Compositio Mathematica **107:** 319–338, 1997.

Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes

MOHAMED SAÏDI
Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Im Neunheimer Feld 288, D-69120 Heidelberg, Germany

Received 12 December 1995; accepted in final form 20 May 1996

Abstract. Let R be a discrete complete valuation ring, with algebraically closed residue field. Let X be a semi-stable R-curve, with smooth generic fibre. In this paper we study tame coverings of X.

Mathematics Subject Classifications (1991): 33A30, 40A05, 55QXX.

Key words: tame coverings, Kummer criterion.

0. Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k algébriquement clos, et de caractéristique $p \geqslant 0$. Soit X une R-courbe semi-stable. Dans ce travail, dont les résultats ont été annoncés dans [Sa], nous étudions les revêtements modérés de X.

Soit C une courbe semi-stable sur k. Nous dirons qu'un revêtement fini $C' \to C$, qui est étale en dehors des points doubles de C, et modéré au-dessus de ces points, est *kummérien*, si C' est semi-stable, et si pour tout point double de C', localement pour la topologie étale, un générateur de l'inertie sur l'une des branches en ce point, est inverse d'un générateur de l'inertie sur l'autre branche. Soit $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C)$ *le groupe fondamental kummérien* de C qui classifie ces revêtements. Nous donnons une description de $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C)$ en termes de groupe fondamental d'un certain graphe de groupes au sens de Bass et Serre (cf. [S-1]). On associe classiquement à C un graphe Γ, dont les sommets sont les composantes irréductibles de C, et les arêtes sont définies par les points doubles de C. Inspiré de la Définition 2.9 dans [A-M-O], nous définissons dans 2.7 un graphe de groupes (Γ, G). Le groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, G)$ de ce graphe de groupes est extension d'un groupe libre à r générateurs, où r est le nombre de Betti du graphe Γ, par un produit amalgamé de copies des groupes fondamentaux modérés des composantes irréductibles de C, auquels on a enlevé les points doubles. Nous montrons alors dans le Théorème 2.8 que $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C)$ est isomorphe au complété profini de $\pi_1(\Gamma, G)$.

Nous considérons ensuite une courbe semi-stable X sur R. Soit $f: Y \to X$ un morphisme fini. On montre dans le Théorème 3.2, en utilisant une formule locale qui est due à Kato, que si f est étale en dehors des points doubles de X, alors le revêtement $f_k\colon Y_k \to X_k := X \times_R k$ induit sur les fibres spéciales est kummérien. En particulier Y est semi-stable, et le revêtement $f\colon Y \to X$ est modéré. Soit $\pi_1^t(X)$ *le groupe fondamental modéré* de X, qui classifie les revêtements $Y \to X$, qui sont étales au-dessus de l'ouvert U de X obtenu en enlevant les points doubles, et modéré au-dessus de ces points. En termes de groupe fontamental le Théorème 3.2 signifie qu'il existe un isomorphisme canonique $\pi_1^t(X) \simeq \pi_1(U)$.

Nous montrons ensuite dans le Théorème 3.7, en utilisant les méthodes de la géométrie analytique rigide, l'énoncé de relèvement suivant: soient X une R-courbe formelle semi-stable, et $f_k\colon Y_k \to X_k$ un revêtement kummérien de la fibre spéciale X_k de X. Alors f_k se relève en un revêtement modéré $f\colon Y \to X$, si et seulement si pour tout point double y de Y_k au-dessus d'un point double x de X_k, l'indice de ramification au point y divise l'épaisseur de la singularité de X en x. De plus ce relèvement est unique si X est affine, ou si X est une R-courbe algébrique et propre (un résultat analogue a été obtenu par Stevenson [St], en utilisant les méthodes de la géométrie formelle). Ce résultat combiné avec 3.2 et 2.8 implique qu'il existe des isomorphismes $\pi_1^t(\bar{X}) \simeq \pi_1^{\mathrm{kum}}(X_k) \simeq \pi_1(\Gamma, G)^\wedge$, où $\pi_1(\Gamma, G)^\wedge$ est le complété profini du groupe fondamental de graphe de groupes associé à X_k dans 2.7, et $\bar{X} := X \times_R \bar{R}$, où $\bar{R}$ est la clôture intégrale de R dans une clôture algébrique de $\operatorname{Fr} R$.

Comme application nous donnons dans 4.2 une condition nécessaire et suffisante sur un couple (C, G), où C est une k-courbe semi-stable, et G est un sous-groupe fini de $\operatorname{Aut}_k(C)$, qui opère librement sur l'ouvert de C obtenu en enlevant les points doubles, et modérément sur les points doubles de C, pour qu'il se relève en un couple $(\mathcal{C}, G)$ sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$, où $\mathcal{C}$ est une $W(k)$-courbe propre à fibre générique lisse, et G est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_{W(k)}(\mathcal{C})$.

Enfin on donne une application au groupe fondamental d'une courbe générique. Soit X_η une *courbe générique* de genre $g \geqslant 2$, en caractéristique $p > 0$. Nous montrons dans 5.9, en faisant dégénérer la courbe générique X_η en une courbe stable composée de droites projectives, dont chacune rencontre les autres composantes irréductibles en exactement trois points doubles, que le groupe fondamental $\pi_1(X_\eta)$ de X_η possède un quotient qui est le complété profini d'un groupe extension d'un groupe profini libre à g générateurs, par un produit amalgamé de copies du groupe fondamental modéré $\pi_1^t(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} - \{0, 1, \infty\})$. L'intérêt de ce quotient est motivé par un analogue en caractéristique $p > 2$ du théorème de Belyi, et que nous montrons dans le Théorème 5.6.

1. Notations

1.1. Pour un schéma localement noethérien et connexe S, et $a\colon \operatorname{Spec}(\Omega) \to S$ un point géométrique de S à valeurs dans un corps algébriquement clos Ω, on note $\pi_1(S, a)$ *le groupe fondamental* de S en a, au sens de Grothendieck (cf. [Gr], exposé V, 5.7, p. 140). Soient REt/S := la catégorie des revêtements étales de S, et F le foncteur qui a un objet X de REt/S associe l'ensemble des points géométriques

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

de X au-dessus de a. Alors la catégorie REt/S est une catégorie galoisienne, et le foncteur F établit une équivalence de REt/S avec la catégorie des ensembles finis qui sont munis d'une action continue du groupe $\pi_1(S,a)$. Si a' est un autre point géométrique de S, alors il existe un isomorphisme $\pi_1(S,a)\simeq\pi_1(S,a')$, qui est canonique modulo automorphisme intérieur.

Si de plus S est un schéma normal, de corps de fonctions $K(s):=$ le corps résiduel en son point générique s, et Ω est une extension algébriquement close de $K(s)$, définissant un point géométrique a: $\mathrm{Spec}\,(\Omega)\to S$. Alors le groupe fondamental $\pi_1(S,a)$ s'identifie canoniquement au groupe de Galois $G(K(s)^{\mathrm{nr}}/K(s))$, où $K(s)^{\mathrm{nr}}$ est la sous-extension de $\Omega/K(s)$, composée des extensions finies de $K(s)$ qui sont non ramifiées (cf. [Gr], exposé I, déf. 3.2, p. 2) sur S.

Le groupe $\pi_1(S,a)$ est un groupe topologique profini, limite projective de ses quotients finis. Si p est un nombre premier, on notera $\pi_1(S,a)^{(p')}$ le groupe profini, qui est la limite projective des quotients finis d'ordre premier à p de $\pi_1(S,a)$. C'est le plus grand quotient premier à p du groupe $\pi_1(S,a)$.

1.2. Considérons une courbe algébrique U_k affine, et lisse, sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p\geqslant 0$. Il existe une unique courbe propre et lisse C_k sur k, qui contient U_k comme ouvert dense. Soient $K(C_k)$ le corps de fonctions de C_k, qui est aussi celui de U_k, et Ω une extension algébriquement close de $K(C_k)$. On note a: $\mathrm{Spec}\,(\Omega)\to U_k$ le point géométrique correspondant de U_k. Alors *le groupe fondamental modéré* de U_k en a, et que l'on note $\pi_1^t(U_k,a)$, est le groupe de Galois $G(K(C_k)^t/K(C_k))$, où $K(C_k)^t$ est la sous-extension de $\Omega/K(C_k)$, composée des extensions finies de $K(C_k)$ qui sont non ramifiées au-dessus de U_k, et modérément ramifiées au-dessus des points de C_k-U_k. C'est à dire les extensions finies de $K(C_k)$, telles que l'indice de ramification en une place au-dessus d'un point de C_k-U_k est premier à p.

Soient C une courbe algébrique réduite sur k, et x un point fermé de C. Notons $C_x^h:=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{C,x}^h$ le spectre d'un hensélisé de l'anneau local de C en x, et x' l'unique point fermé de C_x^h. Soit $C_{x,i}^h$ une composante connexe de la normalisation de C_x^h, on dira par la suite que c'est une *branche* de C_x^h en x'. Nous noterons aussi sans risque de confusion x' le point fermé de $C_{x,i}^h$.

Soient a_i: $\mathrm{Spec}\,(\Omega_i)\to C_{x,i}^h-x'$ un point géométrique, et $\pi_1^t(C_{x,i}^h-x',a_i)$ le groupe fondamental modéré de $C_{x,i}^h-x'$ en a_i. Alors il existe un isomorphisme canonique $\pi_1^t(C_{x,i}^h-x',a_i)\simeq^{\mathrm{can}}\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}:=\varprojlim_{(n,p)=1}\mu_n$, où $\mu_n:=\{z\in k^\times,\ z^n=1\}$ (cf. [S], chap. IV). Dans ce travail on fixe un système cohérent de racines de l'unité d'ordre premier à p, c'est à dire que l'on fixe un générateur z_n de μ_n, avec $z_{nm}^m=z_n$ pour tous les entiers positifs n et m premiers à p. On munit ainsi $\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}$ d'un *générateur topologique canonique*, qu'on notera par la suite $1^{(p')}$. Si la caractéristique de k est nulle, alors le groupe fondamental $\pi_1(C_{x,i}^h-x',a_i)$ est modéré, et il est canoniquement isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}(1):=\varprojlim_n\mu_n$ tout entier.

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

Soit à présent $C' \to C$ un morphisme fini, qui est génériquement étale, et modérément ramifié, c'est à dire que le morphisme correspondant entre les normalisées est modéré au sens usuel. Soient y un point fermé de C', et x son image dans C. On dispose d'un morphisme fini $C'^h_y \to C^h_x$. Soit $C'^h_{y,i}$ une branche de C'^h_y en y, elle se projette sur une branche bien déterminée $C^h_{x,i}$ de C^h_x en x. Le morphisme $C'^h_{y,i} \to C^h_{x,i}$ est fini, disons de degré n premier à p. Il est alors nécessairement galoisien de groupe μ_n, et correspond à un unique homomorphisme continu $\lambda\colon \pi_1^t(C^h_{x,i} - x', a_i) \simeq^{\text{can}} \hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')} \to \mu_n$, qui est surjectif. Nous dirons par la suite que l'image $\lambda(1^{(p')})$ du générateur $1^{(p')}$ de $\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}$ dans μ_n, est un *générateur de l'inertie* au point y, sur la branche $C'^h_{y,i}$.

2. Revêtements kummériens d'une courbe semi-stable

2.1. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$. Considérons une courbe algébrique semi-stable C sur k, c'est à dire une courbe C sur k qui est réduite, et n'a pour singularités que des points doubles ordinaires. Plus précisément le complété de l'anneau local de C en un point singulier, est isomorphe au quotient de l'anneau des séries formelles à deux variables $k[[s,t]]$, par l'idéal (st).

Considérons un morphisme fini $f\colon C' \to C$, qui est génériquement étale. On suppose que f est étale au-dessus des points réguliers de C, et que C' est semi-stable. En particulier l'image d'un point double de C' dans C est un point double, et au-dessus des points doubles de C il y a dans C' des points doubles. Soit y un point double de C'. Alors l'hensélisé C'^h_y de C' en y possède deux branches $C'^h_{y,1}$ et $C'^h_{y,2}$. On suppose que l'indice de ramification en y, qui est nécessairement le même sur chacune des deux branches, est premier à p, c'est à dire qu'on suppose que le morphisme $f\colon C' \to C$ est modéré. Nous dirons qu'un revêtement $f\colon C' \to C$ satisfaisant aux conditions ci-dessus est *kummérien*, si pour tout point double y de C', un générateur de l'inertie en y dans $C'^h_{y,1}$ (cf. 1.2) est inverse d'un générateur de l'inertie en y dans $C'^h_{y,2}$. Notons que cette définition est indépendante du choix fait dans 1.2, du générateur $1^{(p')}$ de $\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}$.

Si $f\colon C' \to C$, et $g\colon C'' \to C$ sont deux revêtements kummériens, et $h\colon C' \to C''$ est un morphisme fini de schémas avec $f = g \circ h$, alors $h\colon C' \to C''$ est un revêtement kummérien. Aussi si $f\colon C' \to C$ est kummérien, et G est un groupe fini de C-automorphismes de C', alors le quotient $C'' := C'/G$ de C' par G existe, et le morphisme canonique $h\colon C'' \to C$ est kummérien. Dans la suite on suppose que C est connexe. Soient C_{kum} la catégorie des revêtements kummériens de C, et a: Spec $(\Omega) \to C$ un point géométrique à valeurs dans le lieu régulier de C. Considérons le foncteur Γ_{kum}, qui à un revêtement kummérien $C' \to C$, associe l'ensemble des points géométriques de C' au-dessus de a. Alors le couple $(C_{\text{kum}}, \Gamma_{\text{kum}})$ satisfait aux conditions axiomatiques de la théorie de Galois (cf. [Gr], exposé V, 4, p. 118). Seule l'existence d'un produit fibré de deux objets

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

$f: C' \to C$, et $g: C'' \to C$ de C_{kum} dans cette même catégorie est à justifier. Au-dessus du lieu régulier de C, les morphismes f et g sont étales et le produit fibré existe dans ce cas. Si $\tilde{C}'$ et $\tilde{C}''$ désignent les normalisées de C' et C'', on note $\tilde{C}' \times \tilde{C}''$ leur produit fibré dans la catégorie des revêtements modérés de C. Soient x un point double de C, et y (resp. z) un point double de C' (resp. C'') au-dessus de x. On numérote les points dans les normalisées au-dessus des points doubles. Le point y_i (resp. z_i) de $\tilde{C}'$ au-dessus de y (resp. de $\tilde{C}''$ au-dessus de z) se projette sur le point x_i de $\tilde{C}$ qui est au-dessus de x, pour $i = 1, 2$. Au-dessus de x_i il y a dans $\tilde{C}' \times \tilde{C}''$ un nombre fini de points $(x_{i,j})$, qui sont au-dessus des points y_i et z_i, et ce nombre est le même pour $i = 1, 2$. On recolle alors le point $x_{1,j}$ avec le point $x_{2,j}$ en un point double x_j qui se projette sur le point double x. On construit ainsi une courbe semi-stable $C' \times_{\mathrm{kum}} C''$ qui se projette sur C' et C'', et le morphisme canonique $C' \times_{\mathrm{kum}} C'' \to C$ est kummérien.

Il résulte alors de [Gr] (exposé V, 4.1), qu'il existe un groupe topologique profini, que l'on notera $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C, a)$: le *groupe fondamental kummérien* de C en a, tel que l'on ait une équivalence de la catégorie C_{kum} avec la catégorie des ensembles finis qui sont munis d'une action continue du groupe $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C, a)$. D'autre part comme tout revêtement étale de C est kummérien, il existe un homomorphisme continu canonique $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C, a) \to \pi_1(C, a)$, et qui est surjectif.

Dans ce qui suit nous allons donner une description du groupe fondamental kummérien $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C, a)$, en termes de groupe fondamental d'un graphe de groupes que l'on associera à C (cf. 2.8).

2.2. GROUPE FONDAMENTAL D'UN GRAPHE DE GROUPES

DÉFINITION 2.3. Un *graphe* Γ est la donnée d'un ensemble $S = \operatorname{som}\Gamma$, d'un ensemble $A = \operatorname{ar}\Gamma$, et de deux applications

$$A \to S \times S, \qquad e \mapsto (o(e), t(e)),$$

et

$$A \to A, \qquad e \mapsto \bar{e},$$

qui satisfont à la condition suivante: pour tout $e \in A$, on a $\bar{\bar{e}} = e, \bar{e} \neq e$, et $o(e) = t(\bar{e})$. Un élément $P \in S$ s'appelle un sommet de Γ, un élément $e \in A$ s'appelle une arête (orientée) de Γ, et $\bar{e}$ s'appelle l'arête inverse. Le sommet $o(e) = t(\bar{e})$ s'appelle le sommet origine de e, et le sommet $t(e) = o(\bar{e})$ s'appelle le sommet terminal de e.

DÉFINITION 2.4. Soit Γ un graphe, connexe et non vide. La donnée d'un *graphe de groupes* (Γ, G) (cf. [S-1], 4.4, déf. 8, p. 55), est la donnée pour tout sommet

$P \in S$ d'un groupe G_P, et pour toute arête orientée $e \in A$ d'un groupe G_e, muni d'un monomorphisme $\lambda_e\colon G_e \to G_{t(e)}$. On exige en plus que $G_e = G_{\bar{e}}$.

DÉFINITION 2.5. Soit T un arbre maximal de Γ. *Le groupe fondamental* du *graphe de groupes* (Γ, G), *relativement à l'arbre maximal* T, et que l'on note $\pi_1(\Gamma, G, T)$, est par définition le groupe engendré par les groupes G_P $(P \in S)$, et les éléments $e \in A$, soumis aux relations suivantes

(i) $\bar{e} = e^{-1}$.
(ii) $e = 1$, si $e \in T$.
(iii) $e\lambda_e(a)e^{-1} = \lambda_{\bar{e}}(a)$, si $a \in G_e = G_{\bar{e}}$.

Cette définition est indépendante du choix de l'arbre maximal T (cf. [S-1], 5.1, Prop. 20, p. 63). Nous noterons par la suite $\pi_1(\Gamma, G)$ le groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, G, T)$, sous entendu qu'on a fait un choix de l'arbre maximal T.

REMARQUES 2.6. (a) Si (Γ, I) est le graphe de groupes trivial, c'est à dire $I_P = 1$ pour tout $P \in S$. Alors le groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, I)$, est le *groupe fondamental topologique* $\pi_1(\Gamma)$ de Γ. C'est un groupe libre à r générateurs, où r est le nombre de Betti de Γ. Soit (Γ, G) un graphe de groupes. Pour tout $P \in S$, l'homomorphisme canonique $G_P \to \pi_1(\Gamma, G)$ est injectif (cf. [S-1], Chap. 5). Soit R le plus petit sous-groupe normal de $\pi_1(\Gamma, G)$ contenant les G_P $(P \in S)$, on a alors une suite exacte $1 \to R \to \pi_1(\Gamma, G) \to \pi_1(\Gamma) \to 1$.

(b) Si Γ est un arbre connexe, c'est à dire un graphe connexe qui ne possède pas de cycles, et (Γ, G) est un graphe de groupes. Alors le groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, G)$ est le produit amalgamé des groupes G_P $(P \in S)$, suivant les G_e $(e \in A)$ (cf. [S-1], 4.4).

2.7. Revenons à présent à la courbe semi-stable C sur k, que l'on supposera dans la suite connexe. Nous allons associer à C un graphe de groupes (Γ, G). D'abord on associe classiquement à C un graphe d'intersection Γ défini comme suit

(i) les sommets de Γ sont les composantes irréductibles de C.
(ii) Les arêtes de Γ sont définies par les points doubles de C. Chaque point double où se croisent deux composantes irréductibles $C_{i(1)}$ et $C_{i(2)}$ de C, définit une arête joignant les sommets $C_{i(1)}$ et $C_{i(2)}$. Bien sur on peut avoir $i(1) = i(2)$. Notons que le graphe Γ est connexe et fini.

Dans la suite on suppose que C n'est pas lisse, et on fixe une orientation de Γ. Soit C_i une composante irréductible de C. Soient U_i l'ouvert affine lisse de C_i, obtenu en enlevant les points doubles de C appartenants à C_i, et b: Spec $(\Omega) \to U_i$ un point géométrique. On pose $G_{C_i} := \pi_1^t(U_i, b)$.

Soit x un point double de C. L'hensélisé C_x^h de C en x, possède deux branches $C_{x,1}^h$ et $C_{x,2}^h$ (cf. 1.2). La branche 1 (resp. 2) se projette sur la normalisée $\tilde{C}_{i(1)}$ (resp. $\tilde{C}_{i(2)}$) d'une composante irréductible bien déterminée $C_{i(1)}$ (resp. $C_{i(2)}$) de

C, et qui passe certainement par le point double x. Soit $e=e(x)$ l'arête de Γ qui est associée à x, et orientée de $C_{i(1)}$ vers $C_{i(2)}$, et soit $\bar{e}$ son arête opposée. On pose $G_e=G_{\bar{e}}:=\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}$. Choisissons un point géométrique a_1 (resp. a_2) de $C^h_{x,1}-x'$ (resp. de $C^h_{x,2}-x'$). Notons qu'il existe un homomorphisme continu canonique $\pi_1^t(C^h_{x,1}-x',a_1)\to\pi_1^t(U_{i(1)},a_1)$ (resp. $\pi_1^t(C^h_{x,2}-x',a_2)\to\pi_1^t(U_{i(2)},a_2)$), et qui est injectif (cf. [Gr], exposé V, 6.7, p. 138). On définit alors les monomorphismes $\lambda_e\colon G_e\to G_{i(2)}$ par

$$G_e\simeq^{\mathrm{can}}\ \pi_1^t(C^h_{x,2}-x',a_2)\to\pi_1^t(U_{i(2)},a_2)\simeq\pi_1^t(U_{i(2)},b_2)$$

et $\lambda_{\bar{e}}\colon G_{\bar{e}}\to G_{i(1)}$ par

$$G_{\bar{e}}\simeq^{\mathrm{can}^{-1}}\ \pi_1^t(C^h_{x,1}-x',a_1)\to\pi_1^t(U_{i(1)},a_1)\simeq\pi_1^t(U_{i(1)},b_1),$$

où can^{-1} désigne l'inverse de l'identification canonique $G_{\bar{e}}\simeq^{\mathrm{can}}\ \pi_1^t(C^h_{x,1}-x',a_1)$ (cf. 1.2). Notons $\sigma_1=\sigma_1(x)$ (resp. $\sigma_2=\sigma_2(x)$) l'image du générateur $1^{(p')}$ de $G_e=G_{\bar{e}}$ (cf. 1.2) dans $\pi_1^t(U_{i(1)},b_1)$ (resp. l'image de $1^{(p')}$ dans $\pi_1^t(U_{i(2)},b_2)$).

On a ainsi défini un graphe de groupes (Γ,G). On note $\pi_1(\Gamma,G)$, son groupe fondamental relativement à un arbre maximal T de Γ. C'est le groupe engendré par les groupes G_{C_i}, où C_i parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de C, et les éléments $e=e(x)$ et $\bar{e}$, où x parcourt l'ensemble des points doubles de C, et soumis aux relations

(i) $\bar{e}=e^{-1}$,
(ii) $e=1$, si $e\in T$,
(iii) $e\sigma_2e^{-1}=\sigma_1$, en particulier $\sigma_2=\sigma_1$ si $e\in T$.

On notera par la suite $\pi_1(\Gamma,G)^\wedge$ *le groupe complété profini* de $\pi_1(\Gamma,G)$, pour la topologie des sous-groupes d'indice finis.

THÉORÈME 2.8. *Il existe un isomorphisme* $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C,a)\simeq\pi_1(\Gamma,G)^\wedge$.

Preuve. Soit H un groupe fini. Nous allons établir une correspondance biunivoque entre les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\mathrm{kum}}(C,a),H)$ (le groupe H étant muni de sa topologie discrète), et $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma,G),H)$.

Partons d'abord d'un homomorphisme $\psi\colon\pi_1(\Gamma,G)\to H$. Il induit pour tout sommet C_i de Γ, par restriction à $G_{C(i)}$, un homomorphisme continu $\psi_i\colon G_{C_i}\to H$. Soit $f_i\colon\tilde{C}'_i\to\tilde{C}_i$ le revêtement modéré, où $\tilde{C}_i$ est la normalisée de C_i, et qui correspond au sous-groupe ouvert $\ker\psi_i$ de G_{C_i}. Soit $\tilde{f}\colon\tilde{C}':=\coprod\tilde{C}'_i\to\tilde{C}$ l'unique revêtement au-dessus de la normalisée $\tilde{C}$ de C, qui est galoisien de groupe H, et tel que $\tilde{f}/\tilde{C}_i=f_i$ pour toute composante $\tilde{C}_i$ de $\tilde{C}$. Pour tout point double $x\in C_{i(1)}\cap C_{i(2)}$ de C, l'image de l'élément $\sigma_1\in G_{C_{i(1)}}$ (resp. $\sigma_2\in G_{C_{i(2)}}$) dans H via $\psi_{i(1)}$ (resp. $\psi_{i(2)}$), est un générateur de l'inertie en un point bien détérminé $y_1\in\tilde{C}'_{i(1)}$ (resp. un point $y'_2\in\tilde{C}'_{i(2)}$) au-dessus de x. Identifions alors dans $\tilde{C}'$ les

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

points y_1, et $y_2 := (y_2')^{h_x}$, où $h_x := \psi(e(x)) \in H$, en un point double ordinaire y, qui se projette sur x. L'anneau local au point y est par définition $\{(f,g) \in \mathcal{O}_{C_{i(1)},y_1} \oplus \mathcal{O}_{C_{i(2)},y_2},\ f(y_1) = g(y_2)\}$. Notons que par construction même, un générateur de l'inertie au point y_1, est inverse d'un générateur de l'inertie au point y_2. Identifions alors deux à deux les autres points de $\tilde{C}'$ au-dessus de x, en des points doubles ordinaires, de manière compatible avec l'action du groupe H. C'est à dire on identifie le point $(y_1)^h$ avec le point $(y_2)^h$, où $h \in H$. On obtient ainsi une k-courbe semi-stable C', munie d'une action du groupe H, qui opère librement sur l'ouvert des points réguliers de C', et le quotient C'/H est canoniquement isomorphe à C. De plus le morphisme canonique $C' \to C$ est kummérien, et on a naturellement une action du groupe H sur l'ensemble des points géométrique de C' au-dessus de a. Ceux-ci correspond donc à un unique homomorphisme continu $\varphi\colon \pi_1^{\mathrm{kum}}(C,a) \to H$.

Réciproquement soit $\varphi\colon \pi_1^{\mathrm{kum}}(C,a) \to H$ un homomorphisme continu. Le sous-groupe ouvert $\ker\varphi$ de $\pi_1^{\mathrm{kum}}(C,a)$, correspond à un revêtement kummérien $f\colon C' \to C$, qui est galoisien de groupe H. Pour toute composante irréductible C_i de C, le morphisme $f^{-1}(C_i) \to C_i$ est étale en dehors des points doubles de C appartenant a C_i, et modéré en ces points. Il lui correspond donc un homomorphisme continu $\psi_i\colon G_{C_i} \to H$, qui est défini modulo automorphismes de H.

Soit x un point double de C où se croisent deux composantes irréductibles $C_{i(1)}$ et $C_{i(2)}$ (avec la possibilité que $i(1) = i(2)$). L'image de l'élément $\sigma_1 \in G_{C_{i(1)}}$ dans H via $\psi_{i(1)}$, est un générateur de l'inertie en un point double bien déterminé $y \in C'$ sur une branche de y qui est au-dessus de la branche $C_{x,1}^h$. Fixons maintenant un système de représentants $\{g_i\}_{i \in I}$ de $G_{C_{i(2)}}$ modulo le sous-groupe engendré par σ_2. Il existe alors un unique g_i, tel que $\psi_{i(2)}(g_i \sigma_2 g_i^{-1})$ soit un générateur de l'inertie en y sur l'autre branche qui est au-dessus de $C_{x,2}^h$. Soit $h := h_x := \psi_{i(2)}(g_i) \in H$. Comme un générateur de l'inertie en y dans une branche est inverse d'un générateur de l'inertie sur l'autre branche, on en déduit que $h\psi_{i(2)}(\sigma_2)h^{-1} = \psi_{i(1)}(\sigma_1)$.

Soit e l'arête de Γ associée à x, et qui est orientée de $C_{i(1)}$ vers $C_{i(2)}$. Supposons que e soit une arête origine de l'arbre maximal T de Γ. On peut alors composer l'homomorphisme $\psi_{i(2)}$ ci-dessus avec l'automorphisme intérieur de H, défini par la conjugaison par $h^{-1} = h_x^{-1}$, de sorte à avoir $\psi_{i(2)}(\sigma_2) = \psi_{i(1)}(\sigma_1)$, sans pour autant changer le revêtement $f^{-1}(C_{i(2)}) \to C_{i(2)}$. On peut aussi, en partant de l'arête origine e, faire de même par induction pour toute arête e' contenue dans l'arbre maximal T, et supposer ainsi que $\psi_{i(2)}(\sigma_2) = \psi_{i(1)}(\sigma_1)$ si $e \in T$, sans pour autant pouvoir le faire simultanément pour toute arête du graphe Γ. Il existe alors un unique homomorphisme $\psi\colon \pi_1(\Gamma, G) \to H$, qui coincide sur chaque sous-groupe G_{C_i} avec l'homomorphisme ψ_i, et tel que $\psi(e) = h$, pour toute arête orientée e de Γ. D'autre part il est clair que les deux correspondances ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

REMARQUE 2.9. Pour toute composante irréductible C_i de C, soit I_{C_i} le sous-groupe normal de G_{C_i} engendré par les σ_e, où e parcourt l'ensemble des arêtes de Γ d'extrémité C_i. Alors le quotient π_{C_i} de G_{C_i} par I_{C_i} est le groupe fondamental $\pi_1(C_i, b_i)$ de C_i. Si I est le sous-groupe normal de $\pi_1(\Gamma, G)$ engendré par les éléments σ_e, où e parcourt l'ensemble des arêtes de Γ, alors $I \cap G_{C_i} = I_{C_i}$, et on a une suite exacte $1 \to I \to \pi_1(\Gamma, G) \to \pi_C \to 1$, où le groupe quotient π_C est le produit libre des groupes π_{C_i}, et du groupe fondamental topologique $\pi_1(\Gamma)$ du graphe Γ. L'isomorphisme dans le Théorème 2.8 induit alors un isomorphisme $\pi_1(C, a) \simeq \pi_C{}^\wedge$, où $\pi_C{}^\wedge$ est le complété profini de π_C. En particulier le groupe fondamental $\pi_1(C, a)$ est isomorphe au complété profini du groupe fondamental de graphe de groupes (Γ, π), défini par $\pi_e = 1$, et $\pi_{C_i} = \pi_1(C_i, b_i)$.

3. Revêtements modérés des *R*-courbes semi-stables

3.1. NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, on désignera par R un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π, de corps de fractions $K := \mathrm{Fr}\, R$, et de corps résiduel $k := R/\pi R$ que l'on suppose algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$. On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Pour un schéma X sur R, on notera $X_K := X \times_R K$ *la fibre générique* de X, et $X_k := X \times_R k$ sa *fibre spéciale*.

Dans ce travail, une *R-courbe semi-stable* est un schéma normal X, séparé, de type fini, et plat sur R, de dimension relative 1, et dont la fibre spéciale X_k est une courbe semi-stable (on n'exige pas dans cette définition que le schéma X soit régulier).

Dans la suite nous désignerons par *germe* d'une R-courbe semi-stable en un point double, le schéma $\mathcal{X} := \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$ spectre du localisé d'une R-courbe semi-stable X en un point double x.

Enfin considérons une courbe algébrique réduite C sur k, et un point fermé x de C. Soient $\mathcal{O}_{C,x}$ l'anneau local au point x, et $\tilde{\mathcal{O}}_{C,x}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{C,x}$ dans son anneau total des fractions. On note m_x le nombre des idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_{C,x}$, et δ_x la dimension du k-espace vectoriel $\tilde{\mathcal{O}}_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x}$. On définit l'entier $\mu_x := 2\delta_x - m_x + 1$. Comme $\delta_x - m_x + 1 \geqslant 0$, on a $\mu_x \geqslant 0$. Notons que $\mu_x = 0$, si et seulement si le point x est un point régulier, et $\mu_x = 1$ si et seulement si x est un point double ordinaire.

THÉORÈME 3.2. *Soient $\mathcal{X}$ un germe d'une R-courbe semi-stable en un point double, et $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme fini, avec $\mathcal{Y}$ normal. On suppose que f est étale en dehors du point double x de $\mathcal{X}$. Alors le morphisme $f_k\colon \mathcal{Y}_k \to \mathcal{X}_k$ est kummérien. En particulier $\mathcal{Y}$ est semi-stable, et le morphisme f est modéré.*

Preuve. C'est une conséquence d'une formule due à Kato ([K], Prop. 5.7, p. 640). Cette formule a aussi été démontrée dans ([Ma-Y]) (dans un cadre particulier qui est satisfait par les hypothéses de 3.2), et où elle est énoncée sous la forme suivante: soit y un point fermé de $\mathcal{Y}_k$, et x son image dans $\mathcal{X}_k$, qui est un point

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

double. On note $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant 2}$ les points de la normalisée $\tilde{\mathcal{X}}_k$ de $\mathcal{X}_k$ au-dessus de x, et $(y_{i,j})_i$ les points de la normalisée $\tilde{\mathcal{Y}}_k$ de $\mathcal{Y}_k$ au-dessus du point x_j de $\tilde{\mathcal{X}}_k$. On a alors la formule

$$\mu_y - 1 = l(\mu_x - 1) + D - \sum_{i,j} d^w_{y_{i,j}x_j},$$

où μ_y et μ_x sont définis dans 3.1, et l est le degré du morphisme fini $\operatorname{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},y} \to \operatorname{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$ entre les complétés de l'anneau local de $\mathcal{Y}$ au point y et celui de $\mathcal{X}$ au point x. L'entier D est le degré du diviseur de ramification dans le morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},y}\otimes_R K) \to \operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}\otimes_R K)$. Enfin $d^w_{y_{i,j}x_j}$ désigne l'entier positif ou nul $v_{x_j}(\delta_{y_{i,j}x_j}) - e + 1$, où $\delta_{y_{i,j}x_j}$ est l'idéal discriminant de l'extension d'anneaux de valuation discrète complets $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\mathcal{X}}_k,x_j} \to \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k,y_{i,j}}$, e son indice de ramification, et v_{x_j} la valuation associée au point x_j. Notons que $d^w_{y_{i,j}x_j} = 0$, si et seulement si cette extension est modérément ramifiée.

Par hypothèses $D = 0$. D'autre part comme x est un point double on a $\mu_x = 1$, et donc $\mu_y = 1 - \Sigma_{i,j} d^w_{y_{i,j}x_j}$. Notons que $\mu_y \geqslant 1$ (μ_y ne peut être nul, car dans cette situation $m_y \geqslant m_x = 2$ (cf. [Mat], Th. 5, p. 33)). Ainsi nécessairement $d^w_{y_{i,j}x_j} = 0$, pour tout i et j, et $\mu(y) = 1$. En conclusion y est un point double, et le morphisme f est modéré en ce point.

REMARQUE 3.3. Soit y un point double de $\mathcal{Y}$. Alors l'homomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},y}$ entre les complétés de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) en x (resp. en y), est fini de degré l, où l premier à p est l'indice de ramification au point y. Si x est un point double *d'épaisseur* e, c'est à dire si $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \simeq R[[s,t]]/(st - \pi^e)$, alors l divise e, et de plus y est un point double d'épaisseur e/l (cf. [Ra], Appendice).

COROLLAIRE 3.4. 'un énoncé de p-pureté'. *Soient $\mathcal{X}$ un germe d'une R-courbe semi-stable en un point double x, et $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme fini dont le degré est une puissance de p, avec $\mathcal{Y}$ normal. Si f est étale en dehors de x, alors f est partout étale.*

3.5. Soit X une R-courbe algébrique (ou formelle) semi-stable. Nous dirons qu'un morphisme fini $f\colon Y \to X$ est *modéré*, si f est étale en dehors des points doubles de X, et modéré au-dessus de ces points. Soit U l'ouvert de X obtenu en enlevant les points doubles, et a: $\operatorname{Spec}(\Omega) \to U$ un point géométrique. On suppose que X est connexe. Soient X_t la catégorie des revêtements modérés de X, et Γ_t le foncteur qui a un revêtement modéré $Y \to X$ associe l'ensemble des points géométriques de Y au-dessus de a. Alors le couple (X_t, Γ_t) satisfait aux conditions axiomatiques de la théorie de Galois. On note $\pi_1^t(X,a)$ le *groupe fondamental modéré* de X en a correspondant (cf. [Gr], exposé V, 4.1). Le résultat suivant est une conséquence immédiate de 3.2.

PROPOSITION 3.6. *Il existe un isomorphisme canonique* $\pi_1(U,a) \simeq \pi_1^t(X,a)$.

Dans ce qui suit nous allons montrer un énoncé de relèvement d'un revêtement kummérien de X_k, en un revêtement modéré de X. Nous utiliserons pour cela le language des schémas formels sur R, et celui des espaces analytiques rigides sur K (cf. [T], [Fr]).

THÉORÈME 3.7. *Soient* X *une* R*-courbe formelle semi-stable, et* $f_k\colon Y_k \to X_k$ *un revêtement kummérien de la fibre spéciale* X_k *de* X*. Alors* f_k *se relève en un revêtement modéré* $f\colon Y \to X$*, si et seulement si pour tout point double* y *de* Y_k *au-dessus d'un point double* x *de* X_k*, l'indice de ramification au point* y *divise l'épaisseur de la singularité de* X *en* x*. De plus ce relèvement est unique si* X *est affine, ou si* X *est une* R*-courbe algébrique et propre.*

Preuve. D'abord considérons le cas où $X = \operatorname{Spf} \mathcal{A}$ est affine, et la fibre spéciale X_k contient un unique point double x. Soit $U_k := X_k - \{x\}$. L'immersion ouverte $U_k \to X_k$ se relève en une immersion ouverte $U \to X$. D'autre part il résulte des théorèmes de relèvement des morphismes étales (cf. [Gr], exposé I, 8.4, p. 15), que le revêtement étale $V_k := f_k^{-1}(U_k) \to U_k$ se relève de manière unique en un revêtement étale $V \to U$. Soient $y_1, \ldots, y_r$ les points de Y_k au-dessus de x. Nous allons faire une localisation étale, qui va nous permettre dans un premier temps, de nous ramener au cas d'un revêtement $f_k\colon Y_k \to X_k$ totalement ramifié au-dessus du point double x.

Localisation étale.
Soit $X_{k,x}^h$ le spectre d'un hensélisé de l'anneau local de X_k en x. Le revêtement $f_k\colon Y_k \to X_k$ est complétement décomposé au-dessus de $X_{k,x}^h$. Comme $X_{k,x}^h$ est une limite inductive de schémas affines étales sur X_k, et qui ont un seul point au-dessus de x, on déduit que quitte à diminuer X on peut trouver une R-courbe formelle semi-stable $X^1 := \operatorname{Spf} \mathcal{A}^1$, un morphisme $X^1 \to X$ étale et fidélement plat, et X^1 contient un unique point double au-dessus du point double de X, telle que le revêtement $Y_k^1 \to X_k^1$ déduit par changement de base, soit un revêtement décomposé $Y_k^1 := \coprod Z_k^i$, où Z_k^i est la composante connexe qui contient le point au-dessus de y_i. Il en ait aussi de même pour le revêtement étale $V^1 \to U^1$, déduit lui aussi par changement de base. Pour relever le revêtement $Y_k^1 \to X_k^1$, il suffit de traiter le cas d'un revêtement $Z_k^i \to X_k$ totalement ramifié au-dessus de x.

Cas totalement ramifié.
Supposons donc que Y_k contient un seul point double y au-dessus de x. Comme la ramification est modérée, le revêtement $f_k\colon Y_k \to X_k$ est de degré l premier à p, où l est l'indice de ramification au point y. Soit e l'épaisseur de la singularité de X au point double x. On suppose que l divise e. Cette condition est en effet nécessaire pour pouvoir trouver un revêtement modéré $f\colon Y \to X$ qui relève $f_k\colon X_k \to Y_k$ (cf. 3.3).

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

Dans ce qui suit nous allons utiliser les notations de Raynaud (cf. [Ra-1], 3). Pour un R-schéma formel X nous noterons X^{rig} l'espace analytique rigide sur K, fibre générique de X. Soit C le R-schéma formel affine d'anneau $R\{x,y\}/(xy-\pi^e)$. Sa fibre générique est une couronne standard formelle d'épaisseur e. Il existe alors des morphismes étales $f\colon X'\to X$, et $g\colon X'\to C$, où X' posséde un unique point au-dessus de x, et les morphismes f et g induisent des isomorphismes sur les espaces rigides formés des points de la fibre générique qui se réduisent suivant le point double. Si on prend pour coordonée de Laurent x sur C^{rig}, nous identifierons dans la suite les points de $X^{\mathrm{rig}}-U^{\mathrm{rig}}$ avec l'ensemble des points de la couronne ouverte $\{x\in K, |\pi|^e<|x|<1\}$ (cf. [Ra-1], 3.3.2).

Les mêmes arguments utilisés par Raynaud dans [Ra-1] 3.4, montrent que le revêtement étale $V^{\mathrm{rig}}\to U^{\mathrm{rig}}$ se prolonge en un revêtement étale $f'\colon V'\to U^{\mathrm{rig}}\cup C_1\cup C_2$, où C_1 (resp. C_2) est une couronne semi-ouverte $\{x\in K, |\pi|^e<|x|\leqslant r_1\}$ (resp. $\{x\in K, r_2\leqslant|x|<1\}$), pour un choix convenable de $r_1<r_2$. Soient C'_1 (resp. C'_2) la couronne d'épaisseur nulle $\{x\in K, |x|=r_1\}$ (resp. $\{x\in K, |x|=r_2\}$, et C' la couronne fermée $\{x\in K, r_1\leqslant|x|\leqslant r_2\}$. Le revêtement étale $f'^{-1}(C'_1)\to C'_1$ (resp. $f'^{-1}(C'_2)\to C'_2$) est un μ_l-torseur, et correspond à un unique homomorphisme continu $\lambda_1\colon\pi_1(C'_1)^{(p')}\simeq\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}\to\mu_l$ (resp. $\lambda_2\colon\pi_1(C'_2)^{(p')}\simeq\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}\to\mu_l$). Le groupe fondamental d'un espace affinoïde est ici pris au sens de [Ra-1], 4.2. De plus comme un générateur de l'inertie au point $y\in Y_k$ sur une branche, est inverse d'un générateur de l'inertie sur l'autre branche, on déduit facilement que l'homomorphisme λ_1 est inverse de λ_2. Il existe alors un unique homomorphisme $\lambda\colon\pi_1(C')^{(p')}\simeq\hat{\mathbb{Z}}(1)^{(p')}\to\mu_l$, qui via les homomorphismes canoniques $\pi_1(C'_i)^{(p')}\to\pi_1(C')^{(p')}$, est compatible avec les λ_i, $i=1,2$. Le μ_l-torseur correspondant $C''\to C'$ prolonge alors les μ_l-torseurs $f'^{-1}(C'_i)\to C'_i$, $i=1,2$. En particulier le revêtement $C''\to C'$ se recolle avec le revêtement $f'\colon V'\to U^{\mathrm{rig}}\cup C_1\cup C_2$ en un revêtement étale $Y^{\mathrm{rig}}\to X^{\mathrm{rig}}$. Pour un choix convenable de coordonées de Laurent, ce revêtement coincide au-dessus de $X^{\mathrm{rig}}-U^{\mathrm{rig}}$ avec le revêtement $\{y\in K, |\pi|^{e/l}<|y|<1\}\to\{x\in K, |\pi|^e<|x|<1\}$, donné par l'équation $y^l=x$. Le revêtement $Y^{\mathrm{rig}}\to X^{\mathrm{rig}}$ correspond donc à un revêtement modéré $Y\to X$ entre models formels, et qui relève le revêtement $f_k\colon Y_k\to X_k$.

Descente.
En conclusion on relève ainsi le revêtement induit $Y_k^1\to X_k^1$, en un revêtement induit et modéré $Y^1\to X^1$. Ce revêtement se descend alors de manière unique, par des arguments de descente étale (voir aussi [Ga], 3, pour des arguments similaires), en un revêtement modéré $f\colon Y\to X$, et qui relève le revêtement $f_k\colon Y_k\to X_k$.

Considérons à présent le cas où X est une R-courbe algébrique, semi-stable, et propre. On note $\hat{X}$ la R-courbe formelle semi-stable, qui est le complété formel de X le long de sa fibre spéciale X_k. Soit U_k l'ouvert des points réguliers de X_k. Le revêtement étale $V_k:=f_k^{-1}(U_k)\to U_k$ se relève de manière unique en un revêtement étale $V\to U$. Pour tout point double x de X_k, on peut comme dans le cas traité ci-dessus, et localement dans un voisinage de x, relever de manière

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

unique f_k en un revêtement modéré. Les relèvements ainsi construits se recollent, de manière unique, en un revêtement modéré $\hat{Y} \to \hat{X}$, qui relève $f_k: Y_k \to X_k$. Par les théorèmes GAGA formels de Grothendieck (cf. [Gr-1], exp. 182, Th. 4), ce revêtement correspond à un unique revêtement modéré $Y \to X$, et qui relève $f_k: Y_k \to X_k$.

3.8. Considérons une R-courbe algébrique X, semi-stable, connexe et propre. Soit U l'ouvert connexe de X obtenu en enlevant les points doubles. On note $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans $\bar{K}$, $\bar{X} := X \times_R \bar{R}$, $\bar{U} := U \times_R \bar{R}$, et $\bar{X}_K := X_K \times_K \bar{K}$. Soit a un point géométrique de $\bar{X}_K$. Les morphismes $\bar{X}_K \to \bar{U} \to \bar{X}$ induisent des homomorphismes continus canoniques: $\pi_1(\bar{X}_K, a) \to \pi_1(\bar{U}, a) \to \pi_1(\bar{X}, a)$, et qui sont surjectifs. De plus si b est un point géométrique de X_k, il existe un isomorphisme canonique $\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X_k, b)$, qui est défini modulo le choix d'un chemin dans X de a à b (cf. [Gr], exposé X, 2.1, p.268).

PROPOSITION 3.9. *L'homomorphisme* $\pi_1(\bar{X}_K, a) \to \pi_1(\bar{U}, a)$ *induit un isomorphisme canonique:* $\pi_1(\bar{X}_K, a)^{(p')} \to \pi_1(\bar{U}, a)^{(p')}$.

Preuve. C'est une conséquence du lemme d'Abhyankar, et du théorème de pureté de Zariski–Nagata (cf. [Gr], exposé X).

PROPOSITION 3.10. *Il existe des isomorphismes* $\pi_1(\bar{U}, a) \simeq \pi_1^t(\bar{X}, a) \simeq \pi_1^{\text{kum}}(X_k, b)$, *où* b *est un point géométrique à valeurs dans le lieu régulier de* X_k.

Preuve. C'est une conséquence de 3.2 et 3.7. La condition exigée pour le relèvement dans 3.7, est en effet satisfaite aprés un changement de base par une extension ramifiée de R.

COROLLAIRE 3.11. *Il existe un isomorphisme* $\pi_1(\bar{X}_K, a)^{(p')} \simeq \pi_1^{\text{kum}}(X_k, b)^{(p')}$.

En particulier si la caractéristique de k est nulle, alors il existe un isomorphisme $\pi_1(\bar{X}_K, a) \simeq \pi_1^{\text{kum}}(X_k, b)$.

4. Application au relèvement de courbes semi-stables avec groupe d'automorphismes

4.1. Soit C une courbe algébrique propre, et connexe sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \geqslant 0$. On suppose que C est semi-stable. Soit G un sous-groupe fini de $\operatorname{Aut}_k(C)$, qui opère librement sur un ouvert dense de C. On se pose le problème de relever le couple (C, G) en un couple $(\mathcal{C}, G)$, où $\mathcal{C}$ est une R-courbe propre dont la fibre générique $\mathcal{C}_K$ est lisse, et un sous-groupe G de $\operatorname{Aut}_R \mathcal{C}$, pour un anneau de valuation discrète convenable R fini sur $W(k) :=$ l'anneau des vecteurs de Witt de k. Notons que la courbe $C' := C/G$ quotient de C par G est elle même semi-stable. Nous considérons ici le cas où le morphisme fini canonique $f_k\colon C \to C' := C/G$, est étale au-dessus des points réguliers de C', et que le groupe G opère modérément sur C, c'est à dire que le sous-groupe d'inertie de G, en un point double de C est cyclique d'ordre premier à p.

Si le relèvement $(\mathcal{C}, G)$ existe, alors dans le morphisme fini canonique $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}' := \mathcal{C}/G$, l'image d'un point double est un point double, et le morphisme induit par f sur les fibres génériques $f_K\colon \mathcal{C}_K \to \mathcal{C}'_K$ est étale. C'est une conséquence de la formule de Kato (cf. 3.2). Une condition alors nécessaire pour que le relèvement $(\mathcal{C}, G)$ existe sur R, est que le revêtement $f_k\colon C \to C'$ soit kummérien (cf. 3.2), et que l'on puisse relever la courbe C' en une R-courbe propre $\mathcal{C}'$ dont la fibre générique est lisse, et telle que l'épaisseur d'un point double x de $\mathcal{C}'$, soit divisible par l'indice de ramification d'un point double y de C au-dessus de x (cf. 3.3.)

THÉORÈME 4.2. *Soient C une k-courbe algébrique propre et semi-stable, et G un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}_k(C)$ *qui opère librement sur un ouvert dense de C. On suppose que le morphisme fini canonique $C \to C/G$ est kummérien. Alors le couple (C, G) se relève en un couple $(\mathcal{C}, G)$ sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$.*

Preuve. Comme dans [Sa-1] 6.2, cela résulte de 3.7 et de [Sa-1] 6.3.

5. Application au groupe fondamental d'une courbe générique

DÉFINITION 5.1. Soient S un schéma, et g un entier positif. Une *courbe semi-stable* (resp. *stable*) de genre g au-dessus de S, est un morphisme propre et plat $f\colon \mathcal{C} \to S$, tel que les fibres $\mathcal{C}_{\bar{s}} := \mathcal{C} \times_{k(s)} k(\bar{s})$ au-dessus d'un point géométrique $\bar{s}$ de S sont des schémas réduits, connexes, de dimension 1, et qui satisfont aux deux (resp. trois) conditions suivantes.

(i) $\mathcal{C}_{\bar{s}}$ n'admet que des points doubles ordinaires pour singularités.
(ii) $\dim H^1_{k(\bar{s})}(\mathcal{C}_{\bar{s}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{\bar{s}}}) = g$.
(resp. (iii) Toute composante irréductible rationnelle, et non singulière de $\mathcal{C}_{\bar{s}}$, rencontre les autres composantes irréductibles de $\mathcal{C}_{\bar{s}}$ en au moins trois points distincts).

5.2. Dans la suite on fixe un entier $g \geqslant 2$. Soit $f\colon \mathcal{C} \to S$ une courbe stable de genre g au-dessus de S. Alors le faisceau dualisant relatif $\omega_{\mathcal{C}/S}$ sur $\mathcal{C}$ est inversible, et vérifie les propriétés suivantes: le faisceau $\omega_{\mathcal{C}/S}^{\otimes n}$ est trés ample pour f si $n \geqslant 3$, et son image directe $f_*(\omega_{\mathcal{C}/S}^{\otimes n})$ est un faisceau localement libre sur S de rang $(2n-1)(g-1)$ (cf. [D-M]). En particulier pour $n = 3$, il suit que toute courbe stable $\mathcal{C}/S$ peut être réalisée comme une famille de courbes dans $\mathbb{P}^{5g-6}$ avec polynôme de Hilbert $P_g(t) = (6t-1)(g-1)$. Plus précisément il existe une S-immersion canonique $\mathcal{C} \to \mathbb{P}(f_*(\omega_{\mathcal{C}/S}^{\otimes 3}))$, et $\mathbb{P}(f_*(\omega_{\mathcal{C}/S}^{\otimes 3}))$ est (localement sur S) isomorphe à $\mathbb{P}^{5g-6}$.

Comme dans [Mu-F], Prop. 5.1, p. 99, on montre qu'il existe un unique sous-schéma $H_{g,\mathbb{Z}}$ du schéma de Hilbert $\operatorname{Hilb}^{P_g}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$ sur $\mathbb{Z}$, et un isomorphisme de foncteurs

$$\operatorname{Mor}(S, H_{g,\mathbb{Z}}) \simeq \{\text{courbes stables } \pi\colon \mathcal{C} \to S, \text{ avec } \mathbb{P}(\pi_*(\omega_{\mathcal{C}/S}^{\otimes 3})) \simeq \mathbb{P}^{5g-6} \times S\}.$$

Soit $Z_{g,\mathbb{Z}} \to H_{g,\mathbb{Z}}$ *la courbe stable universelle* au-dessus de $H_{g,\mathbb{Z}}$. Alors toute courbe stable $\pi\colon \mathcal{C} \to S$, plus un isomorphisme $\mathbb{P}(\pi_*(W_{\mathcal{C}/S}^{\otimes 3})) \simeq \mathbb{P}^{5g-6} \times S$, est déduite de manière universelle, par produit fibré, d'un unique morphisme $S \to H_{g,\mathbb{Z}}$.

Soit à présent k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqslant 0$. Nous noterons $Z_g := Z_{g,\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k$, et $H_g := H_{g,\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k$. Le schéma H_g est irréductible et lisse sur k (cf. [D-M]), et l'ensemble des points fermés $x \in H_g$ tel que la fibre de x dans Z_g soit lisse est un ouvert dense de H_g. Nous noterons dans la suite L une clôture algébrique de $K(\eta)$, où $K(\eta)$ est le corps résiduel de H_g en son point générique η. On a la notion de *courbe générique* $X_\eta := Z_g \times_{H_g} \operatorname{Spec} L$, de genre g. C'est une courbe propre, lisse, et connexe sur L, et on a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
Z_g & X_\eta \arrow[l] \arrow[d] \\
H_g \arrow[u, leftarrow] & \operatorname{Spec} L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

5.3. 'DÉGÉNÉRESCENCE' DE LA COURBE GÉNÉRIQUE X_η/L

Soit C une courbe stable de genre g sur k, qui correspond à une fibre de $Z_g \to H_g$ au-dessus d'un point fermé x de H_g. Alors il existe un anneau de valuation discrète R, tel que si on note η' le point générique de $S := \operatorname{Spec} R$, et s le point fermé de S, on ait un morphisme $f\colon S \to H_g$ qui induit un isomorphisme $\operatorname{Fr}(R) \simeq K(\eta)$, avec $f(s) = x$, et $f(\eta') = \eta$, (cf. [G-D], Prop. 7.1.7, p. 140).

Soit $\mathcal{X} := Z_g \times_{H_g} S$. Alors $\mathcal{X}$ est une S-courbe stable, dont la fibre générique géométrique est la courbe générique X_η/L, et la fibre spéciale $\mathcal{X}_{k(s)} = C \times_k k(s)$ est obtenue à partir de C par changement de base. On a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
Z_g \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[l] \arrow[d] \\
H_g & S \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

Comme L est algébriquement clos, le morphisme $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} R$ se factorise à travers un hensélisé strict de R, et on peut donc supposer R strictement hensélien.

Dans ce qui suit nous ometrons de mentionner les points bases pour noter les groupes fondamentaux que l'on considérera, sous entendu que l'on a fait un choix d'un tel point. Le groupe fondamental algébrique $\pi_1(X_\eta)$ de la courbe générique X_η/L, de genre g, est le 'plus gros' parmis les groupes fondamentaux de courbes lisses (ou plus généralement stables) de genre g sur k. Plus précisément, on a le résultat bien connu suivant.

PROPOSITION 5.4. *Soit X' une courbe algébrique projective, connexe, et lisse (ou plus généralement stable) sur k, de genre $g \geqslant 2$. Alors il existe un homomorphisme continu surjectif $\pi_1(X_\eta) \to \pi_1(X')$, où X_η/L est la courbe générique de genre g définie ci-dessus.*

Preuve. Soit R un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps résiduel k', et soit $\mathcal{X}$ une R-courbe stable dont la fibre générique géométrique est la courbe générique X_η/L, et la fibre spéciale $\mathcal{X}_{k'} = X' \times_k k'$ (cf. 5.3). On a alors un homomorphisme continu de spécialisation $\pi_1(X_\eta) \to \pi_1(\mathcal{X}_{k'})$, et qui est surjectif (cf. [Gr], exposé X, thé. 2.1, p. 268). D'autre part comme k' est une extension algébriquement close de k, il existe un isomorphisme canonique $\pi_1(\mathcal{X}_{k'}) \simeq \pi_1(X')$ (cf. [Gr], exposé X, cor. 1.8, p. 266). D'où un homomorphisme continu surjectif $\pi_1(X_\eta) \to \pi_1(X')$.

5.5. Théorème de Belyi en caractéristique $p > 2$

Rappelons d'abord l'énoncé du théorème de Belyi en caractéristique nulle.

THÉORÈME. (Belyi, [B], [S-2]) *Soit C une courbe algébrique projective, lisse, et connexe sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Alors C est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$:= la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, si et seulement si il existe un morphisme fini $C \to \mathbb{P}^1$, qui est non ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$.*

En caractéristique positive on a un résultat analogue en considérant les revêtements modérément ramifiés de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Plus précisément on a le résultat suivant.

THÉORÈME 5.6. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$, et $\bar{\mathbb{F}}_p$ la clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$ dans k. Soit C une courbe algébrique projective, lisse, et connexe sur k. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

(i) C est définie sur $\bar{\mathbb{F}}_p$,

(ii) *il existe un morphisme fini $C \to \mathbb{P}^1_k$, qui est étale en dehors de $\{0, 1, \infty\}$, et modérément ramifié au-dessus de $\{0, 1, \infty\}$.*

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On suppose que C est définie sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. D'aprés Fulton ([Fu], prop 8.1, p. 569) il existe un morphisme $f\colon C \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ de degré n, et card $f^{-1}(x) \geqslant n-1$ pour tout point $x \in \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$. En particulier l'indice de ramification en un point de C est au plus égal a deux, et le morphisme f est modérément ramifié au-dessus de $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$. soit $S \subset \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ le lieu de ramification de f. Si $x \in S$ est différent de 0 et de ∞, alors il existe un entier positif m (indépendant de x) tel que $x^{p^m-1}=1$. Soit $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ le morphisme défini par $\varphi(z)=z^{p^m-1}$. Alors $\varphi(S) \subset \{0,1,\infty\}$ et le morphisme $f\circ\varphi\colon C \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ satisfait la condition (ii).

Enfin (ii) entraîne (i) résulte du fait que les revêtements étales de $\mathbb{P}^1_k - \{0,1,\infty\}$, et qui sont modérément ramifiés au-dessus de $\{0,1,\infty\}$, sont définis sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ (cf. [Gr]).

REMARQUES 5.7 **(**a**)** Nous ne savons pas si ce résultat vaut encore en caractéristique 2. La démonstration dans [Fu] du résultat que nous utilisons ne semble pas pouvoir s'adapter à ce cadre. D'autre part on aimerait une démonstration plus constructive.

(b**)** Le Théorème 5.6 motive une étude plus approfondie pour décrire la structure du groupe $\pi_1^t(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} - \{0,1,\infty\})$.

(c**)** Il résulte de la théorie du groupe fondamental modéré (cf. [Gr], exposé XIII, Cor. 2.12, p. 392), que le groupe $\pi_1^t(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} - \{0,1,\infty\})$ peut être engendré par trois éléments σ_0, σ_1, et σ_∞, tel que σ_0 (resp. σ_1 et σ_∞) soit un générateur de l'inertie correspondant à 0 (resp. 1, et ∞), et que l'on ait la relation $\sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = 1$. De plus la partie première à p de $\pi_1^t(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} - \{0,1,\infty\})$ est engendré par les générateurs σ_0, σ_1 et σ_∞, avec l'unique relation ci-dessus.

5.8. Un quotient du groupe fondamental de la courbe générique X_η/L

Soient R un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps résiduel k', et X une R-courbe stable, dont la fibre générique géométrique est la courbe générique X_η/L, et la fibre spéciale $X_{k'}$ est composée de droites projectives, dont chacune rencontre les autres composantes irréductibles de $X_{k'}$ en exactement trois points doubles ordinaires. Soient U l'ouvert connexe de X obtenu en enlevant les points doubles, $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans L, et $\bar{U} := U \times_R \bar{R}$. On a un homomorphisme canonique surjectif: $\pi_1(X_\eta) \to \pi_1(\bar{U})$. Soit (Γ, G) le graphe de groupes associé à la fibre spéciale $X_{k'}$ de X, et $\pi_1(\Gamma,G)^\wedge$ le groupe complété profini du groupe fondamental du graphe de groupes (Γ, G) (cf. 2.7).

THÉORÈME 5.9. *Le groupe* $\pi_1(\Gamma,G)^\wedge$ *est un quotient du groupe fondamental* $\pi_1(X_\eta)$ *de la courbe générique* X_η/L.

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

Preuve. En effet d'aprés 3.10 il existe un isomorphisme $\pi_1(\bar{U}) \simeq \pi_1^{\mathrm{kum}}(X_k)$, et d'aprés le Théorème 2.8 on a un isomorphisme $\pi_1^{\mathrm{kum}}(X_k) \simeq \pi_1(\Gamma, G)^{\wedge}$.

Il résulte alors de la description du groupe $\pi_1(\Gamma, G)$ (cf. 2.7), que le groupe fondamental $\pi_1(X_\eta)$ de la courbe générique X_η/L en caractéristique $p > 0$, possède un quotient qui est le complété profini, d'un groupe extension d'un groupe profini libre à g générateurs (où $g := genre\, X_\eta$), par un groupe qui est un produit amalgamé de copies de $\pi_1^t(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p} - \{0, 1, \infty\})$.

REMARQUE 5.10. Avec les notations de 5.2, supposons que k soit de caractéristique nulle. Soit X_η/L la courbe générique de genre $g \geqslant 2$, en caractéristique 0. Avec les notations de 5.8, on a alors un isomorphisme $\pi_1(X_\eta) \simeq \pi_1(\bar{U})$ (cf. 3.9), et le Théorème 5.9 se traduit alors par l'existence d'un isomorphisme $\pi_1(X_\eta) \simeq \pi_1(\Gamma, G)^{\wedge}$. En particulier, il résulte de la description de $\pi_1(\Gamma, G)^{\wedge}$ que le groupe fondamental d'une courbe générique en caractéristique 0, est déterminé par le groupe $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ en caractéristique 0. Ce dernier est bien connu par le théorème d'existence de Riemman, c'est un groupe profini libre à 2 générateurs. Il serait intéressant d'avoir une preuve algébrique de ce fait.

REMARQUE 5.11. On pourrait faire 'dégénérer' la courbe générique X_η/L vers d'autres courbes stables, et obtenir en utilisant 2.8 et 3.10 des quotients du groupe fondamental $\pi_1(X_\eta)$, tout aussi intéréssants que celui qu'on obtient ci-dessus. Supposons pour fixer les idées que $g = 2$. On peut alors faire 'dégénérer' la courbe générique X_η/L en une courbe stable C_1 composée de deux courbes rationnelles lisses, complètes, et qui se croisent en trois points doubles ordinaires. On notera $\pi_1(\Gamma_1, G)$ le graphe de groupes associé à la courbe stable C_1 (cf. 2.7), et $\pi_1(\Gamma_1, G)^{\wedge}$ son complété profini. Soit aussi $\pi_1(\Gamma_2, G)$ le graphe de groupes associé à la courbe stable C_2, qui est une chaîne de 2 courbes rationnelles complètes ayant chacune un unique point double ordinaire et qui se croisent en un point double ordinaire, et soit $\pi_1(\Gamma_2, G)^{\wedge}$ son complété profini. Comme dans 5.9 le groupe $\pi_1(\Gamma_2, G)^{\wedge}$ est un quotient de $\pi_1(X_\eta)$, et on montre de la même manière que le groupe $\pi_1(\Gamma_1, G)^{\wedge}$ est aussi un quotient de $\pi_1(X_\eta)$. On peut alors se poser la question de comparer ces deux quotients.

PROPOSITION 5.12. *Si par exemple $p = 5$, alors le groupe $\pi_1(\Gamma_2, G)^{\wedge}$ n'est pas isomorphe au groupe $\pi_1(\Gamma_1, G)^{\wedge}$.*

Preuve. On se propose de montrer cela en comparant les suites de Jordan–Hölder: $H_2 \lhd H_1 \lhd \pi_1(\Gamma_i, G)^{\wedge}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, où H_1 est un sous-groupe normal d'indice 3 de $\pi_1(\Gamma_i, G)^{\wedge}$, et H_2 est un sous-groupe normal d'indice p de H_1. D'abord le nombre de suites $H_1 \lhd \pi_1(\Gamma_i, G)^{\wedge}$ est indépendant de i. En effet C_1 et C_2 sont chacune spécialisation d'une courbe de genre 2, en caractéristique p différente de 3, et les sous-groupes H_1 sont en correspondance buinivoque avec les classes d'isomorphismes des revêtements kummériens de degré 3 de C_i, et qui

https://doi.org/10.1023/A:1000146031462 Published online by Cambridge University Press

correspondent par 3.7 aux revêtements étales de degré 3 d'une courbe de genre 2, dont le nombre est égal à $(3^4-1)/(3-1)$.

A présent soit $H_1 \lhd \pi_1(\Gamma_2, G)^\wedge$ un sous-groupe normal d'indice 3 fixé, et soit $C' \to C_2$ le revêtement kummérien de C_2 correspondant au sous-groupe H_1. Le nombre de sous-groupes normaux de H_1 d'indice p, correspond au nombre de revêtements kummérien cycliques de degré p de C' (qui sont étales par 3.4), qui dans ce cas est maximal égal à $(p^4-1)/(p-1)$, car la courbe C' est ordinaire (en fait les composantes irréductibles de C' sont rationelles). En conclusion le nombre de suites $H_2 \lhd H_1 \lhd \pi_1(\Gamma_2, G)^\wedge$ est égal à

$$\left(\frac{p^4-1}{p-1}\right)\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right).$$

Soit à présent $E_1 \to \mathbb{P}^1_k$ (resp. $E_2 \to \mathbb{P}^1_k$), le revêtement défini par l'équation $x^3 = y^2 - 1$ (où y est un paramétre uniformisant de $\mathbb{P}^1_k$), qui est étale en dehors de 1, -1 et ∞, et totalement ramifié au-dessus de ces points (resp. le revêtement défini par l'équation $z^3 = (y^2-1)^{-1}$, qui est étale en dehors de 1, -1 et ∞ et totalement ramifié au-dessus de ces points). Soit $\tilde{E} \to C_1$ le revêtement de degré 3, où $\tilde{E}$ est la courbe stable obtenue en identifiant dans $E_1 \coprod E_2$ deux à deux les points au-dessus de 1 -1 et ∞ en des points doubles ordinaires. Le revêtement $f_k \colon \tilde{E} \to C_1$ est kummérien, il est donc associé à un unique sous-groupe normal $H_1 \lhd \pi_1(\Gamma_1, G)^\wedge$ d'indice 3. D'autre part la courbe $\tilde{E}$ est supersingulière, et les sous-groupes normaux $H_2 \rhd H_1$ d'indice p correspondent aux revêtements étales cycliques de degré p de $\tilde{E}$, ces revêtements sont nécessairement complétement décomposés, on en a dans ce cas $(p^2-1)/(p-1)$.

On peut aussi faire dégénèrer la courbe générique X_η/L de genre 2, en une chaîne de deux courbes elliptiques qui se croisent en un point double ordinaire. Le quotient qu'on obtient alors de $\pi_1(X_\eta)$ est un produit amalgamé de deux copies du groupe fondamental modéré d'une courbe elliptique moins un point, dont la structure n'est pas connue, et qui certainement dépend de la courbe elliptique.

Remerciements

Ce travail est le deuxième chapitre d'une thèse de doctorat effectuée à l'université de Bordeaux, sous la direction du professeur Michel Matignon. Je tiens à le remercier vivement pour l'aide et les encouragements qu'il m'a apportés durant ce travail. Mes remerciements vont également à Qing Liu pour les discussions fructueuses que nous avons eues. Je tiens aussi à remercier vivement le referee, dont les remarques et suggestions instructives, ont permis l'amélioration de la rédaction et de la présentation de ce travail.

Références

[A-M-O] Asada, M., Matsumuto, M., et Oda, T.: Local monodromy on the fundamental groups of algebraic curves along a degenerate stable curve, *J. Pure and Applied Algebra* 103 (1995) 235–283.

[Be] Belyi, G. V.: On The Galois extensions of the maximal cyclotomic field (In Russian), *Izv. Akad. Nauk. SSSR* 43 (1979) 267–276.

[D-M] Deligne, P. et Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* 36 (1969) 75–110.

[Fr] Fresnel, J.: Géométrie analytique rigide, Polycopié, Université de Bordeaux I.

[Fu] Fulton, W.: Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, *Annals of Math.* 90 (1969) 542–575.

[Ga] Garuti, M.: *Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide*, thèse Université d'Orsay, à paraître dans Compositio, 1996.

[Gr] Grothendieck, A.: Revêtements Étales et Groupe Fondamental, *Lect. Notes in Math*, 224, Springer-verlag, 1971.

[Gr-1] Grothendieck, A.: Fondements de la géométrie algébrique, *Séminaire Bourbaki* 1957–1962, Paris, 1962.

[G-D] Grothendieck, A., et Dieudonné, J.: Éléments de géométrie algébrique, chapitre 2, *Pub. Math. IHES*, 8.

[K] Kato, K.: Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory, *Duke Math. J*. 55 (1987) 629–659.

[Ma-Y] Matignon, M., et Youssefi, T.: *Prolongement de Morphismes de fibres formelles et cycles evanescents*, preprint, Université Bordeaux, 1992.

[Mat] Matsumura, H.: *Commutative Algebra*, Mathematics Lecture Note Series, Second Edit., 1980.

[Mu-F] Mumford, D., et Fogarty, J.: *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse 34, Second Enlarged Edition.

[Ra] Raynaud, M. p-groupes et réduction semi-stable des courbes, *The Grothendieck Festschrift* Vol. 3, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 179–197.

[Ra-1] Raynaud, M.: Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar, *Invent. math.*, 116 (1994) 425–462.

[Sa] Saïdi, M.: Revêtements étales et groupe fondamental de graphe de groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 318 (1994) 1115–1118.

[Sa-1] Saïdi, M.: Revêtements Étales, Courants sur les Graphes et Réduction semi-stable des courbes, *Manuscripta math.*, 89 (1996) 245–265.

[S] Serre, J. P.: *Corps locaux*, Herman, 3rd edn., Paris, 1980.

[S-1] Serre, J.P.: Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* 46, 3rd edn. corrected, 1983.

[S-2] Serre, J.P.: Lectures on the Mordell–Weil Theorem, *Aspects of Mathematics*, Vol. E15, 2nd edn., Vieweg.

[St] Stevenson, K.F: Galois groups of unramified covers of projective curves in characteristic p, PHD thesis.

[T] Tate, J.: Rigid analytic spaces, *Invent. math.* 12 (1971) 257–289.