Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 1, 1984, pp. 84-94

RAYON DE REGULARITE DANS LES ALGEBRES INFRASEQUENTIELLES

MOHAMED OUDADESS

1. Introduction. Nous commençons par caractériser les algèbres infraséquentielles (cf [**11**]) à l'aide du rayon de régularité. Nous montrons qu'une algèbre topologique (E, τ) est infraséquentielle si, et seulement si, le rayon de régularité β est borné (i.e., l'image, par β, de tout borné de (E, τ) est un borné de $\mathbf{R}_+$). Nous dirons qu'une telle algèbre est β-régulière. Nous montrons qu'une algèbre β-régulière pseudo-complète (cf [**3**]) a tous ses caractères bornés. En fait nous obtenons que l'ensemble des caractères (algébriques) M^*, de E, est équiborné. Ce résultat recouvre et généralise ceux de T. Husaïn et S.B. Ng ([**12**]), de G.A. Joseph ([**13**]) et de T. Husaïn. ([**11**]). Dans le cas des algèbres séquentielles pseudo-complètes, nous montrons que tout caractère est séquentiellement continu. Nous obtenons des résultats analogues sur les formes faiblement positives.

Nous caractérisons les algèbres fortement séquentielles par la continuité du rayon de régularité. D'où nous déduisons que l'ensemble M^*, des caractères d'une algèbre topologique (E,τ) fortement séquentielle et pseudo-complète, est équicontinu. En fait, il y a équivalence entre l'équicontinuité de M^* et la séquentialité forte de (E, τ).

Nous nous intéressons aussi aux algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.) et montrons que toute forme faiblement positive, sur de telles algèbres involutives séquentiellement complète unitaires, est bornée améliorant ainsi le résultat bien connu de Do-Sin-Sya sur les formes positives ([**9**] ou [**1**]). Nous montrons enfin que si E est une a.l.m.c. de Fréchet munie d'une involution telle que $p_\lambda(x^*x) = p_\lambda^2(x)$, pour tout λ et tout x, alors tout caractère f de E est continu si et seulement si il est hermitien. De même, si E est unitaire, toute forme linéaire est positive si et seulement si elle est faiblement positive.

Je remercie Monsieur le Professeur M. Akkar d'avoir attiré mon attention sur l'importance des éléments réguliers dans l'étude de certaines propriétés d'algèbres. Monsieur le Professeur T. Husaïn m'a reçu pour consultation, qu'il en soit vivement remercié. Je remercie enfin Monsieur

Reçu le 26 juillet 1982 et en forme revisée le 20 décembre 1982. Boursier de projet "Centres pédagogiques régionaux/MAROC". Projet conjoint M.A.I.Q.-A.C.D.I.

le Professeur J.I. Nieto pour ses encouragements et pour de nombreuses et stimulantes discussions.

2. Préliminaires. Soit E une algèbre (complexe), munie d'une topologie τ. E est dite topologique si E est une espace topologique tel que l'application $(x, y) \to x \cdot y$ est séparément continue. Si τ est séparée on dit que E est séparée. Toutes les algèbres que nous considérerons seront séparées (et complexes.)

Si τ est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_\lambda$, on dit que E est localement convexe. Si de plus les p_λ sont sous-multiplicatives (i.e., $p_\lambda(x \cdot y) \leqq p_\lambda(x) \cdot p_\lambda(y)$, pour tout x et tout y) on dit que E est localement m-convexe (a.l.m.c.).

T. Husaïn a donné, dans [**11**], les définitions suivantes, dans le cas où la multiplication est globalement continue:

(i) E est fortement séquentielle s'il existe un voisinage U de 0 tel que, pour tout x de U, $x^k \underset{k}{\to} 0$.

(ii) E est séquentielle si pour toute suite $\{x_n\}$, $x_n \to 0$, il existe $x_m \in \{x_n\}$ tel que $x_m^k \underset{k}{\to} 0$

(iii) A est infraséquentielle (resp. faiblement infraséquentielle) si pour tout borné B de A, il existe $\lambda > 0$, tel que, pour tout x de B, $(\lambda x)^k \underset{k}{\to} 0$ (resp. faiblement).

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii); cf page 413 de [**11**], Proposition 1.

Si E est une a.l.m.c. unitaire séquentiellement complète, elle est fortement séquentielle si et seulement si c'est une Q-algèbre (cf Proposition 2, de [**12**]).

Le cadre naturel des définitions (i), (ii) et (iii) est la théorie des éléments réguliers, et la technique adéquate est l'utilisation du rayon de régularité β. D'ailleurs cette approche permet d'obtenir, de manière simple, les résponses à des questions non soulevées dans [**11**], [**12**] et [**15**].

Rappels (cf [**4**]). Soit (E, τ) une algèbre topologique séparée:

1. On dit qu'une partie B de E est *idempotente* si $B^2 = B \cdot B \subset B$.

2. On désigne par β_E l'ensemble des disques bornés idempotents fermés de E (contenant l'unité e, de E, si E est unitaire).

3. Pour tout $x \in E$, on pose

$$\beta(x) = \inf\{r > 0 : \{(r^{-1} x)^n\}_{n \geqq 1} \text{ est bornée}\}, \text{ où } \inf \phi = \infty.$$

$\beta(x)$ est dit *le rayon de régularité de* x et β *le rayon de régularité.* On vérifie facilement que

(*) $\beta(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot \beta(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ $(0. \infty = 0)$

(**) $\infty > |\lambda| > \beta(x)$ entraîne $(\lambda^{-1} \cdot x)^n \underset{n}{\rightarrow} 0$.

4. Pour tout $B \in \beta_E$, l'espace vectoriel E_B engendré par B est une sous-algèbre de E. Pour $x \in E_B$, posons

$$\|x\|_B = \inf\{r > 0 : r^{-1} \cdot x \in B\}.$$

Alors $(E_B; \|\cdot\|_B)$ est une algèbre normée de boule unité B. On dit que (E, τ) est *pseudo-complète* si, pour tout $B \in \beta_E$, $(E_B; \|\cdot\|_B)$ est de Banach, ce qui est le cas si (E, τ) est séquentiellement complète (cf [**3**]). $E = U\{E_B : B \in \mathscr{B}_E\}$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$ il existe $c > 0$ tel que $(c.x)^k \underset{k}{\rightarrow} 0$. Dans toute la suite nous écrirons a.l.c. pour "algèbre localement convexe".

3. Algèbres β-régulières. Nous caractérisons, maintenant, les algèbres infraséquentielles à l'aide du rayon de régularité β.

PROPOSITION 3.1. *Une algèbre topologique (E, τ) est infraséquentielle si, et seulement si, β est borné.*

Preuve. Nécessité: Soit B un borné de (E, τ). Puisque (E, τ) est infraséquentielle, il existe $\lambda > 0$ tel que $(\lambda x)^k \underset{k}{\rightarrow} 0$, pour tout $x \in B$. Mais alors $\beta(x) \leqq \lambda^{-1}$, pour tout $x \in B$ i.e., $\beta(B)$ est borné. Suffisance: Soit B un borné de (E, τ). Puisque β est borné, il existe $m (0 < m < \infty)$ tel que $\beta(x) < m$ pour tout $x \in B$. Mais alors $(m^{-1} x)^k \underset{k}{\rightarrow} 0$, pour tout $x \in B$. Donc (E, τ) est infraséquentielle.

Remarque 3.2. Il existe des algèbres munies d'une structure bornologique (i.e., où on a une notion de borné) qu'on ne peut associer à aucune topologie (cf [**1**] ou [**10**] ou [**21**]) et pour lesquelles le rayon de régularité β est définie et borné. Pour cette raison, nous posons la définition suivante.

Définition 3.3. Une algèbre topologique (E, τ) telle que β est borné sera dite *β-régulière.*

Exemple 3.4. ([**11**])

Exemple 1. Toute algèbre normée est β-régulière.

Exemple 2. Soit $C_0(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues à supports compacts, munie de la topologie limite inductive stricte définie par les algèbres de Banach $C[-n, n]$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-n, n]$. $C_0(\mathbf{R})$ est une a.l.m.c. fortement séquentielle non métrisable.

Exemple 3. L'algèbre l_1, des séries absolument convergente munie de la convolution comme multiplication et de la topologie faible $\sigma(l_1, l_\infty)$, est séquentielle.

Exemple 4. Soit $E = C_b(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues bornées munie de la topologie strict β définie par la famille de semi-normes $\{p_\phi:\phi \in C_0(\mathbf{R})\}$, où

$$C_0(\mathbf{R}) = \{\phi \in C_b(\mathbf{R}):\phi \text{ s'annule à l'infini}\} \quad \text{et}$$

$$P\phi(f) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) \cdot \phi(x)|.$$

E est infraséquentielle. Elle n'est pas séquentielle. Pour d'autres exemples, voir [**14**] ou [**15**].

On peut montrer qu'une large classe d'algèbres, les algèbres localement uniformément A-convexes, sont infraséquentielles. On écrit en abrégé a.l.u.A-convexe. Ces algèbres on été introduites dans [**6**] et plus ou moins regardées dans [**1**] et [**6**]. Nous avons fait une étude systématique de leurs propriétés fondamentales dans [**17**].

4. Caractères et espaces de caractères.

THÉORÈME 4.1. *Soit* (E, τ) *une* a.l.c. *β-régulière pseudo-complète. Alors l'ensemble M^* des caractères est équiborné, i.e., pour tout borné B de (E, τ). $\cup\{f(B):f \in M^*\}$ est borné. En particulier tout caractère est borné.*

Preuve. Comme on sait que β est borné (Proposition 3.1), il suffit de montrer que $|f(x)| \leqq \beta(x)$, pour tout $x \in E$ et tout $f \in M^*$. Pour tout $r > \beta(x)$, on a

$$(r^{-1} . x)^k \underset{k}{\rightarrow} 0.$$

Alors il existe $B \in \beta_E$(cf préliminaires) tel que $r^{-1} . x \in B$. Soit l'algèbre de Banach $(E_B; \|\cdot\|_B)$ et considérons la restriction, encore notée f, de f à E_B. On a $|f(x)| \leqq \|x\|_B \leqq r$. D'où $|f(x)| \leqq \beta(x)$.

Remarque 4.2. Si (E, τ) est localement convexe, on a $\beta(x) = \rho(x)$ où ρ est le rayon spectral de x; et l'on a

$$|f(x)| \leqq \rho(x) = \sup\{|g(x)|:g \in M^*\}$$

d'où immédiatement les résultats de [**11**], [**12**] et [**15**]. En fait, il est facile de voir que dans ce cas: (E, τ) est β-régulière si, et seulement si, M^* est équiborné.

5. Algèbres séquentielles. Nous caractérisons les algèbres séquentielles à l'aide du rayon de régularité β, ce qui nous permet de montrer que tout caractère, d'une algèbre (E, τ) séquentielle et pseudo-complète, est séquentiellement continu.

PROPOSITION 5.1. *Une algèbre topologique (E, τ) est séquentielle si, et seulement si, toute suite $(x_n)_n$ convergent vers 0 contient un élément x_{n_0} tel que $\beta(x_{n_0}) < 1$.*

Preuve. Nécessité: Soit $(x_n)_n$ telle que $x_n \to 0$. On a aussi $2x_n \to 0$. Comme (E, τ) est séquentielle, il existe n_0 tel que

$$(2x_{n_0})^k \underset{k}{\to} 0.$$

D'où $\beta(x_{n_0}) \leqq \frac{1}{2} < 1$. Suffisance: Soit $(x_n)_n$ telle que $x_n \to 0$. Par hypothèse, il existe n_0 tel que $\beta(x_{n_0}) < 1$. Mais alors

$$x_{n_o}^k \underset{k}{\to} 0.$$

THÉORÈME 5.2. *Soit (E, τ) une* a.l.c. *séquentielle et pseudo-complète. Alors tout caractère de E est séquentiellement continu.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ telle que $x_n \to 0$ et $f(x_n) \not\to 0$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(x_{n_p})_p$ de $(x_n)_n$ telle que $|f(x_{n_p})| > \epsilon_0$. On a donc

$$|f(\epsilon_0^{-1} . x_{n_p})| > 1.$$

Par ailleurs

$$\epsilon_0^{-1} \cdot x_{n_p} \to 0.$$

Soit p_0 tel que

$$\beta(\epsilon_0^{-1} \cdot x_{n_{p_0}}) < 1$$

(Proposition 6.1). Alors

$$|f(\epsilon_0^{-1} \cdot x_{n_{p_0}})| \leqq \beta(\epsilon_0^{-1} x_{n_{p_0}}) < 1.$$

Contradiction.

Remarque 5.3. On peut également, pour obtenir le Théorème 6.2, montrer que β est séquentiellement continu et utiliser $|f(x)| \leqq \beta(x)$, pour tout x et tout $f \in M^*$. Ceci exprime d'ailleurs une équicontinuité séquentielle. Signalons aussi que (E, τ) est séquentielle si, et seulement si, β est séquentiellement continu.

Remarque 5.4. On serait tenté de dire que tout caractère d'une algèbre topologique séquentielle commutative (non nécessairement localement multiplicativement convexe) de Fréchet, est continu (cf [**12**]). En fait, comme nous allons le voir, une telle algèbre est une a.l.m.c.

PROPOSITION 5.5. *Si* (E, τ) *est une* a.l.c. *β-régulière donc en particulier séquentielle commutative de Fréchet, alors c'est une* a.l.m.c.

Preuve. (E, τ) étant β-régulière chacun de ses éléments est régulier et alors c'est une a.l.m.c. d'après de Lemme 4 de [**4**].

Compte-tenu de la Proposition 6.5 et des résultats de [**11**], [**12**] et [**15**], toutes les notions de "séquentialité" coïncident dans le cas des a.l.m.c. commutatives de Fréchet. On a:

PROPOSITION 5.6. *Soit* (E, τ) *une* a.l.m.c. *commutative de Fréchet. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) (E, τ) *est fortement séquentielle.*

(ii) (E, τ) *est séquentielle.*

(iii) (E, τ) *est infraséquentielle.*

6. Algèbres fortement séquentielles. Nous caractérisons les algèbres fortement séquentielles à l'aide du rayon de régularité β; ce qui permet de montrer que tout caractère, d'une algèbre fortement séquentielle et pseudo-complète (E, τ), est continu. En fait, nous montrons que l'espace M^* des caractères est équicontinu. L'algèbre (E, τ) est commutative.

PROPOSITION 6.1. *Une algèbre topologique* (E, τ) *est fortement séquentielle si, et seulement, si, β est continu.*

Preuve. Nécessité: Supposons (E, τ) fortement séquentielle et soit V le voisinage de 0 tel que

$$x^k \underset{k}{\to} 0, \text{ pour tout } x \in V.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, $W = \epsilon/2 \cdot V$ est un voisinage de 0 et on a $\beta(y) \leqq \epsilon/2 < \epsilon$, pour tout $y \in W$, car $\beta(x) \leqq 1$, pour tout $x \in V$. Donc β est continue. Suffisance: supposons β continu et considérons le voisinage $V = [0, 1]$ de 0, dans $\mathbf{R}_+$. Alors il existe un voisinage U de 0 tel que $\beta(x) < 1$, pour tout $x \in U$. Mais alors $x^k \underset{k}{\to} 0$ pour tout $x \in U$ i.e., (E, τ) est fortement séquentielle.

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-007-0 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 6.2. *Soit* (E, τ) *une* a.l.c. *fortement séquentielle et pseudo-complète. Alors l'ensemble des caractères* M^* *de* E *est équicontinu. Donc, en particulier, tout caractère est continu.*

Preuve. Comme (E, τ) est en particulier infraséquentielle on a $|f(x)| \leqq \beta(x)$, pour tout x et tout $f \in M^*$. Le résultat découle alors de la Proposition 6.1.

Remarque 6.3. Si (E, τ) est une a.l.c., on a $\beta(x) = \rho(x)$, où ρ est le rayon spectral de x. Et l'on voit facilement que (E, τ) est fortement séquentielle si, et seulement si, M^* est équicontinu.

7. Formes faiblement positives.

Définition 7.1. Soient E une algèbre munie d'une involution et f une forme linéaire sur E. On dit que f est *positifive* (resp. *faiblement positive*) si $f(x \overset{*}{.} x) \geqq 0$, pour tout $x \in E$(resp. $f(h^2) \geqq 0$ pour h hermitien de E i.e., $h^* = h$).

Rappels (cf [**10**] et [**1**]). 1. Une partie, B d'une algèbre munie d'une involution, est dite *auto-adjointe* si $B^* = \{x^*: x \in A\} = B$. Elle est dite **-idempotente* si elle est idempotente et auto-adjointe.

2. L'enveloppe disquée, la fermeture, l'image directe ou réciproque par un morphisme d'algèbre involutif, etc . . . conserve l'*-idempotence.

LEMME 7.2. *Tout élément régulier, d'une* a.l.c. *pseudo-complète munie d'une involution continue, est contenue dans une algèbre de Banach munie d'une involution.*

Preuve. Elle est directe et est omise.

THÉORÈME 7.3. *Soit* (E, τ) *une* a.l.c. *unitaire,* β*-régulière et pseudo-complète, munie d'une involution continue. Alors*

(i) *l'ensemble des formes faiblement positives* f, *sur* E, *telles que* $f(e) = 1$ *est équiborné*;

(ii) *toute forme faiblement positive, sur* E, *est bornée.*

Preuve. Comme au Théorème 4.1.; il suffit de montrer que $|f(x)| \leqq \beta(x)$ pour tout $x \in E$ et toute forme faiblement f telle que $f(e) = 1$. Pour tout $r > \beta(x)$, on a

$$(r^{-1} . x)^k \underset{k}{\to} 0.$$

Alors il existe un disque borné *-idempotent fermé B tel que $r^{-1} . x \in B$. Soit l'algèbre de Banach $(E_B; \|\cdot\|_B)$ et considérons la restriction, encore notée f, de f à E_b. $(E_B; \|\cdot\|_B)$ est munie d'une involution et f est une forme faiblement positive sur E. Donc, d'après ([**19**], Proposition 6.1), on a

$$|f(x)| \leqq \|x\|_B \leqq r.$$

D'où $|f(x)| \leqq \beta(x)$. Si f est une forme faiblement positive, on a

$$|f(x)| \leqq \beta(x)\cdot|f(e)|.$$

T. Husaïn et S. B. Ng ont montré ([**12**]) que toute forme positive sur une a.l.m.c. (non nécessairement commutative) séquentielle complète est borné. Nous améliorons ici ce résultat dans deux directions: nous considérons des algèbres plus générales et montrons que les formes positives sont séquentiellement continues.

THÉORÈME 7.4. *Soit* (E, τ) *une* a.l.c. *unitaire, séquentielle et pseudo-complète, munie d'une involution continue. Alors toute forme faiblement positive est séquentiellement continue.*

Preuve. (E, τ) étant séquentielle elle est, en particuler, β-régulière et donc, comme au Théorème 7.3, on a $|f(x)| \leqq \beta(x)$. On raisonne alors comme au Théorème 5.2.

THÉORÈME 7.5. *Soit* (E, τ) *une* a.l.c. *unitaire, fortement séquentielle et pseudo-complète, munie d'une involution continue. Alors toute forme faiblement positive est continu.*

Preuve. On a encore $|f(x)| \leqq \beta(x)$; et on raisonne comme au Théorème 7.2.

8. Algèbres localement m-convexes.

LEMME 8.1. *Soit E une algèbre localement convexe munie d'une involution continue et f une forme linéaire sur E. Alors, si f n'est pas bornée, il existe une suite $(x_n)_n$ bornée, formée d'éléments hermitiens de E, telle que $\{f(x_n)\}_n$ soit non bornée.*

Preuve. Si f n'est pas bornée il existe une suite $\{x_n\}_n$ bornée telle que $\{f(x_n)\}$ soit non bornée. Or $x_n = \overset{1}{x}_n + i\,\overset{2}{x}_n$ où $\overset{1}{x}_n$ et $\overset{2}{x}_n$ sont hermitiens. Donc $\{f(\overset{1}{x}_n)\}_n$ ou $\{f(\overset{2}{x}_n)\}_n$ est non bornée. Mais $\{x_n\}_n$ est bornée si et seulement si $\{\overset{1}{x}_n\}_n$ et $\{\overset{2}{x}_n\}_n$ sont bornées car

$$\overset{1}{x}_n = \frac{x_n + x_n^*}{2} \quad \text{et} \quad \overset{2}{x}_n = \frac{x_n - x_n^*}{2i},$$

et l'involution est continue donc bornée. Par conséquent une des suites $\{\overset{1}{x}_n\}_n$ et $(\overset{2}{x}_n)_n$ satisfait les conditions voulues.

En utilisant l'ingénieuse technique de Do-Sin-Sya nous améliorons le résultat de Dixon et Fremlin (Théorème 2, de [**8**]) qui est déjà une généralisation d'un théorème de Do-Sin-Sya (cf. [**1**] ou [**8**]).

LEMME 8.2. *Soit E une* a.l.m.c. *unitaire séquentiellement complète, munie d'une involution continue et f une forme faiblement positive sur E. Alors*:

1) $f(h)$ *est réel et* $|f(h)| \leqq |h|_\sigma$, *pour tout h hermitien.*

2) $f^2(h) \leqq f(h^2)$, *pour tout h hermitien.*

3) $|f(x)| \leqq p(x)$, *pour tout x où* $p(x) = |x \overset{*}{\cdot} x|_\sigma^{1/2}$.

Preuve. Elle est la même que dans le case des algèbres de Banach munies d'une involution (cf. par exemple la proportion (6,1), de [**19**]), compte tenu du Lemme 1, page 298 de [**13**]. $|\cdot|_\sigma$ désigne le rayon spectral.

THÉORÈME 8.3. *Soit E une* a.l.m.c. *unitaire séquentiellement complète munie d'une involution continue. Alors tout forme faiblement positive sur E est bornée.*

Preuve. Soit f une forme faiblement positive sur E telle que $f(e) = 1$. Si f n'est pas bornée, il existe une suite $\{x_n\}_n$ bornée formée d'éléments hermitiens telle que $\{f(x_n)\})_n$ soit non bornée; soit par exemple $|f(x_n)| \geqq n$. Mais les $f(x_n)$ sont réels donc en multipliant certains d'entre eux pour -1 on peut se ramener à $f(x_n) \geqq n$. Alors $\{|x_n/n\}_{\mathrm{n}}$ tend vers 0 et $f(x_n/n) \geqq 1$. En utilisant la technique de Do-Sin-Sya (cf [**5**] ou [**7**]) on complète la preuve par contradiction.

COROLLAIRE 8.4. *Soit E une* a.l.m.c. *unitaire séquentiellement complète munie d'une involution continue alors toute forme positive est bornée.*

COROLLAIRE 8.5. *Soit E une* a.l.m.c. *séquentiellement complète munie d'une involution continue alors tout caractère hermitien est borné.*

Nous nous intéressons maintenant aux formes faiblement positives et aux caractères dans des a.l.m.c. dont les semi-normes définissant la topologie sont stellaires.

Définition 8.6. Soit (E, p) une algèbre sur $\mathbf{C}$, où p est une seminorme d'algèbre sur E. On dit que E est *stellaire* si elle est munie d'une involution telle que $p(x \overset{*}{\cdot} x) = p^2(x)$ pour tout x.

Remarque 8.7. On a $p(x^*) = p(x)$; donc l'involution est continue. En effet: $p(x^*) = p(x)$ car

(1) $\quad p^2(x) = p(x \overset{*}{\cdot} x) \leqq p(x^*) \cdot p(x)$ et

(2) $\quad p^2(x^*) = p(x.x^*) \leqq p(x) \cdot p(x^*)$.

Maintenant si $p(x) \neq 0$, (1) donne $p(x) \leqq p(x^*)$; et en remplaçant x par x^*, on a $p(x^*) \leqq p(x)$. On a aussi: $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x^*) = 0$.

Rappelons la construction de la $\mathbf{C}^*$algèbre enveloppante de (E, p).

Soit $N = \{x \in E:p(x) = 0\}$. C'est un idéal bilatère auto-adjoint de E, et la norme $\|\cdot\|$ déduite de p fait E/N une algèbre normée involutive dont la complétée E est une $\mathbf{C}^*$algèbre.

Cette construction est donné dans [**5**] avec la condition (superflue) que $p(x^*) = p(x)$.

PROPOSITION 8.8. *Caractère χ continu d'une algèbre semi-normée stellaire E est hermitien.*

Preuve. Comme χ est continu, il donne naissance à un caractère continu

$$\chi_1:(E/_N, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbf{C},$$

qui se prolonge alors en un caractère (continu)

$$\chi_2:B \rightarrow \mathbf{C}.$$

χ_2 est hermitien, d'où χ hermitien.

THÉORÈME 8.9. *Soit E une* a.l.m.c. *commutative de Fréchet munie d'une involution telle que $p_\lambda (x \overset{*}{\cdot} x) = p_\lambda^2 (x)$, pour tout λ et tout x alors tout caractère de E est continu si et seulement si il est hermitien.*

Preuve. Si χ est continu, il existe p_{λ_0} telle que

$$\chi:(E, p_{\lambda_0}) \rightarrow \mathbf{C}$$

soit continu et on conclue à l'aide de la proposition précédente.

Si χ est hermitien, il est continu (cf. [**16**]).

THÉORÈME 8.10. *Soit E une* a.l.m.c. *unitaire de Fréchet munie d'une involution telle que $p_\lambda (x \overset{*}{\cdot} x) = p_\lambda^2 (x)$, pour tout λ et tout x et soit f une forme linéaire sur E. Alors f est positive si et seulement si elle est faiblement positive.*

Preuve. Si f est positive elle est faiblement positive. Si f est faiblement positive elle est continue (Corollaire 8.4.). Donc il existe λ_0 tel que

$$f:(E, p_{\lambda_0}) \rightarrow \mathbf{C},$$

soit continue, mais alors f donne naissance à une forme faiblement positive f' sur la $\mathbf{C}^*$algèbre enveloppante de (E, p_{λ_0}). D'après le Corollaire (4.7.8) de [**10**], f^1 est positive et donc f est positive.

Avec le même technique que dans la preuve du Théorème 8.3. on peut également étendre le Théorème 11.1, page 178, de [**7**], aux formes faiblement positives. Plus précisément on a le:

THÉORÈME 8.11. *Soit E une algèbre topologique unitaire de Fréchet munie d'une involution continue alors toute forme faiblement positive sur E est continue.*

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Akkar, *Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques ou bornologiques*, Thèse Sc. Math., Univ. Bordeaux I (1976).

2. ———*Sur les structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes*, C.R. Acad. Sc. Paris *279* (1974), Série A, 941-944.

3. G. R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. *15* (1965), 399-421.

4. A. Arosio, *Locally convex inductive limits of normed algebras*, Rend. Sem. Mat., Univ. Padova *51* (1974), 333-359.

5. N. Bourbaki, *Théories spectrales*, Chapitres 1 et 2 (Hermann, 1967).

6. A. C. Cochran, *Representations of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. *41* (1973), 473-479.

7. H. G. Dales, *Automatic continuity: A survey*, Bull. London Math. Soc. *10* (1978), 129-183.

8. P.G. Dixon et D. H. Fremlin, *A remark concerning multiplicative functionals on* L.M.C. *algebras*, J. London Math. Soc. *5* (1972), 231-232.

9. Do-Sin-Sya (Tao-Shing-Shah), *On semi-normed rings with involution*, Akad. Nauk. S.S.S.R. Sc. Math. *23* (1959), 509-528.

10. H. Hogbe-Nlend, *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bul. Soc. Brasil. Math. *3* (1972), 19-56.

11. T. Husaïn, *Infrasequential topological algebras*, Can. Math. Bull. *22* (1979).

12. T. Husaïn et S. B. Ng, *On the boundedness of multiplicative and positive functionals*, J. Antral. Math. Soc. *21* (1976), 498-503.

13. T. Husaïn et R. Rigelhof, *Representations of* M. Q.**algebras*, Math. Ann. *180* (1969), 297-306.

14. T. Husaïn, *Multiplicative functionals on topological algebras* (to be published).

15. G. A. Joseph, *Multiplicative functionals and a class of topological algebras*, Bull. Australian Math. Soc. *17* (1977), 391-399.

16. E. A. Michaël, *Locally m-convex algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. *11* (1953).

17. M. Oudadess, *Aspects topologiques et bornologiques des* a.l.u.*A-convexes*, Rapports de recherches D. M. S. *82-23*, Université de Montréal (1982).

18. *Continuité des caractères dans les* a.l.u.*A-convexes*, Rapports de recherches D. M. S. *82-8*, Univ. de Montréal (1982).

19. V. Ptàk, *Banach algebras with involution*, Manuscripta Math. *6* (1972), 245-290.

20. C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras* (D. van Nostrand, 1960).

21. L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Math. *230* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

Université de Montréal,
Montréal, Québec