=\sum b_{n,i}f(x_{n,i})=\sum b_{n,i}a_{n,i}x_{n,i}$$

donc $b_{n,i}a_{n,i}=0$ pour $0\leq i<2^n$. Mais $y=f(z)$ et $z=\sum c_{n,i}x_{n,i}$, $y=\sum c_{n,i}f(x_{n,i})=\sum c_{n,i}a_{n,i}x_{n,i}$, donc $b_{n,i}=c_{n,i}a_{n,i}$ et en multipliant par $b_{n,i}$ des deux cotés on obtient $b_{n,i}^2=0$ donc $b_{n,i}=0$ et $y=0$.

Finalement nous donnons encore une autre propriété remarquable de G.

Proposition 3.2. *Soit G le groupe construit dans la secton 2, et soit H et K des facteurs directs de G. Alors H est isomorphe à un sous-groupe de K si et seulement si $H\subset K$.*

Preuve. On sait par la Proposition 3.1 (4), que $H=\bigoplus_{i\in F} G_{n,i}$ et $K=\bigoplus_{i\in L} G_{n,i}$ où L, F sont des sous-ensembles de $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$. Si H est isomorphe à un sous-groupe de K, pour $i\in F$, l'image de $G_{n,i}$ est un sous-groupe $p_{n,i}$-divisible de K, or le sous-groupe maximal $p_{n,i}$-divisible de G_n est $G_{n,i}$ donc $i\in L$ et $H\subset K$.

Notons que les propriétés, 3 et 6 dans la Proposition 3.1 sont satisfaites aussi par tout groupe sans torsion H tels que H est réduit, $r_p(H)\leq 1$ pour tout $p\in P$ et $\operatorname{Soc}(H)=H$, où $\operatorname{Soc}(H)$ est le sous-groupe pur engendré par la famille des sous-groupes purs totalement invariants minimaux de H.

Pour terminer, nous tenons à remercier le professeur Bernard Charles auquel nous avions communiqué une première version de ce travail et qui nous a suggéré le système d'indice basé sur un arbre binaire complet.

Bibliographie

1. A. L. S. Corner, *Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc. **13** (1963), pp. 687–710.

2. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, vol. I et II, Academic Press, 1970.

3. P. Jambor et J. Bečvar, *On general concept of basic subgroups*, Comment. Math. Univ. Carolinae **13, 4** (1972), pp. 745–762.

4. P. A. Krylov, *Torsion free abelian groups with cyclic p-basis subgroups*, Matematicheskie Zametki vol. 20 no. 6, pp. 805–813, (1976).

Université de Montréal
Montréal, Québec
Canada.