



COMPOSITIO MATHEMATICA

Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique

Wen-Wei Li

Compositio Math. **147** (2011), 524–590.

[doi:10.1112/S0010437X10004963](https://doi.org/10.1112/S0010437X10004963)



FOUNDATION
COMPOSITIO
MATHEMATICA

*The London
Mathematical
Society*





Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique

Wen-Wei Li

ABSTRACT

We set up a formalism of endoscopy for metaplectic groups. By defining a suitable transfer factor, we prove an analogue of the Langlands–Shelstad transfer conjecture for orbital integrals over any local field of characteristic zero, as well as the fundamental lemma for units of the Hecke algebra in the unramified case. This generalizes prior work of Adams and Renard in the real case and serves as a first step in studying the Arthur–Selberg trace formula for metaplectic groups.

Table des matières

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Introduction | 525 |
| 2 | Le groupe métaplectique | 529 |
| 2.1 | Revêtements de groupes réductifs | 529 |
| 2.2 | La représentation de Weil et le groupe métaplectique local | 530 |
| 2.3 | Sous-groupes et réseaux hyperspéciaux | 531 |
| 2.4 | Modèles de la représentation de Weil | 531 |
| 2.5 | Le cas global | 535 |
| 3 | Classes de conjugaison semi-simples dans les groupes classiques | 537 |
| 3.1 | Le cas du groupe | 537 |
| 3.2 | Conjugaison géométrique, le cas des corps locaux | 540 |
| 4 | Le caractère de la représentation de Weil | 541 |
| 4.1 | Formules du caractère | 541 |
| 4.2 | Formules pour $\Theta_{\psi}^{+} - \Theta_{\psi}^{-}$, la forme de Cayley | 543 |
| 4.3 | Paramètres et la forme de Cayley | 545 |
| 4.4 | La formule via le modèle latticiel | 548 |
| 4.5 | Formules sur l'algèbre de Lie | 549 |
| 4.6 | Décompositions | 550 |
| 4.7 | La formule du produit | 551 |
| 5 | Endoscopie | 552 |
| 5.1 | Données endoscopiques elliptiques | 552 |
| 5.2 | Une notion de stabilité | 554 |
| 5.3 | Facteur de transfert | 554 |
| 5.4 | Descente parabolique | 557 |
| 5.5 | Énoncés du transfert et du lemme fondamental | 559 |

Received 28 September 2009, accepted in final form 31 March 2010, published online 7 September 2010.
 2000 Mathematics Subject Classification 22E35 (primary), 11F72, 22E30, 22E50 (secondary).
 Keywords: endoscopy, metaplectic group, orbital integral, Langlands–Shelstad conjecture, fundamental lemma.
 This journal is © Foundation Compositio Mathematica 2010.

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Transfert : le cas archimédien | 561 |
| 6.1 | L'endoscopie chez Renard | 561 |
| 6.2 | Comparaison de facteurs de transfert | 563 |
| 6.3 | Le cas complexe | 565 |
| 7 | Descente semi-simple du facteur de transfert | 565 |
| 7.1 | Le formalisme de descente | 566 |
| 7.2 | Le cas non ramifié | 569 |
| 7.3 | Énoncé de résultats | 570 |
| 7.4 | Des lemmes techniques | 570 |
| 7.5 | Descente des termes Δ', Δ'' | 574 |
| 7.6 | Descente du terme Δ_0 | 576 |
| 7.7 | Comparaison avec les facteurs de transfert des groupes classiques | 579 |
| 8 | Transfert : le cas non archimédien | 581 |
| 8.1 | Voisinages d'un élément semi-simple | 581 |
| 8.2 | Un triplet endoscopique non standard | 582 |
| 8.3 | Démonstration du transfert | 583 |
| 8.4 | Démonstration du lemme fondamental pour les unités | 585 |
| | Remerciements | 588 |
| | References | 589 |

1. Introduction

Soit F un corps local de caractéristique nulle. Il existe une famille importante de revêtements non linéaires $\mathbf{p} : \mathrm{Sp}(2n, F) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n, F)$ qui s'appellent les groupes métaplectiques. À un caractère additif non-trivial $\psi : F \rightarrow \mathbb{S}^1$ est associée la représentation de Weil de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$, notée par ω_ψ . Il serait tentant d'appliquer la formule des traces d'Arthur–Selberg dans ce cadre. Comme dans le cas de groupes réductifs, on bute inévitablement aux problèmes liés à la stabilité. Cependant on ne peut pas adapter littéralement la théorie de l'endoscopie car $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ n'est pas un groupe linéaire algébrique. L'objet de cet article est de mettre en place un tel formalisme, puis d'établir le transfert local d'intégrales orbitales.

Bien que le revêtement métaplectique soit traditionnellement un revêtement à deux feuillets, pour des raisons techniques nous ferons agrandir le revêtement métaplectique de sorte que $\mathrm{Ker}(\mathbf{p}) = \mu_8 := \{z \in \mathbb{C}^\times : z^8 = 1\}$. Cela n'affecte pas les résultats que l'on cherche.

Les représentations de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ qui nous intéressent sont celles telles que la multiplication par chaque $\varepsilon \in \mu_8$ agit par $\varepsilon \cdot \mathrm{id}$; ces représentations sont dites spécifiques. Par exemple, ω_ψ est spécifique. Pour l'étude de telles représentations, il suffit de considérer les fonctions telles que $f(\varepsilon \tilde{x}) = \varepsilon^{-1} f(\tilde{x})$ pour tout $\varepsilon \in \mu_8$; ces fonctions sont dites anti-spécifiques.

Notre approche est modélisée sur l'endoscopie pour les groupes réductifs. Notons $G := \mathrm{Sp}(2n)$, $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$. Tout d'abord il faut trouver des bonnes définitions pour :

- (i) les groupes endoscopiques elliptiques H de \tilde{G} ;
- (ii) la correspondance de classes de conjugaison semi-simples entre H et G ;
- (iii) une notion de conjugaison stable sur \tilde{G} ;
- (iv) le facteur de transfert Δ .

Une fois que ceci sera fait, on pourra définir l'intégrale orbitale endoscopique

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_{\delta} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f) \tag{1}$$

d'une fonction anti-spécifique f ; les notations sont analogues à celles pour l'endoscopie des groupes réductifs et on les expliquera dans § 5.5. Par la suite, on peut formuler le transfert de fonctions $f \mapsto f^H$ qui fait concorder $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ et l'intégrale orbitale stable $J_H^{\text{st}}(\cdot, f^H)$ sur H . Comme pour l'endoscopie pour les groupes réductifs, le transfert doit être explicite pour les fonctions sphériques dans le cas non ramifié. De tels énoncés sont connus sous le nom de 'lemme fondamental'.

Esquissons nos réponses aux questions ci-dessus.

- (i) Soit F une extension finie de \mathbb{Q}_p , $p > 2$. Selon un résultat de Savin [Sav88], l'algèbre d'Iwahori–Hecke anti-spécifique de \tilde{G} est isomorphe à l'algèbre d'Iwahori–Hecke de $\text{SO}(2n + 1)$, le groupe orthogonal impair déployé. Cela suggère que l'on doit regarder $\text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ comme le groupe dual de \tilde{G} ; de telles évidences existent aussi pour le cas $F = \mathbb{R}$ (voir [ABPTV07]). En poursuivant cette philosophie, on définit une donnée endoscopique elliptique de $\widetilde{\text{Sp}}(2n)$ comme une paire $(n', n'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ telle que $n' + n'' = n$; le groupe endoscopique associé est $H_{n',n''} := \text{SO}(2n' + 1) \times \text{SO}(2n'' + 1)$. Contrairement à l'endoscopie pour $\text{SO}(2n + 1)$, on distingue les données (n', n'') et (n'', n') .
- (ii) Soit $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{n',n''}(F)$ semi-simple ayant valeurs propres

$$\underbrace{a'_1, \dots, a'_{n'}, 1, (a'_{n'})^{-1}, \dots, (a'_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma'}; \underbrace{a''_1, \dots, a''_{n''}, 1, (a''_{n''})^{-1}, \dots, (a''_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma''}.$$

On dit que $\delta \in G(F)$ correspond à γ s'il est semi-simple avec valeurs propres

$$a'_1, \dots, a'_{n'}, (a'_{n'})^{-1}, \dots, (a'_1)^{-1}, -a''_1, \dots, -a''_{n''}, -(a''_{n''})^{-1}, \dots, -(a''_1)^{-1}.$$

Cela induit une application entre classes de conjugaison semi-simples géométriques.

- (iii) Il y a aussi une définition *ad hoc* de stabilité : deux éléments semi-simples réguliers dans \tilde{G} sont stablement conjugués si leurs images dans $G(F)$ sont stablement conjugués et si $\text{tr } \omega_{\psi}^+ - \text{tr } \omega_{\psi}^-$ prend la même valeur, où ω_{ψ}^{\pm} sont les deux morceaux irréductibles de la représentation de Weil. C'est aussi la voie poursuivie dans [Ada98, How07].
- (iv) Le facteur de transfert est plus subtil. Lorsque $F = \mathbb{R}$ et $n'' = 0$, Adams a défini un facteur de transfert Δ sur l'ensemble des éléments semi-simples réguliers dans \tilde{G} et il est égal à $\text{tr } \omega_{\psi}^+ - \text{tr } \omega_{\psi}^-$. Plus généralement, pour un groupe endoscopique H quelconque, le facteur de transfert est défini dans cet article comme un produit $\Delta = \Delta' \Delta'' \Delta_0$, où Δ', Δ'' sont fabriqués à partir des caractères $\text{tr } \omega_{\psi}^{\pm}$ et Δ_0 est un terme relativement simple qui est stablement invariant. Le facteur Δ_0 coïncide avec le facteur défini par Renard [Ren99]. Il n'y a pas de facteur Δ_{IV} comme en [LS87], car nous avons normalisé les intégrales orbitales.

Le facteur de transfert satisfait aux propriétés suivantes.

Spécificité (le corollaire 5.12) : on exige cette propriété de sorte que l'intégrale orbitale endoscopique (1) est bien définie.

Propriété de cocycle (la proposition 5.13) : c'est une condition naturelle pour l'endoscopie, qui affecte des signes aux classes de conjugaison dans une classe de conjugaison semi-simple régulière stable.

Descente parabolique (la proposition 5.18) : cela réduit le calcul du facteur de transfert aux éléments elliptiques ; c'est aussi la principale raison pour laquelle on travaille sur le revêtement à huit feuillets.

Normalisation (la proposition 5.15) : dans le cas non ramifié, le facteur vaut 1 pour les éléments à réductions régulières qui se correspondent.

Symétrie (la proposition 5.16) : qui relie les facteurs de transfert pour $H_{n',n''}$ et $H_{n'',n'}$. Cette symétrie est réalisée par la multiplication par une image réciproque canonique dans \tilde{G} de $-1 \in G(F)$, ce que l'on désigne encore par -1 . L'usage d'un tel élément est loisible car on travaille avec le revêtement à huit feuillets.

Formule du produit (la proposition 5.17) : elle servira à stabiliser les termes elliptiques réguliers dans la formule des traces.

Les quatre premières propriétés et la descente semi-simple caractérisent le facteur de transfert dans le cas non ramifié (cf. [Hal93]).

Dans le cas $F = \mathbb{R}$, Adams [Ada98] a établi le relèvement de caractères entre \tilde{G} et $\mathrm{SO}(2n + 1)$ et Renard [Ren98] a démontré le transfert d'intégrales orbitales. Pour les groupes endoscopiques $H_{n',n''}$ en général, le transfert d'intégrales orbitales est établi par Renard dans le cas réel ; son formalisme paraît différent, mais il est équivalent au nôtre, pour l'essentiel. Pour F non archimédien, $n' = 1$ et $n'' = 0$, J. Schultz a établi le relèvement de caractères entre \tilde{G} et $\mathrm{SO}(3)$ dans sa thèse [Sch98].

Indiquons brièvement notre approche. À la suite de Langlands, Shelstad [LS90] et Waldspurger, on applique la méthode de descente semi-simple de Harish-Chandra pour réduire le transfert à l'algèbre de Lie. Le revêtement disparaît et on se ramène à des situations composées de l'endoscopie pour les groupes unitaires et symplectiques, ainsi qu'une situation 'non standard' étudiée dans [Wal08], à savoir le transfert entre les algèbres de Lie de $\mathrm{Sp}(2n)$ et $\mathrm{SO}(2n + 1)$. Grâce aux travaux de Ngô Bao Châu [Ngo10], le transfert est maintenant établi dans chaque situation ci-dessus. Le noyau technique de cet article est donc de prouver que notre facteur Δ se descend en les bons facteurs aux algèbres de Lie. On demande de plus que les facteurs ainsi descendus soient normalisés dans le cas non ramifié.

Récapitulons la structure de cet article.

- Dans § 2 et § 3, on fixe des notations et on récapitule les propriétés de base du groupe métaplectique, ainsi que le paramétrage des classes de conjugaison semi-simples dans les groupes classiques. Remarquons que notre paramétrage diffère de celui de [Wal01] (voir la remarque 3.4).
- Dans § 4, on rappelle les formules du caractère de la représentation de Weil dues à Maktouf [Mak99] en suivant l'approche de Thomas [Tho08a]. Ces formules servent aussi à caractériser le scindage au-dessus d'un parabolique de Siegel (le corollaire 4.7). Pour traiter le cas non ramifié, il faudra aussi étudier le caractère via le modèle latticiel.
- Dans § 5, les fondations de l'endoscopie sont mises en place. On établit aussi des résultats utiles pour les articles qui feront suite.
- La section § 6 traite le transfert archimédien. On réconcilie le formalisme de Renard avec le nôtre. On prouve que nos facteurs de transfert coïncident et le transfert archimédien en résulte.
- La section § 7 est consacrée à la descente semi-simple. La descente des termes Δ' , Δ'' repose sur des formules de Maktouf et le calcul de l'indice de Weil de la forme de Cayley (le théorème 4.16). D'autre part, la descente du terme Δ_0 est une manipulation des symboles locaux et des formes quadratiques.

- La section § 8 reprend les arguments pour l’endoscopie des groupes réductifs (cf. [Wal08]) ; on établit le transfert non archimédien et le lemme fondamental pour les unités par la méthode de descente.

Dans §§ 6–7, on travaillera avec le revêtement métaplectique à \mathbf{f} feuillets avec $8|\mathbf{f}$. Dans § 8, on supposera $\mathbf{f} = 8$.

Enfin, signalons un autre formalisme de l’endoscopie pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ proposé par Renard dans [Ren99] pour le cas $F = \mathbb{R}$. Grosso modo, les données endoscopiques elliptiques sont toujours en bijection avec les paires $(n', n'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ telles que $n' + n'' = n$, mais les groupes endoscopiques sont $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n'')$. Le facteur de transfert est Δ_0 . Nous étudierons une variante de ce formalisme en détail dans § 6, dont les définitions marchent dans le cas non archimédien sans modification. En particulier, on peut parler du transfert d’intégrales orbitales à la Renard.

Remarquons que l’on peut déduire le transfert à l’aide du transfert à la Renard composé avec le transfert de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2k)$ vers $\mathrm{SO}(2k + 1)$ (associé à la paire $(k, 0)$) pour $k = n'$ et $k = n''$. Vu la définition du facteur de transfert $\Delta = \Delta' \Delta'' \Delta_0$, cette approche paraît raisonnable. En effet, le transfert pour $F = \mathbb{R}$ sera démontré de cette façon dans § 6. Réciproquement, si l’on peut montrer que chaque intégrale orbitale stable sur $\mathrm{SO}(2k + 1)$ provient de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2k)$ via transfert, alors le transfert à la Renard résulte de notre formalisme. On espère revenir un jour sur cette question.

Conventions

On note \mathbb{S}^1 le groupe $\{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$. Si $\mathbf{f} \in \mathbb{Z}$, on note $\mu_{\mathbf{f}}$ le groupe $\{z \in \mathbb{C}^\times : z^{\mathbf{f}} = 1\}$. Si A est une algèbre centrale semi-simple de dimension finie sur un corps F , on note la trace et la norme réduite par $\mathrm{tr}_{A/F}$ et $N_{A/F}$ respectivement.

Corps locaux. Soit F un corps local non archimédien, on note \mathfrak{o}_F l’anneau des entiers, \mathfrak{p}_F l’idéal maximal de \mathfrak{o}_F et ϖ_F une uniformisante choisie. On prend toujours la valuation v sur F telle que $v(\varpi_F) = 1$. Le conducteur d’un caractère additif $\psi : F \rightarrow \mathbb{S}^1$ non-trivial est le plus grand sous \mathfrak{o}_F -module \mathfrak{a} de F tel que $\psi|_{\mathfrak{a}} = 1$. Le symbole de Hilbert quadratique pour le corps local F est noté par $(\cdot, \cdot)_F$. Le groupe de Galois absolu de F est noté Γ_F .

Groupes réductifs. Soit F un corps et M un F -groupe réductif. La composante connexe de M est notée M^0 . Soit R une F -algèbre commutative, on note l’ensemble de R -points de M par $M(R)$. Lorsque M est un groupe classique, on confond systématiquement $M(F)$ et M .

Supposons que M agit algébriquement sur une F -variété X . Pour $x \in X(F)$, on note $M^x \subset M$ son fixateur et $M_x := (M^x)^0$. Par exemple, M agit sur lui-même par conjugaison et on obtient ainsi les commutants.

Supposons M connexe et soit $m \in M(F)$. La classe de conjugaison contenant m est notée $\mathcal{O}(m)$. On dira que $m_1, m_2 \in M(F)$ sont géométriquement conjugués s’ils sont conjugués par $M(\bar{F})$. La classe de conjugaison géométrique contenant $m \in M(F)$ est notée par $\mathcal{O}^{\mathrm{geo}}(m)$. L’ensemble de classes de conjugaison (respectivement conjugaison géométrique) semi-simples dans M est noté par $\mathcal{C}_{\mathrm{ss}}(M)$ (respectivement $\mathcal{C}_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{geo}}(M)$). L’ensemble des éléments semi-simples dans $M(F)$ est noté $M(F)_{\mathrm{ss}}$. On dira qu’un élément $m \in M(F)_{\mathrm{ss}}$ est régulier si M_m est un tore, on dira qu’il est fortement régulier si de plus $M^m = M_m$. L’ouvert de Zariski des éléments semi-simples réguliers dans M est noté M_{reg} .

Soient $m_1, m_2 \in M(F)_{\mathrm{ss}}$, on dira qu’ils sont stablement conjugués s’il existe $x \in M(\bar{F})$ tel que $x^{-1}m_1x = m_2$ et $x\sigma(x)^{-1} \in M_{m_1}(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. La classe de conjugaison stable

contenant m est notée par $\mathcal{O}^{\text{st}}(m)$; l'ensemble de classes de conjugaison stable semi-simples dans M est notée par $\mathcal{C}_{\text{ss}}^{\text{st}}(M)$. Si m est fortement régulier, alors $\mathcal{O}^{\text{geo}}(m) = \mathcal{O}^{\text{st}}(m)$. On dit qu'une fonction ϕ est stablement invariante si $\mathcal{O}^{\text{st}}(x) = \mathcal{O}^{\text{st}}(y)$ implique $\phi(x) = \phi(y)$.

Éléments compacts. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p . Soient M un F -groupe réductif connexe et $\delta \in M(F)$. On dit que δ est compact si l'ensemble $\delta^{\mathbb{Z}}$ est d'adhérence compacte dans $M(F)$. On dit que δ est topologiquement unipotent si $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{p^n} = 1$. Soit $X \in \mathfrak{m}(F)$, notons T le plus grand F -tore central dans le commutant de sa partie semi-simple X_s . On dit que X est topologiquement nilpotent si $|x^*(X_s)|_F < 1$ pour tout $x^* \in X^*(T)$. Si p est assez grand (voir [Wal08, 4.4] pour une borne explicite), l'exponentielle fournit un homéomorphisme de l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents sur l'ensemble des éléments topologiquement unipotents. Tout élément compact δ admet une décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta = \eta \exp(X)$, où X est topologiquement nilpotent et η est d'ordre fini premier à p . Cette décomposition est unique, η et $\exp(X)$ appartiennent à l'adhérence de $\delta^{\mathbb{Z}}$. Les détails se trouvent, par exemple, dans [Wal08, 5.2].

Formes quadratiques. Dans ce texte, on ne considère que les formes quadratiques non dégénérées. Soient A un anneau commutatif avec $\frac{1}{2}$ et $a_1, \dots, a_m \in A^\times$, on note $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ la A -forme quadratique sur A^m définie par

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2.$$

On note par \mathbb{H} la forme hyperbolique de rang 2. On abrège souvent une forme quadratique (V, q) par q . Si F est un corps local et q est une F -forme quadratique, on note $\det q$ le déterminant de q et $s(q)$ l'invariant de Hasse de q . On note la somme orthogonale des formes q_1 et q_2 par $q_1 \oplus q_2$. Pour un caractère additif non-trivial $\psi : F \rightarrow \mathbb{S}^1$ et une F -forme quadratique q , notons $\gamma_\psi(q)$ l'indice de Weil défini dans [Wei64]. Il induit un homomorphisme du groupe de Witt $W(F)$ vers μ_8 .

2. Le groupe métaplectique

2.1 Revêtements de groupes réductifs

Soient F un corps local et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient M un F -groupe algébrique et $\mathbf{p} : \tilde{M} \rightarrow M(F)$ une extension centrale de groupes topologiques telle que $\text{Ker}(\mathbf{p}) \simeq \mu_m$; on l'appelle un revêtement à m feuillets. Il y a une notion naturelle d'équivalence pour de tels revêtements. Le groupe \tilde{M} est localement compact. De plus, il est totalement discontinu si F est non archimédien. Nous fixons toujours une identification $\text{Ker}(\mathbf{p}) = \mu_m$.

Supposons M réductif. Soit P un sous-groupe parabolique défini sur F dont U est le radical unipotent. Alors il existe un unique scindage $s : U(F) \rightarrow \tilde{M}$ pour \mathbf{p} , qui est invariant par conjugaison par $P(F)$ (voir [MW94, appendice A]).

Objets spécifiques. Soit $C_c^\infty(\tilde{M})$ l'algèbre des fonctions lisses à support compact sur \tilde{M} , munie du produit de convolution. Il y a une décomposition

$$C_c^\infty(\tilde{M}) = \bigoplus_{\chi \in \text{Hom}(\mu_m, \mathbb{C}^\times)} C_{c,\chi}^\infty(\tilde{M})$$

selon l'action par translation par μ_m . Idem pour l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\tilde{M})$ lorsque F est archimédien.

Soit $\chi \in \text{Hom}(\mathbb{P}_m, \mathbb{C}^\times)$. Une fonction dans $C_{c,\chi}^\infty(\tilde{M})$ (respectivement $\mathcal{S}_\chi(\tilde{M})$) est dite χ -équivariante. Ceci permet de définir la notion de distributions χ -équivariantes. Une représentation π de \tilde{M} est dite χ -équivariante si $\pi|_{\mathbb{P}_m}$ est une somme de χ . Le caractère d'une représentation de \tilde{M} , pourvu qu'il soit bien défini, est χ -équivariante si et seulement si la représentation l'est.

Notons $\chi_- : \mathbb{P}_m \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ le plongement standard. Pour $\chi = \chi_-$ (respectivement $\chi = \chi_-^{-1}$), les objets χ -équivariants sont abrégés comme spécifiques (respectivement anti-spécifiques). Les objets spécifiques (respectivement anti-spécifiques) sont affectés de l'indice $-$ (respectivement $--$). Par exemple, on définit les espaces $C_{c,-}^\infty(\tilde{M})$ et $C_{c,--}^\infty(\tilde{M})$. Lorsque F est archimédien, on définit de la même manière les espaces $\mathcal{S}_-(\tilde{M})$ et $\mathcal{S}_{--}(\tilde{M})$.

Pousser-en-avant. Soit $m|m'$. On peut pousser-en-avant l'extension centrale $1 \rightarrow \mathbb{P}_m \rightarrow \tilde{M} \rightarrow M(F) \rightarrow 1$ via $\mathbb{P}_m \hookrightarrow \mathbb{P}_{m'}$ et on obtient ainsi un revêtement à m' -feuilletés $\mathbf{p}' : \tilde{M}' \rightarrow M(F)$. On le note aussi par $\tilde{M}' = \tilde{M} \times_{\mathbb{P}_m} \mathbb{P}_{m'}$. La restriction de \tilde{M}' à \tilde{M} identifie les objets spécifiques sur \tilde{M}' à ceux sur \tilde{M} (par exemple les fonctions, les représentations etc). De même pour les objets anti-spécifiques.

Tout revêtement que l'on rencontrera dans cet article provient d'un revêtement à deux feuilletés. Indiquons un passage entre objets spécifiques et anti-spécifiques dans telles situations.

PROPOSITION 2.1. *Soient $m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{p} : \tilde{M} \rightarrow M(F)$ un revêtement à deux feuilletés et $\tilde{M}' := \tilde{M} \times_{\mathbb{P}_2} \mathbb{P}_m$. Alors il existe un caractère continu $\xi : \tilde{M}' \rightarrow \mathbb{P}_{m/2}$ tel que $\xi([\tilde{m}, \varepsilon]) = \varepsilon^{-2}$.*

L'application $\pi \mapsto \pi \otimes \xi$ est une bijection des représentations spécifiques sur les représentations anti-spécifiques. L'application $f \mapsto f\xi$ induit un isomorphisme d'algèbres $C_{c,-}^\infty(\tilde{M}') \xrightarrow{\sim} C_{c,--}^\infty(\tilde{M}')$; elle induit un isomorphisme $\mathcal{S}_-(\tilde{M}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{--}(\tilde{M}')$ si F est archimédien.

Remarque 2.2. On aura parfois besoin de considérer $\tilde{M}' := \tilde{M} \times_{\mathbb{P}_m} \mathbb{C}^\times$, qui est une extension de $M(F)$ par \mathbb{C}^\times . Les définitions ci-dessus sont pareilles pour \tilde{M}' et on a toujours ladite équivalence entre objets spécifiques/anti-spécifiques.

Si F est un corps global et \mathbb{A} son anneau d'adèles, alors les terminologies précédentes s'adaptent aux revêtements de $M(k)$ où k est une sous-algèbre de \mathbb{A} munie de la topologie induite.

Nous adoptons systématiquement la convention de désigner un élément dans \tilde{M} par \tilde{m} , etc, et sa projection dans $M(F)$ par m , etc.

2.2 La représentation de Weil et le groupe métaplectique local

Soit F un corps local de caractéristique nulle. On fixe un caractère additif non-trivial $\psi : F \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Soient $n > 0$ et $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un F -espace symplectique de dimension $2n$. On supprime souvent la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ quand on parle d'un tel espace. Notons $H(W)$ le groupe de Heisenberg associé à $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, dont le centre s'identifie à F . Rappelons que $H(W)$ est $W \times F$ comme un espace topologique. Le groupe symplectique $\text{Sp}(W)$ agit sur $H(W)$ par $g \cdot (w, t) = (g(w), t)$. Le théorème de Stone–von Neumann affirme qu'il existe une et une seule représentation lisse irréductible $(\rho_\psi, \mathcal{S}_\psi)$ de $H(W)$ à caractère central ψ , à isomorphisme près. De plus, une telle représentation est admissible et unitarisable.

Soit $g \in \text{Sp}(W)$, il induit une représentation

$$\rho_\psi^g : h \mapsto \rho_\psi(g \cdot h)$$

qui vérifie encore les propriétés du théorème de Stone–von Neumann, donc ρ_ψ^g et ρ_ψ sont entrelacées. Posons

$$\overline{\text{Sp}}_\psi(W) := \{(g, M) \in \text{Sp}(W) \times \text{GL}(S_\psi) : M \circ \rho_\psi = \rho_\psi^g \circ M\}.$$

Cela fournit une extension centrale de $\text{Sp}(W)$ par \mathbb{C}^\times . Notons $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ le groupe dérivé de $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$. Si $F = \mathbb{C}$, le revêtement $\mathbf{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ est scindé et on identifie $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ à $\mu_2 \times \text{Sp}(W)$; sinon, \mathbf{p} est l'unique revêtement non-trivial à deux feuillets de $\text{Sp}(W)$. La représentation de Weil attachée à ψ est la composée $\omega_\psi : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \hookrightarrow \overline{\text{Sp}}_\psi(W) \rightarrow \text{GL}(S_\psi)$. La décomposition de ω_ψ en parties paire (+) et impaire (−) s'écrit comme

$$\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-.$$

Soit $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Posons

$$\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) := \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \times_{\mu_2} \mu_{\mathbf{f}}.$$

Notons le revêtement $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ par la même lettre p . On obtient ainsi une famille de revêtements indexée par $2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Regardons ω_ψ^\pm comme représentations spécifiques sur les $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$. Idem pour leurs caractères. Dans le cas $F = \mathbb{C}$, on a un scindage canonique $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) \simeq \mu_{\mathbf{f}} \times \text{Sp}(W)$. Dans le cas trivial $W = \{0\}$, nos définitions entraînent que $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) = \mu_{\mathbf{f}}$.

2.3 Sous-groupes et réseaux hyperspéciaux

Supposons que F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Soit $L \subset W$ un \mathfrak{o}_F -réseau, on définit son réseau dual comme

$$L^* := \{w \in W : \forall m \in L, \langle w | m \rangle \in \mathfrak{o}_F\}.$$

Un réseau L dans W est dit autodual si $L^* = L$. De tels réseaux existent toujours.

THÉOREME 2.3. *Si L est un réseau dans W tel que $L^* = L$ ou $L^* = \mathfrak{p}_F L$, alors $K_L := \text{Stab}_{\text{Sp}(W)}(L)$ est un sous-groupe hyperspécial de $\text{Sp}(W)$. Cela fournit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes hyperspéciaux et les réseaux L tels que $L^* = L$ ou $L^* = \mathfrak{p}_F L$.*

Un tel réseau L détermine un modèle de $\text{Sp}(W)$ sur \mathfrak{o}_F . On définit le réseau hyperspécial dans $\mathfrak{sp}(W)$ associé à L par $\mathfrak{k}_L := \mathfrak{sp}(W, \mathfrak{o}_F)$. Si l'on remplace $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par $\varpi_F \langle \cdot | \cdot \rangle$ alors cela a pour effet d'échanger les réseaux L avec $L^* = L$ et ceux avec $L^* = \varpi_F L$, à homothétie près ; pourtant $\text{Sp}(W)$ ne change pas.

Observons aussi que $\text{Sp}(W)$ agit transitivement sur les réseaux autoduaux. Nous avons fixé une forme symplectique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur W , cela a l'effet de distinguer une classe de conjugaison canonique de sous-groupes hyperspéciaux de $\text{Sp}(W)$, à savoir ceux associés aux réseaux autoduaux. On ne considère que des tels sous-groupes hyperspéciaux dans cet article.

2.4 Modèles de la représentation de Weil

Nous donnerons deux constructions pour la représentation (ρ_ψ, S_ψ) et les opérateurs d'entrelacement $M[g]$ dans les définitions précédentes. Commençons par une construction générale.

Soit $A \subset W$ un sous-groupe tel que $A_F := A \times F$ est un sous-groupe abélien maximal dans $H(W)$; ceci est équivalent à $A = A^\perp$ où $A^\perp := \{w \in W : \forall a \in A, \psi(\langle a, w \rangle) = 1\}$. En choisissant

un caractère $\psi_A : A_F \rightarrow \mathbb{S}^1$ prolongeant ψ sur $\{0\} \times F$, on définit

$$(\rho_A, S_A) := \text{Ind}_{A_F}^{H(W)}(\psi_A).$$

THÉORÈME 2.4. (ρ_A, S_A) est une représentation lisse irréductible de caractère central ψ .

2.4.1 *Le modèle de Schrödinger.* Les détails se trouvent dans [Tho06, Tho08a].

Un sous-espace $\ell \subset W$ est dit un lagrangien dans W si ℓ est totalement isotrope de dimension maximale pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Notons $\text{Lagr}(W)$ l'ensemble des lagrangiens dans W .

Dans la construction ci-dessus, prenons pour $A = \ell \in \text{Lagr}(W)$. Dans ce cas-là $\ell_F = \ell \times F$ comme groupes topologiques, et on peut prendre $\psi_\ell = 1 \times \psi$. Soit (ρ_ℓ, S_ℓ) la représentation ainsi obtenue. On fixe une mesure de Haar sur ℓ et on prend la mesure autoduale sur W par rapport à $\psi(\langle \cdot | \cdot \rangle)$. La représentation (ρ_ℓ, S_ℓ) s'identifie à l'espace des vecteurs lisses de l'induite compacte $\text{ind}_{\ell_F}^{H(W)}(\psi_\ell)$.

Soit ℓ' un autre lagrangien muni d'une mesure de Haar. Perrin a défini un opérateur d'entrelacement canonique $\mathcal{F}_{\ell', \ell} : S_\ell \rightarrow S_{\ell'}$. Soit $g \in \text{Sp}(W)$, alors on obtient une isométrie $g_* : S_\ell \rightarrow S_{g\ell}$ par transport de structures. Définissons

$$M_\ell[g] := \mathcal{F}_{\ell, g\ell} \circ g_* = g_* \circ \mathcal{F}_{g^{-1}\ell, \ell}.$$

On vérifie que $(g, M_\ell[g]) \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$. Pour étudier le cocycle associé à cette section, récapitulons des propriétés de l'indice de Maslov telle qu'elles sont énoncées par Thomas [Tho06].

Étant donnés $\ell_1, \dots, \ell_m \in \text{Lagr}(W)$ ($m \geq 3$), On définit une F -forme quadratique $\tau(\ell_1, \dots, \ell_m)$. Elle s'appelle l'indice de Maslov. Soit $[\tau(\ell_1, \dots, \ell_m)]$ sa classe dans le groupe de Witt $W(F)$; cette classe satisfait aux propriétés suivantes.

(i) *Invariance symplectique.* Pour tout $g \in \text{Sp}(W)$,

$$\tau(\ell_1, \dots, \ell_m) \simeq \tau(g\ell_1, \dots, g\ell_m).$$

(ii) *Additivité symplectique.* Soient W_1, W_2 deux F -espaces quadratiques et $W := W_1 \oplus W_2$. Si $\ell_1, \dots, \ell_m \in \text{Lagr}(W_1)$ et $\ell'_1, \dots, \ell'_m \in \text{Lagr}(W_2)$, alors

$$\tau(\ell_1 \oplus \ell'_1, \dots, \ell_m \oplus \ell'_m) \simeq \tau(\ell_1, \dots, \ell_m) \oplus \tau(\ell'_1, \dots, \ell'_m).$$

(iii) *Symétrie diédrale.*

$$\begin{aligned} \tau(\ell_1, \dots, \ell_m) &\simeq \tau(\ell_2, \dots, \ell_m, \ell_1), \\ [\tau(\ell_1, \dots, \ell_m)] &= -[\tau(\ell_m, \dots, \ell_1)]. \end{aligned}$$

(iv) *Condition de chaîne.* Pour tout $3 \leq k < m$, on a

$$[\tau(\ell_1, \dots, \ell_m)] = [\tau(\ell_1, \dots, \ell_k)] + [\tau(\ell_1, \ell_k, \dots, \ell_m)].$$

Dans le cas $m = 3$, l'espace $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est Witt équivalent à l'indice de Maslov défini par Kashiwara [LV80]. Vu la condition de chaîne, cela détermine $[\tau(\ell_1, \dots, \ell_m)] \in W(F)$ pour $m \geq 3$ quelconque. La dimension de τ est aussi calculée dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5 [Tho06]. *Regardons les lagrangiens ℓ_1, \dots, ℓ_m comme indexés par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors :*

$$\dim \tau(\ell_1, \dots, \ell_m) = \frac{(m-2) \dim W}{2} - \sum_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \dim(\ell_i \cap \ell_{i+1}) + 2 \dim \bigcap_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \ell_i.$$

THÉOREME 2.6 [Tho06]. Soit $\ell \in \text{Lagr}(W)$, alors pour tout $x, y \in \text{Sp}(W)$ on a

$$M_\ell[x] \cdot M_\ell[y] = \gamma_\psi(\tau(\ell, y\ell, xy\ell))M_\ell[xy].$$

La formule de dimension entraîne que $\tau(\ell, \ell, \ell) = 0$. On en déduit un scindage au-dessus d'un sous-groupe parabolique de Siegel.

PROPOSITION 2.7. Soit $\ell \in \text{Lagr}(W)$. Notons P_ℓ le sous-groupe de $\text{Sp}(W)$ qui stabilise ℓ , alors $\sigma_\ell : x \mapsto (x, M_\ell[x])$ fournit un scindage de $\mathfrak{p} : \overline{\text{Sp}}_\psi(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ au-dessus de $P_\ell(F)$.

DÉFINITION 2.8. L'élément $\sigma_\ell(-1)$ dans $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ est central d'ordre 2. Il s'envoie sur -1 dans $\text{Sp}(W)$. On le note abusivement par -1 . Cette convention sera justifiée par le fait qu'elle ne dépend pas de ℓ (la proposition 2.9) et qu'elle est compatible avec tout scindage de p dont nous ferons usage (voir le corollaire 2.17 et la proposition 4.21).

On abrège souvent $(-1) \cdot \tilde{x}$ par $-\tilde{x}$, pour tout $\tilde{x} \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$. L'indépendance du choix de ℓ est assurée par la proposition suivante, qui résulte des formules explicites pour ω_ψ dans [MVW87, chapitre 2, II.6].

PROPOSITION 2.9. L'élément $-1 \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ agit par $\pm \text{id}$ sur S_ψ^\pm .

Il sera démontré que -1 vit dans le revêtement $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathfrak{f})}(W)$ pourvu que $8|\mathfrak{f}$ (la proposition 2.14). On obtiendra aussi une caractérisation de -1 par la valeur du caractère de la représentation de Weil.

2.4.2 *Le modèle latticiel.* Ici F est supposé non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un \mathfrak{o}_F -réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$ et prenons $A = L$ dans la construction générale de (ρ_A, S_A) . De tels réseaux existent toujours.

Prenons $L_F = L \times F$. Puisque $p > 2$, L_F est un sous-groupe de $H(W)$ et on peut prendre $\psi_L(a, t) = \psi(t)$. D'où une représentation lisse (ρ_L, S_L) de $H(W)$.

On choisit un système de représentants $R \subset W$ de l'espace discret W/L . Pour tout $r \in R$, définissons une fonction localement constante à support compact $f_r : H(W) \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_r((r' + a, t)) = \begin{cases} \psi\left(t + \frac{\langle r'|a \rangle}{2}\right) & \text{si } r' = r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $r' \in R$ et $a \in L$. Ces fonctions forment une base de S_L . Si l'on munit S_L du produit hermitien $(f|g) := \sum_{\dot{w} \in W/L} f(w, 0)\overline{g(w, 0)}$, alors $\{f_r\}_{r \in R}$ est une base orthonormée.

PROPOSITION 2.10. Posons $K := \text{Stab}_{\text{Sp}(W)}(L)$. Pour $x \in K$, soit $M_L[x] : S_L \rightarrow S_L$ l'opérateur unitaire $g(\cdot) \mapsto g(x^{-1}(\cdot))$. Alors $x \mapsto (x, M_L[x])$ est un homomorphisme injectif continu de K dans $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$. Ceci fournit un scindage de $\mathfrak{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ au-dessus de K .

Démonstration. Pour la deuxième assertion, voir [MVW87, chapitre 2, II.10]. □

Le sous-groupe ouvert compact K est toujours hyperspécial. Nous identifions désormais K comme un sous-groupe ouvert compact de $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$.

PROPOSITION 2.11. Soient $\{f_r\}_{r \in R}$ les fonctions définies précédemment. Pour $r, r' \in R$ et $x \in K$, on a

$$(M_L[x]f_r)(r', 0) = \begin{cases} \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r') - r \rangle}{2}\right) & \text{si } x^{-1}(r') - r \in L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $r' \in R$ représente la classe $x^{-1}(r) \bmod L$, alors on a

$$(M_L[x]f_r) = \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r') \rangle}{2}\right) f_{r'}.$$

Remarque 2.12. Supposons ψ de conducteur \mathfrak{o}_F . On a $M^\perp = M^*$ pour tout réseau $M \subset W$; en particulier L est autodual. Posons

$$H(L) := L \times \mathfrak{o}_F.$$

C'est un sous-groupe ouvert compact de $H(W)$. Soit (ρ_ψ, S_ψ) une représentation satisfaisant aux énoncés du théorème de Stone–von Neumann. On vérifie que $S_\psi^{H(L)}$ est engendré par la fonction caractéristique de L . Soit $s_L \in S_\psi^{H(L)}$, $s_L \neq 0$, alors $M_L[x]$ est caractérisé par $M_L[x](s_L) = s_L$.

Montrons une compatibilité entre le modèle de Schrödinger et le modèle latticiel qui sera utile. Supposons qu'il existe $\ell, \ell' \in \text{Lagr}(W)$ tels que $W = \ell \oplus \ell'$ et $L = (\ell \cap L) \oplus (\ell' \cap L)$. Soit $x \in \text{Sp}(W)$ tel que $x\ell = \ell$ et $x\ell' = \ell'$.

PROPOSITION 2.13. Conservons les hypothèses ci-dessus. Soit T un F -tore maximal déployé dans $P_\ell \cap P_{\ell'}$, alors $M_\ell[x] = M_L[x]$ pour $x \in T(F) \cap K$.

Démonstration. Du point de vue du modèle de Schrödinger, $S_\psi^{H(L)}$ est engendré $s_L := \mathbb{1}_{L \cap \ell'}$ (voir [MVW87, chapitre 2, II.10]). On a $M_L[x](s_L) = s_L$ car $x \in K$. D'après la formule explicite de $M_\ell[x]$ (voir [MVW87, chapitre 2, II.6]), on a aussi $M_\ell[x](s_L) = s_L$, d'où l'assertion. \square

2.4.3 La construction de Lion–Perrin. Le modèle de Schrödinger conduit à une construction du revêtement à deux feuilletés $\mathfrak{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$, étudiée systématiquement par Lion et Perrin [LP81].

Pour V un F -espace vectoriel de dimension finie, posons

$$\mathfrak{o}(V) := \left(\bigwedge^{\max} V \setminus \{0\} \right) / F^{\times 2}.$$

C'est un torseur sous $F^\times / F^{\times 2}$; ici nous adoptons la convention $\bigwedge^0 \{0\} = F$ de sorte que $\mathfrak{o}(\{0\}) = F^\times / F^{\times 2}$. Un élément dans $\mathfrak{o}(V)$ est dit une orientation de V .

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \text{Lagr}(W)$ et $e_i \in \mathfrak{o}(\ell_i)$ ($i = 1, 2$). Les F -espaces vectoriels $\ell_1/(\ell_1 \cap \ell_2)$ et $\ell_2/(\ell_1 \cap \ell_2)$ sont en dualité par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d'où l'accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{o}(\ell_1/(\ell_1 \cap \ell_2)) \times \mathfrak{o}(\ell_2/(\ell_1 \cap \ell_2)) \rightarrow F^\times / F^{\times 2}.$$

Fixons une orientation $e \in \mathfrak{o}(\ell_1 \cap \ell_2)$ et choisissons $\bar{e}_i \in \mathfrak{o}(\ell_i/(\ell_1 \cap \ell_2))$ de sorte que $\bar{e}_i \wedge e = e_i$ ($i = 1, 2$). Définissons

$$A_{\ell_1, \ell_2} := \langle \bar{e}_1 | \bar{e}_2 \rangle \in F^\times / F^{\times 2}.$$

C'est indépendant du choix de e .

Fixons maintenant $\ell \in \text{Lagr}(W)$ et $e \in \mathfrak{o}(\ell)$. Pour tout $g \in \text{Sp}(W)$, munissons $g\ell$ de l'orientation transportée. On définit

$$m_g(\ell) := \gamma_\psi(1)^{(\dim W)/2 - \dim g\ell \cap \ell^{-1}} \gamma_\psi(A_{g\ell, \ell}).$$

Cela ne dépend pas du choix de l'orientation e . On construit $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ comme l'ensemble des

$$(g, t), \quad g \in \text{Sp}(W), \quad t : \text{Lagr}(W) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

tels que :

- $t(\ell)^2 = m_g(\ell)^2$ pour tout ℓ ;
- $t(\ell') = \gamma_\psi(\tau(\ell, g\ell, g\ell', \ell'))t(\ell)$ pour tout ℓ, ℓ' .

La multiplication dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ est définie par $(g, t)(g', t') = (gg', tt' \cdot c_{g, g'})$ où

$$c_{g, g'}(\ell) = \gamma_\psi(\tau(\ell, g\ell, gg'\ell)).$$

On définit $\mathbf{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ par $\mathbf{p}(g, t) = g$. En utilisant les propriétés de l'indice de Maslov, on vérifie que la multiplication est bien définie et associative, et que \mathbf{p} est un revêtement à deux feuillets. L'élément neutre est $(1, \mathbb{1})$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante de valeur 1.

Soit $\ell \in \text{Lagr}(W)$, on définit la fonction d'évaluation ev_ℓ par

$$\forall (g, t) \in \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W), \quad ev_\ell(g, t) = t(\ell). \tag{2}$$

Étant fixé $\ell \in \text{Lagr}(W)$, on a un plongement de $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ dans $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ par le modèle de Schrödinger :

$$(g, t) \mapsto (g, t(\ell)M_\ell[g]).$$

L'image ne dépend pas du choix de ℓ et cela identifie $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ au sous-groupe dérivé de $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$.

Notons $P = P_\ell$ le stabilisateur de ℓ ; c'est le sous-groupe parabolique de Siegel associé à ℓ . Le résultat suivant affirme que le revêtement $\widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$ est suffisamment grand pour réaliser le modèle de Schrödinger. Ceci résulte de la construction de Perrin–Lion et du fait que $m_g(\ell) \in \mathbb{1}_8$.

PROPOSITION 2.14. *Le scindage $\sigma_\ell : P(F) \rightarrow \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ dans la proposition 2.7 est à valeurs dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$. En particulier, l'élément -1 dans la définition 2.8 appartient à $\widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$.*

Remarque 2.15. Soit $P_\ell = MU$ une décomposition de Lévi, alors le scindage est unique sur $U(F)$ (voir [MVW87, appendice 1]). Nous donnerons une caractérisation de $\sigma_\ell|_M$ en termes du caractère de ω_ψ (la remarque 4.8).

2.5 Le cas global

Dans cette section F est un corps de nombres. Notons \mathbb{A} l'anneau d'adèles associé à F .

Fixons un caractère non-trivial $\psi : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{S}^1$, regardé aussi comme un caractère de \mathbb{A} avec décomposition en composantes locales

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v.$$

Fixons un F -espace symplectique $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ défini sur \mathfrak{o}_F , notons L l'ensemble de \mathfrak{o}_F -points de W , c'est un \mathfrak{o}_F -réseau dans W . Pour toute place v de F , on construit les

objets suivants :

- $(W_v, \langle \cdot | \cdot \rangle) := (W, \langle \cdot | \cdot \rangle) \otimes_F F_v$;
- $H(W_v)$: le groupe de Heisenberg ;
- (ρ_v, S_v) : représentation irréductible lisse à caractère central ψ_v ;
- $\overline{\text{Sp}}_\psi(W_v), \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v), \mathbf{p}_v$: les revêtements ($\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$) ;
- ω_{ψ_v} : la représentation de Weil.

Pour presque toute place finie v , ψ_v est de conducteur \mathfrak{o}_v et le complété L_v de L est autodual. Pour une telle v , posons $K_v := \text{Stab}(L_v)$ et $s_v \in S_v$ le vecteur correspondant à la fonction caractéristique de L_v pour le modèle latticiel (cf. la remarque 2.12). On définit $(\rho_\psi, S_\psi) = \bigotimes'_v (\rho_v, S_v)$, produit restreint par rapport aux vecteurs s_v . On définit le groupe de Heisenberg adélique $H(W, \mathbb{A})$ par rapport à L , alors (ρ_ψ, S_ψ) est une représentation de $H(W, \mathbb{A})$ à caractère central ψ . Le groupe $\text{Sp}(W, \mathbb{A})$ agit sur $H(W, \mathbb{A})$ de façon naturelle.

On sait construire le produit restreint $\prod'_v \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$ par rapport aux K_v . Posons

$$\mathbf{N} := \left\{ (\varepsilon_v) \in \bigoplus_v \text{Ker}(\mathbf{p}_v) = \bigoplus_v \mu_{\mathbf{f}} : \prod \varepsilon_v = 1 \right\},$$

$$\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A}) := \prod'_v \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v) / \mathbf{N}.$$

On écrit une classe dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ comme $[\tilde{x}_v]_v$, où $\tilde{x}_v \in \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$ pour toute v .

Les projections locales $(\mathbf{p}_v)_v$ fournissent un revêtement $\mathbf{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A}) \rightarrow \text{Sp}(W, \mathbb{A})$ et on a $\text{Ker}(\mathbf{p}) = \mu_{\mathbf{f}}$. On définit la représentation de Weil adélique par $\omega_\psi := \bigotimes'_v \omega_{\psi_v}$; elle est spécifique. On retrouve les avatars locaux $\mathbf{p}_v : \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v) \rightarrow \text{Sp}(W_v)$ comme les fibres de \mathbf{p} au-dessus des $\text{Sp}(W_v)$.

Par ailleurs, on peut formuler une variante du théorème de Stone–von Neumann pour $H(W, \mathbb{A})$, ce qui permet de définir une extension centrale $\overline{\text{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A})$ de $\text{Sp}(W, \mathbb{A})$ par \mathbb{C}^\times , comme dans le cas local. On définit $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A})$ comme son groupe dérivé et on a ainsi $\overline{\text{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A}) = \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A}) \times_{\mu_2} \mathbb{C}^\times$. On définit les revêtements $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ en poussant-en-avant via $\mu_2 \hookrightarrow \mu_{\mathbf{f}}$.

Remarquons que les constructions dans cette section ne dépendent pas du choix de L . En effet, si L, L' sont deux tels réseaux, alors $L_v = L'_v$ pour presque toute place finie v .

D'après Weil, il existe un scindage de p au-dessus de $\text{Sp}(W)$, qui est unique et à image dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A})$ car $\text{Sp}(W)$ est engendré par ses commutateurs. Donnons une construction explicite. Fixons $\ell \in \text{Lagr}(W)$, on construit les opérateurs $M_{\ell_v}[x]$ pour tout $x \in \text{Sp}(W)$ et toute place v de F où $\ell_v := \ell \otimes_F F_v$.

PROPOSITION 2.16. *L'application*

$$i : \text{Sp}(W) \rightarrow \overline{\text{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A})$$

$$x \mapsto \left(x, \bigotimes_v M_{\ell_v}[x] \right)$$

est un homomorphisme bien défini.

Démonstration. Prenons $\ell' \in \text{Lagr}(W)$ tel que $W = \ell \oplus \ell'$. Pour presque toute place finie v , on a $L_v = L_v \cap \ell_v \oplus L_v \cap \ell'_v$. D'après les formules explicites pour $M_{\ell_v}[x]$ et s_v (voir [MVW87, chapitre 2, II.6, II.10]) avec la décomposition de Bruhat, $M_{\ell_v}[x]$ fixe s_v pour presque tout v , donc $\bigotimes_v M_{\ell_v}[x] \in \text{GL}(S_\psi)$ et i est bien défini.

Montrons que i est un homomorphisme. Soient $x, y \in \text{Sp}(W)$, alors

$$M_{\ell_v}[x]M_{\ell_v}[y] = \gamma_{\psi_v}(\tau(\ell, x\ell, xy\ell))M_{\ell_v}[xy].$$

L'espace quadratique $\tau(\ell, x\ell, xy\ell)$ est défini sur F . Grâce à la réciprocité de Weil [Wei64, § 30, Proposition 5], le produit $\prod_v \gamma_{\psi_v}(\tau(\ell, x\ell, xy\ell))$ vaut 1, cela permet de conclure. \square

Nous identifions désormais $\text{Sp}(W, F)$ comme un sous-groupe discret de $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A})$ au moyen de i . L'énoncé suivant est immédiat.

COROLLAIRE 2.17. *Pour toute place v , soit $-1_v \in \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W_v)$ l'élément considéré dans la définition 2.8. Alors $i(-1)$ est égal à $[-1_v]_v$.*

3. Classes de conjugaison semi-simples dans les groupes classiques

Dans cette section, F est un corps parfait de caractéristique $\neq 2$. Une F -algèbre étale à involution est une paire (K, τ) où K est une F -algèbre étale de dimension finie et $\tau : K \rightarrow K$ est une involution de F -algèbre. Notons $K^\#$ la sous-algèbre étale fixée par τ . La paire en question s'écrit aussi $K/K^\#$ car τ est déterminée par la paire $(K, K^\#)$. On a une décomposition $K^\# = \prod_{i \in I} K_i^\#$, où I est un ensemble fini et $K_i^\#$ est une extension finie de F pour tout $i \in I$. Alors K admet aussi une décomposition $K = \prod_{i \in I} K_i$, où K_i est soit une extension quadratique de $K_i^\#$, soit isomorphe à $K_i^\# \times K_i^\#$. Notons $I^* := \{i \in I : K_i \text{ est un corps}\}$. En tout cas, $\tau|_{K_i}$ est l'unique $K_i^\#$ -involution non-triviale sur K_i .

Soit W un K -module. On peut définir les (K, τ) -formes hermitiennes ou anti-hermitiennes sur W . Soit $\epsilon = 1$ (respectivement $\epsilon = -1$), on dit aussi qu'une forme (K, τ) -hermitienne (respectivement anti-hermitienne) est ϵ -hermitienne. Le groupe unitaire associé à (W, h) est noté $U(W, h)$. Si (K, τ) est une extension finie d'une F -algèbre étale à involution (E, τ_E) , alors on peut définir la poussée-en-avant d'une forme ϵ -hermitienne (W, h) , notée $(\text{tr}_{K/E})_*(W, h)$, en la composant avec l'application de trace $\text{tr}_{K/E}$.

3.1 Le cas du groupe

Décrivons explicitement les classes de conjugaison dans les groupes classiques et leurs commutants. On obtiendra aussi d'une description de la régularité.

Les groupes symplectiques. Soit $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un F -espace symplectique. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\text{Sp}(W)$ sont paramétrées par les données suivantes :

- une donnée $(K/K^\#, x)$ telle que $x \in K^\times$, $\tau(x) = x^{-1}$ et $K = F[x]$;
- une (K, τ_K) -forme anti-hermitienne (W_K, h_K) où W_K est un K -module fidèle ;
- deux F -espaces symplectiques $(W_+, \langle \cdot | \cdot \rangle_+)$ et $(W_-, \langle \cdot | \cdot \rangle_-)$.

Les espaces symplectiques sont classifiés par leur dimension, donc les paramètres sont soumis à une seule condition

$$\dim_F W_K + \dim_F W_+ + \dim_F W_- = \dim_F W.$$

La classe de conjugaison associée aux données ci-dessus est notée

$$\mathcal{O}(K/K^\#, x, (W_K, h_K), (W_\pm, \langle \cdot | \cdot \rangle_\pm)).$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^\#, x, (W_K, h_K), (W_\pm, \langle \cdot | \cdot \rangle_\pm))$, alors

$$\mathrm{Sp}(W)^g = \mathrm{Sp}(W)_g = U(W_K, h_K) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-).$$

Décomposons $K = \prod_{i \in I} K_i$, $\tau_K = (\tau_i)$, $x = (x_i)$, et $(W_K, h_K) = ((W_i, h_i))_{i \in I}$. Si $i \notin I^*$ alors $U(W_i, h_i) \simeq \mathrm{GL}_{K_i^\#}(n_i)$ avec $n_i := \frac{1}{2} \dim_{K_i^\#} W_i$. D'où :

$$U(W_K, h_K) = \prod_{i \in I^*} U_{K_i, \tau_i}(W_i, h_i) \times \prod_{i \notin I^*} \mathrm{GL}_{K_i^\#}(n_i).$$

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si $W_+ = W_- = \{0\}$ et $W_K \simeq K$. Une classe régulière est forcément fortement régulière.

Les groupes orthogonaux impairs. Soit (V, q) un F -espace quadratique de dimension impaire. Les classes de conjugaison semi-simples dans $O(V, q)$ sont paramétrées par les données suivantes :

- données $(K/K^\#, x)$ comme le cas symplectique ;
- une (K, τ_K) -forme hermitienne (V_K, h_K) où V_K est un K -module fidèle ;
- deux F -espaces quadratiques (V_+, q_+) et (V_-, q_-) .

Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V, q) \simeq (\mathrm{tr}_{K/F})_*(V_K, h_K) \oplus (V_+, q_+) \oplus (V_-, q_-).$$

Pour que $\mathcal{O}(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, q_\pm))$ appartienne à $\mathrm{SO}(V, q)$, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \dim_F V_+ &\equiv 1 \pmod{2}, \\ \dim_F V_- &\equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, q_\pm))$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(V, q)^g &= U(V_K, h_K) \times \mathcal{R}, \\ \mathrm{SO}(V, q)_g &= U(V_K, h_K) \times \mathrm{SO}(V_+, q_+) \times \mathrm{SO}(V_-, q_-), \end{aligned}$$

où le groupe $U(V_K, h_K)$ admet une description analogue au cas symplectique, et

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in O(V_+, q_+) \times O(V_-, q_-) : \det a \cdot \det b = 1\}.$$

Donc les composantes connexes de $\mathrm{SO}(V, q)^g$ sont définies sur F et

$$(\mathrm{SO}(V, q)^g : \mathrm{SO}(V, q)_g) = \begin{cases} 2 & \text{si } V_- \neq \{0\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si

$$\begin{aligned} W_K &\simeq K, \\ \dim_F V_+ &= 1, \\ \dim_F V_- &= 0 \text{ ou } 2. \end{aligned}$$

Une classe régulière est fortement régulière si et seulement si $\dim V_- = 0$.

Les groupes orthogonaux pairs. Soit (V, q) un F -espace quadratique de dimension paire. Les classes de conjugaison semi-simples dans $O(V, q)$ sont paramétrées par les mêmes données pour le cas impair, mais la condition sur $\dim_F V_{\pm}$ devient

$$\begin{aligned} \dim_F V_+ &\equiv 0 \pmod{2}, \\ \dim_F V_- &\equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Une classe de conjugaison $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ dans $O(V, q)$ se décompose en deux classes \mathcal{O}^{\pm} dans $SO(V, q)$. On n'aura pas besoin de les distinguer dans ce texte.

Commutants. La description des commutants est pareille que dans le cas impair.

Régularité. Une classe $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ est régulière si et seulement si

$$\begin{aligned} W_K &\simeq K, \\ \dim_F V_{\pm} &\leq 2. \end{aligned}$$

Une classe régulière est fortement régulière si et seulement si $V_+ = \{0\}$ ou $V_- = \{0\}$.

Les groupes unitaires. Prenons E une extension quadratique de F et τ l'involution de E associée. Fixons $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Soit (V, h) une (E, τ) -forme ϵ -hermitienne. Les classes de conjugaison semi-simples dans $U(V, h)$ sont paramétrées par les données suivantes :

- données $(K/K^{\#}, x)$ comme les cas précédents ; on demande de plus que $K = K^{\#} \otimes_F E$ et $\tau_K = \text{id} \otimes \tau$;
- une (K, τ_K) -forme ϵ -hermitienne (V_K, h_K) où V_K est un K -module fidèle ;
- deux (E, τ) -formes ϵ -hermitiennes (V_+, h_+) et (V_-, h_-) .

Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V, h) \simeq \text{tr}_{K/E^*}(V_K, h_K) \oplus (V_+, h_+) \oplus (V_-, h_-).$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$, alors

$$U(V, h)^g = U(V, h)_g = U(V_K, h_K) \times U(V_+, h_+) \times U(V_-, h_-).$$

Le groupe $U(V_K, h_K)$ se décrit comme dans le cas symplectique.

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si

$$\begin{aligned} W_K &\simeq K, \\ \dim_E V_{\pm} &\leq 1. \end{aligned}$$

Une classe régulière est automatiquement fortement régulière.

Remarque 3.1. La description des commutants admet une paraphrase schématique. Plus rigoureusement, il faudra remplacer le groupe $U(W_K, h_K)$ (respectivement $U(V_K, h_K)$) par la restriction des scalaires $\text{Res}_{K^{\#}/F} U(W_K, h_K)$ (respectivement $\text{Res}_{K^{\#}/F} U(V_K, h_K)$).

Remarque 3.2. Supposons que F est infini. Si l'on supprime x dans les paramètres des classes régulières, on arrive à une classification des F -tores maximaux à conjugaison près dans les groupes classiques.

On définit la somme directe de paramètres de façon évidente.

Classes assez régulières. Prenons $\epsilon = +1$ pour les groupes orthogonaux et les groupes unitaires associés à une forme hermitienne ; prenons $\epsilon = -1$ pour les groupes symplectiques et les groupes unitaires associés à une forme anti-hermitienne.

DÉFINITION 3.3. On dit qu'une classe de conjugaison semi-simple dans un groupe classique est assez régulière si elle est :

- (cas symplectique) régulière ;
- (cas orthogonal impair) régulière et paramétrée par $(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, q_\pm))$ avec $V_- = \{0\}$, $\dim_F V_+ = 1$;
- (cas orthogonal pair) régulière et paramétrée par $(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, q_\pm))$ avec $V_\pm = \{0\}$;
- (cas unitaire) régulière et paramétrée par $(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, h_\pm))$ avec $V_+ = V_- = \{0\}$.

Une classe assez régulière est automatiquement fortement régulière. Pour une classe assez régulière, la forme h_K sur $W_K \simeq K$ dans son paramètre est décrite par

$$\forall a, b \in K, \quad h_K(a|b) = \text{tr}_{K/A}(c\tau(a)b)$$

où $c \in K^\times$ est tel que $\tau_K(c) = \epsilon c$.

Pour une classe assez régulière dans un groupe orthogonal impair $\text{SO}(V, q)$, la donnée (V_+, q_+) dans son paramètre est déterminée par (V, q) et l'autre donnée $(K/K^\#, x, c)$ d'après le théorème de Witt. En tout cas, on peut simplifier le paramètre d'une classe assez régulière en la donnée

$$(K/K^\#, x, c)$$

satisfaisant à $\tau_K(c) = \epsilon c$ et $\tau_K(x) = x^{-1}$. Deux données $(K/K^\#, x, c)$ et $(K'/K'^\#, x', c')$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme de F -algèbres à involutions $\sigma : (K, \tau_K) \xrightarrow{\sim} (K', \tau_{K'})$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x', \\ \sigma(c)c'^{-1} &\in N_{K'/K'^\#}(K'^\times). \end{aligned}$$

Remarque 3.4. Écrivons les paramètres comme $K = \prod_{i \in I} K_i$, $K^\# = \prod_{i \in I} K_i^\#$ où $K_i^\#$ est un corps, $\tau = (\tau_i)$, et $c = (c_i)$ pour tout i . Pour le paramétrage dans [Wal01, I.7], la forme est décrite par

$$h_K((a_i)_{i \in I} | (b_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} [K_i : A]^{-1} \text{tr}_{K_i/K_i^\#}(\tau_i(a_i)b_i c_i).$$

Autrement dit, nos paramètres c_i correspondent à $c_i [K_i : A]^{-1}$ selon la convention de [Wal01].

Le cas de l'algèbre de Lie. On peut décrire les classes de conjugaison semi-simples régulières dans les algèbres de Lie des groupes classiques comme on vient de le faire pour les groupes, à l'aide de données $(K/K^\#, x, c)$. La seule différence est que l'élément x vérifie l'égalité $x + \tau_K(x) = 0$ au lieu de $x\tau_K(x) = 1$.

3.2 Conjugaison géométrique, le cas des corps locaux

Fixons un groupe classique U sur F .

PROPOSITION 3.5. Soient $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c)$ et $\mathcal{O}(K'/K'^\#, x', c')$ deux classes de conjugaison semi-simple assez régulières dans $U(F)$. Elles appartiennent à la même classe de conjugaison

géométrique si et seulement s'il existe un isomorphisme de F -algèbres à involutions

$$\sigma : (K, \tau_K) \xrightarrow{\sim} (K', \tau_{K'})$$

tel que $\sigma(x) = x'$. La même assertion reste valide pour les classes de conjugaison semi-simples régulières dans l'algèbre de Lie.

Supposons que F est un corps local. Décomposons $(K/K^\#, x, c) = \bigoplus_{i \in I} (K_i/K_i^\#, x_i, c_i)$ et posons $\text{sgn}_{K_i/K_i^\#} : K_i^{\#\times} \rightarrow \mathbb{P}_2$ le caractère associé à l'extension quadratique $K_i/K_i^\#$ si $i \in I^*$, et $\text{sgn}_{K_i/K_i^\#} = 1$ si $i \notin I^*$. En tout cas, on a

$$\text{sgn}_{K_i/K_i^\#}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in N_{K_i/K_i^\#}(K_i^\#), \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a un isomorphisme

$$(\text{sgn}_{K_i/K_i^\#})_{i \in I^*} : K^{\#\times} / N_{K/K^\#}(K^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2^{I^*}.$$

Posons d'ailleurs

$$\text{sgn}_{K/K^\#} := \prod_{i \in I} \text{sgn}_{K_i/K_i^\#} : K^{\#\times} \rightarrow \mathbb{P}_2.$$

Supposons que U est un groupe classique et $(K/K^\#, x, c)$ paramètre une classe de conjugaison assez régulière $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c)$ dans U . Soit $c' \in K^\times$ tel que $\tau(c') = \epsilon c'$. On dit que $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c')$ existe dans U si $(K/K^\#, x, c')$ paramètre une classe de conjugaison dans U .

PROPOSITION 3.6 [Wal01, I.7]. Si U est symplectique, alors $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c')$ existe toujours dans U . Par conséquent les classes de conjugaison dans la classe de conjugaison géométrique contenant $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c)$ sont en bijection avec $\mathbb{P}_2^{I^*}$.

Supposons F non archimédien. Si U est orthogonal ou unitaire, alors $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c')$ existe dans U si et seulement si

$$\text{sgn}_{K/K^\#}(c^{-1}c') = 1.$$

Les classes de conjugaison dans la classe de conjugaison géométrique contenant $\mathcal{O}(K/K^\#, x, c)$ sont en bijection avec

$$(\mathbb{P}_2)_0^{I^*} := \left\{ (t_i) \in \mathbb{P}_2^{I^*} : \prod_i t_i = 1 \right\}.$$

Les mêmes assertions restent valides pour l'algèbre de Lie.

4. Le caractère de la représentation de Weil

Sauf mention expresse du contraire, F est toujours un corps local de caractéristique nulle dans cette section.

4.1 Formules du caractère

Nous adoptons l'approche de [Tho08a] et nous utiliserons systématiquement la construction de Lion–Perrin dans cette section.

Désignons par \overline{W} l'espace vectoriel symplectique $(W, -\langle \cdot | \cdot \rangle)$. Si $x \in \text{Sp}(W)$, alors le graphe

$$\Gamma_x := \{(w, xw) : w \in W\}$$

est un lagrangien dans $\overline{W} \oplus W$. On a un plongement $f : \text{Sp}(W) \rightarrow \text{Sp}(\overline{W} \oplus W)$ donné par $f(x) = (1, x)$.

PROPOSITION 4.1 [Tho08a, 1.3]. *Il existe un homomorphisme continu injectif*

$$\tilde{f} : \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(\overline{W} \oplus W)$$

couvrant f , qui est donné par $\tilde{f}(x, t) = ((1, x), f_x(t))$ dans la construction de Lion–Perrin où $f_x(t)$ est déterminé par

$$f_x(t)(\ell \oplus \ell) = t(\ell).$$

Définissons des ouverts de Zariski denses dans $\text{Sp}(W)$:

$$\text{Sp}(W)^\dagger := \{x \in \text{Sp}(W) : \det(x - 1) \neq 0\},$$

$$\text{Sp}(W)^\ddagger := \{x \in \text{Sp}(W) : \det(x^2 - 1) \neq 0\}.$$

On vérifie que $\text{Sp}(W)^\dagger \supset \text{Sp}(W)^\ddagger \supset \text{Sp}(W)_{\text{reg}}$. Posons $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger, \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\ddagger, \overline{\text{Sp}}_\psi(W)^\dagger, \overline{\text{Sp}}_\psi(W)^\ddagger$ leurs images réciproques dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W), \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$, respectivement, où $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Fixons une mesure de Haar sur $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$. L’admissibilité de ω_ψ^\pm permet de définir le caractère $\Theta_\psi^\pm = \text{tr}(\omega_\psi^\pm)$ comme une distribution sur $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$, d’où la distribution $\Theta_\psi = \text{tr}(\omega_\psi)$.

THÉORÈME 4.2 (Maktouf [Mak99]). *La distribution Θ_ψ est lisse sur $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$. Si $\tilde{x} = (x, t) \in \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$, alors :*

(i) *en rappelant la définition de $\text{ev}_{\Gamma_1}(\cdot)$ (2), on a*

$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \frac{\text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(\tilde{x}))}{|\det(x - 1)|^{1/2}} ;$$

(ii) *en fixant $\ell \in \text{Lagr}(W)$, on a aussi*

$$\Theta_\psi(x, t) = \frac{t(\ell)\gamma_\psi(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell))}{|\det(x - 1)|^{1/2}} ;$$

(iii) *il y a une autre formule avec ambiguïté de signe :*

$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \pm \frac{\gamma_\psi(1)^{\dim W - 1} \gamma_\psi(\det(x - 1))}{|\det(x - 1)|^{1/2}}.$$

De plus, $|\det(x + 1)|^{1/2} \Theta_\psi(\tilde{x})$ est localement constante sur $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$.

Remarque 4.3. Si $F = \mathbb{C}$, on identifie $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ à $\mu_2 \times \text{Sp}(W)$. On a

$$\Theta_\psi(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon}{|\det(x - 1)|_{\mathbb{C}}^{1/2}} ;$$

où la valeur absolue $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ est définie par $|x + yi|_{\mathbb{C}} = x^2 + y^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Notons par le même symbole Θ_ψ le caractère de ω_ψ sur la grosse extension $\overline{\text{Sp}}_\psi$, qui est bien défini comme une distribution. On en déduit une formule pour Θ_ψ au moyen du modèle de Schrödinger.

COROLLAIRE 4.4. Fixons $\ell \in \text{Lagr}(W)$. Soit $\bar{x} = (x, zM_\ell[x]) \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ où $z \in \mathbb{C}^\times$ et $x \in \text{Sp}(W)^\dagger$, alors

$$\Theta_\psi(\bar{x}) = \frac{z\gamma_\psi(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell))}{|\det(x - 1)|^{1/2}}.$$

COROLLAIRE 4.5. Supposons que $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger$ sont tels que $x, y \in \text{Sp}(W)$ sont géométriquement conjugués, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{F}_\mathbf{f}$ tel que

$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \varepsilon \cdot \Theta_\psi(\tilde{y}).$$

Démonstration. Pour $\mathbf{f} = 2$, cela résulte de la troisième formule du théorème. Le cas général en découle par la spécificité du caractère. \square

COROLLAIRE 4.6. Soit $-1 \in \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$ l'élément défini dans la définition 2.8. Alors

$$\Theta_\psi(-1) = |2|^n.$$

Démonstration. La formule de dimension dans la proposition 2.5 entraîne que $\dim \tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$. On conclut par le corollaire 4.4. \square

COROLLAIRE 4.7. Fixons $\ell \in \text{Lagr}(W)$, soit P_ℓ le stabilisateur de ℓ et $\sigma_\ell : P_\ell(F) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$ le scindage défini dans la proposition 2.14. Supposons que $x \in \text{Sp}(W)^\dagger$ et qu'il existe $\ell' \in \text{Lagr}(W)$ tel que $W = \ell \oplus \ell'$ et $x \in M(F) := (P_\ell \cap P_{\ell'})(F)$, alors

$$\Theta_\psi(\sigma_\ell(x)) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Démonstration. D'après le corollaire 4.4 et la définition de σ_ℓ , il suffit de montrer que $\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$. En identifiant ℓ' à ℓ^\vee , le dual de ℓ , on a $x = (y, {}^t y^{-1})$ où $y = x|_\ell$. Donc

$$\begin{aligned} \Gamma_x \cap \Gamma_1 &= \{(w, w) : w \in W, x(w) = w\} \\ &\simeq \{v \in \ell, y(v) = v\}^{\oplus 2}, \\ \Gamma_1 \cap (\ell \oplus \ell) &= \{(w, w) : w \in \ell\} \simeq \ell, \\ (\ell \oplus \ell) \cap \Gamma_x &= \{(w, x(w)) : w \in \ell\} \simeq \ell, \\ \Gamma_x \cap \Gamma_1 \cap (\ell \oplus \ell) &= \{(w, w) : w \in \ell, x(w) = w\} \\ &\simeq \{v \in \ell, y(v) = v\}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\dim \tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$ à l'aide de la proposition 2.5. \square

Remarque 4.8. L'hypothèse est équivalente à : $x \in \text{Sp}(W)^\dagger$ et x appartient à un facteur de Lévi M de P_ℓ . Ce corollaire caractérise le scindage de $\mathbf{p} : \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W) \rightarrow \text{Sp}(W)$ au-dessus de $M(F)$ car $\text{Sp}(W)^\dagger \cap M(F)$ est dense dans $M(F)$.

4.2 Formules pour $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$, la forme de Cayley

PROPOSITION 4.9. La distribution $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$ est lisse sur $\{\tilde{x} \in \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W) : \det(x + 1) \neq 0\}$. Pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$ tel que $\det(x + 1) \neq 0$, on a

$$(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{x}) = (\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-)((-1) \cdot \tilde{x}).$$

Ici -1 est l'élément défini dans la définition 2.8.

Démonstration. Soit $S_\psi = S_\psi^+ \oplus S_\psi^-$ la décomposition de S_ψ selon $\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-$. On conclut par la proposition 2.9. \square

Donnons un autre lien entre $\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-$ et $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$. Introduisons d'abord des formes quadratiques auxiliaires.

DÉFINITION 4.10. Pour tout $X \in \mathfrak{sp}(W)$ inversible, définissons une F -forme quadratique $q[X]$ sur W par

$$q[X](w_1|w_2) = \langle Xw_1|w_2 \rangle.$$

DÉFINITION 4.11. Pour tout $x \in \text{Sp}(W)^\ddagger$, définissons un élément C_x dans $\text{End}(W)$ par

$$C_x := 2 \cdot \frac{x - 1}{x + 1}.$$

On vérifie que $C_x \in \mathfrak{sp}(W)$. Si x est semi-simple régulier alors C_x l'est aussi. On appelle $q[C_x]$ la forme de Cayley.

THÉORÈME 4.12 (Thomas [Tho08b]). Si $\tilde{x} \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)^\ddagger$, alors

$$\frac{\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-}{\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-}(\tilde{x}) = \gamma_\psi(q[C_x]) \cdot \left| \frac{\det(x + 1)}{\det(x - 1)} \right|^{1/2}.$$

Démonstration. Par la spécificité de Θ_ψ^\pm , il suffit de considérer le cas $m = 2$. Fixons $\ell \in \text{Lagr}(W)$. Soit $\tilde{x} := (x, t) \in \widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)^\ddagger$ une paire dans la construction de Perrin–Lion. Rappelons que l'on a défini une constante $m_{-1} := m_{-1}(\ell)$ dans la construction. On a $(x, t)(-1, m_{-1}) = (-x, m_{-1}t)$ car $\tau(\ell, \ell, x\ell) = 0$ par la proposition 2.5. D'après le théorème 4.2, on a

$$\begin{aligned} \Theta_\psi(x, t) &= \frac{\text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(x, t))}{|\det(x - 1)|^{1/2}}, \\ \Theta_\psi(-x, m_{-1}t) &= \frac{\text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-x, m_{-1}t))}{|\det(x + 1)|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Comme \tilde{f} est un homomorphisme, on a

$$\text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-x, m_{-1}t)) = \text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(x, t)) \cdot \text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-1, m_{-1})) \cdot \gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x})).$$

On sait que

$$\begin{aligned} \text{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-1, m_{-1})) &= \text{ev}_{\ell \oplus \ell}(\tilde{f}(-1, m_{-1})) \gamma_\psi(\tau(\ell \oplus \ell, \ell \oplus \ell, \Gamma_{-1}, \Gamma_1)), \\ &= m_{-1}(\ell) \end{aligned}$$

car $\tau(\ell \oplus \ell, \ell \oplus \ell, \Gamma_{-1}, \Gamma_1) = 0$ par la proposition 2.5.

Soit $-1 \in \overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ l'élément défini dans la définition 2.8, alors $(-1) \cdot (x, t) = m_{-1}(\ell)^{-1} \cdot (-x, m_{-1}t)$ comme un élément dans $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$, d'où $\Theta_\psi(-x, m_{-1}t) = m_{-1}(\ell)(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(x, t)$ par la proposition 4.9. En utilisant les formules ci-dessus, on arrive à

$$\frac{\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-}{\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-}(x, t) = \left| \frac{\det(x + 1)}{\det(x - 1)} \right|^{1/2} \gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x})).$$

Calculons $\gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x}))$. En vertu de l'invariance symplectique, on a $\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x}) \simeq \tau(\Gamma_{x^{-1}}, \Gamma_1, \Gamma_{-1})$. Posons $y := x^{-1}$, alors $C_y = -C_x$ et donc $q[C_y] \simeq -q[C_x]$. Il reste à prouver que $q[C_y]$ est isomorphe à $\tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_y, \Gamma_1)$.

Puisque $\Gamma_1 \cap \Gamma_{-1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_y = \{0\}$, on sait d'après [Per81, 1.4.2] que $\tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_y, \Gamma_1)$ est Witt équivalent à la forme quadratique r sur Γ_y définie par

$$r(v) = \langle \pi_{\Gamma_{-1}}(v)|v \rangle_{\overline{W} \oplus W},$$

où $\pi_{\Gamma_{-1}}$ est la projection $\overline{W} \oplus W = \Gamma_1 \oplus \Gamma_{-1} \rightarrow \Gamma_{-1}$. Soit $v = (w, y(w))$ où $w \in W$. Posons

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{1+y}{2}(w), \\ w_2 &:= \frac{1-y}{2}(w), \end{aligned}$$

de sorte que $(w, y(w)) = (w_1, w_1) + (w_2, -w_2)$. Alors $\pi_{\Gamma_{-1}}(v) = (w_2, -w_2)$, et

$$\begin{aligned} r(v) &= \langle (w_2, -w_2) | (w, y(w)) \rangle_{\overline{W} \oplus W} \\ &= -\langle w_2 | w \rangle - \langle w_2 | y(w) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle (1-y)w | (1+y)w \rangle. \end{aligned}$$

Après le changement de variable $w' = \frac{1}{2}(1+y)w$, la forme r est isomorphe à la forme r_1 sur W définie par :

$$r_1(w') = \langle 2(y-1)(y+1)^{-1}w' | w' \rangle = q[C_y](w'),$$

ce qui fallait démontrer. □

4.3 Paramètres et la forme de Cayley

LEMME 4.13. Soit $K/K^\#$ une F -algèbre étale à involution. Pour tout $r \in K^{\#\times}$, soit $(K, q(r))$ le F -espace quadratique défini par

$$q(r) := (\text{tr}_{K^\#/K})_*(rN_{K/K^\#}(\cdot))$$

où on regarde $(K, N_{K/K^\#}(\cdot))$ comme un $K^\#$ -espace quadratique. Alors pour tout $r, r' \in K^{\#\times}$,

$$\gamma_\psi(q(r')) = \gamma_\psi(q(r)) \text{sgn}_{K/K^\#} \left(\frac{r}{r'} \right).$$

Démonstration. En décomposant $K^\#$, on se ramène au cas où $K^\#$ est un corps. On peut supposer de plus que $K^\# = F$ en remplaçant ψ par $\psi \circ \text{tr}_{K^\#/F}$. L'assertion découle d'une formule pour γ_ψ en termes du déterminant et de l'invariant de Hasse [LP81, 1.3.4]. □

Soit $X \in \mathfrak{sp}(W)$ semi-simple régulier tel que $X \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$. Désignons l'involution de K par τ , on a $\tau(a) = -a, \tau(c) = -c$. Alors on peut identifier $q[X]$ à la F -forme quadratique $q[a]$ sur K :

$$q[a] : (x, y) \mapsto -\text{tr}_{K/F}(ac\tau(x)y).$$

LEMME 4.14. Soit $c' \in K^\times$ tel que $\tau(c') = -c'$. Soit $X' \in \mathfrak{sp}(W)$ semi-simple tel que

$$X' \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c').$$

Alors

$$\gamma_\psi(q[X']) = \gamma_\psi(q[X]) \cdot \text{sgn}_{K/K^\#}(c'c^{-1}).$$

Démonstration. On conclut en appliquant le lemme 4.13 à $r := ac$ et $r' := ac'$. □

COROLLAIRE 4.15. Soient $x, y \in \text{Sp}(W)$ semi-simples réguliers. Si

$$\begin{aligned} x &\in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c), \\ y &\in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c'), \end{aligned}$$

alors

$$\gamma_\psi(q[C_x]) = \gamma_\psi(q[C_y]) \cdot \text{sgn}_{K/K^\#}(c'c^{-1}).$$

Notre but principal est l'assertion suivante.

THÉORÈME 4.16. Soient P_X le polynôme caractéristique de $X \in \text{End}_F(W)$ et \dot{P}_X sa dérivée, alors

$$\gamma_\psi(q[X]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(\det X) \cdot \text{sgn}_{K/K^\#}(c^{-1}\dot{P}_X(a)).$$

Traduisons d'abord tous les objets en termes de paramètres. On a $K \simeq F[T]/(P_X(T))$, et P_X est égal au polynôme caractéristique P_a de $a \in K$. Le déterminant $\det X$ est égal à $N_{K/F}(a)$. Observons aussi $\dot{P}_a(a) \in K^\times$. Posons $b := a^2$ et P_b son polynôme caractéristique, alors $K^\# = F[b]$ et

$$\begin{aligned} P_a(T) &= P_b(T^2), \\ \dot{P}_a(a) &= 2\dot{P}_b(b)a. \end{aligned}$$

On a $\dot{P}_X(X) \in \mathfrak{sp}(W)$ et sa classe de conjugaison est paramétrée par $(K/K^\#, \dot{P}_a(a), c)$. Il suffira donc de prouver

$$\gamma_\psi(q[a]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(N_{K/F}(a)) \text{sgn}_{K/K^\#}(2c^{-1}\dot{P}_b(b)a). \tag{3}$$

D'après le corollaire 4.15, les deux côtés du théorème 4.16 varient de la même façon par rapport à c , donc il suffit d'établir (3) dans le cas où

$$c = \dot{P}_a(a) = 2\dot{P}_b(b)a. \tag{4}$$

La forme $q[a]$ est une F -forme quadratique sur le F -espace vectoriel K . On écrit un élément $w \in K$ comme $w = x + ya$ ($x, y \in K^\#$), alors $q[a]$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} w = x + ya &\mapsto -\text{tr}_{K/F}(2b\dot{P}_b(b)N_{K/K^\#}(x + ya)) \\ &= -4 \text{tr}_{K^\#/F}(b\dot{P}_b(b)(x^2 - by^2)). \end{aligned}$$

En posant $x' = 2\dot{P}_b(b)by$, $y' = 2\dot{P}_b(b)x$, on obtient

$$q[a] \simeq (\text{tr}_{K^\#/F})_* \langle \dot{P}_b(b)^{-1}, -\dot{P}_b(b)^{-1}b \rangle.$$

Les lemmes suivants sur la forme trace concluront la démonstration de (3).

LEMME 4.17. Définissons

$$g_0 + g_1T + \dots + g_{n-1}T^{n-1} := P_b(T)/(T - b) \in K^\#[T].$$

Alors la base duale de $\{1, \dots, b^{n-1}\}$ par rapport à la forme trace $(\text{tr}_{K^\#/F})_* \langle 1 \rangle : x \mapsto \text{tr}_{K^\#/F}(x^2)$ est

$$\{\dot{P}_b(b)^{-1}g_0, \dots, \dot{P}_b(b)^{-1}g_{n-1}\}.$$

Si l'on écrit $P_b(T) = h_0 + h_1T + \dots + T^n$, alors les g_k sont donnés par la formule

$$g_k = \sum_{j=k+1}^n h_j b^{j-k-1}.$$

Démonstration. L'énoncé est bien connu dans le cas où $K^\#$ est un corps, dont la preuve s'adapte sans modification. □

Posons $m := \lfloor n/2 \rfloor$.

LEMME 4.18. *La F -forme quadratique*

$$q_1 := (\mathrm{tr}_{K\#/F})_* \langle \dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$$

est isomorphe à :

- (i) $m\mathbb{H}$, si $n = 2m$;
- (ii) $m\mathbb{H} \oplus \langle 1 \rangle$, si $n = 2m + 1$.

Démonstration. Prenons la base $\{g_0, \dots, g_{n-1}\}$. Elle est duale à $\{1, b, \dots, b^{n-1}\}$ par rapport à q_1 d'après le lemme 4.17. La matrice $Q := (q_1(g_i, g_j))_{i,j}$ est :

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} & 1 \\ h_2 & h_3 & \cdots & 1 & 0 \\ h_3 & h_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que $\det Q = (-1)^m$ et g_0, \dots, g_{m-1} forment un sous-espace totalement isotrope de dimension m . Si $n = 2m$, alors $q_1 \simeq m\mathbb{H}$. Si $n = 2m + 1$, alors il existe $a \in F^\times$ tel que $q_1 \simeq m\mathbb{H} \oplus \langle a \rangle$. En comparant les déterminants, on peut prendre $a = 1$. \square

LEMME 4.19. *La F -forme quadratique*

$$q_2 := (\mathrm{tr}_{K\#/F})_* \langle b^{-1} \dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$$

est isomorphe à :

- (i) $(m - 1)\mathbb{H} \oplus \langle 1, -N_{K\#/F}(b) \rangle$, si $n = 2m$;
- (ii) $m\mathbb{H} \oplus \langle N_{K\#/F}(b) \rangle$, si $n = 2m + 1$.

Démonstration. Prenons la base $\{bg_0, \dots, bg_{n-1}\}$. Elle est duale à $\{1, b, \dots, b^{n-1}\}$ par rapport à q_2 d'après le lemme 4.17. La matrice $Q_2 := (q_2(bg_i, bg_j))_{i,j}$ est :

$$\begin{pmatrix} -h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n-1} & 1 \\ 0 & h_3 & h_4 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & h_4 & h_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc q_2 se décompose en $q_2 = \langle -h_0 \rangle \oplus q_3$ selon les blocs. La forme q_3 est déterminée de la même façon qu'en le lemme 4.18 : $q_3 \simeq m\mathbb{H}$ si $n = 2m + 1$, $q_3 \simeq (m - 1)\mathbb{H} \oplus \langle 1 \rangle$ si $n = 2m$. D'autre part $-h_0 = (-1)^{n+1} N_{K\#/F}(b)$ d'après la description du lemme 4.17. Ceci permet de conclure. \square

Démonstration du théorème 4.16. Observons que $q_2 \simeq (\mathrm{tr}_{E\#/F})_* \langle b \dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$. Avec le choix de c fait en (4), on a vu que

$$q[a] \simeq q_1 \oplus -q_2,$$

où q_1, q_2 sont définies dans les lemmes 4.18 et 4.19. En utilisant les lemmes 4.18, 4.19 et le fait $N_{K/F}(a) = N_{K\#/F}(-b) = (-1)^n N_{K\#/F}(b)$, on arrive à

$$q[a] \simeq (n - 1)\mathbb{H} \oplus \langle (-1)^{n-1}, N_{K/F}(a) \rangle.$$

D'où

$$\gamma_\psi(q[a]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(N_{K/F}(a)).$$

Puisque $\text{sgn}_{K/K^\#}(2c^{-1}\dot{P}_b(b)a) = 1$ avec notre choix de c , cela établit (3), donc finit la démonstration du théorème 4.16. □

4.4 La formule via le modèle latticiel

Supposons désormais F non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et fixons un \mathfrak{o}_F -réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$. Posons $K := \text{Stab}_{\text{Sp}(W)}(L)$. Le modèle latticiel (ρ_L, S_L) permet d'identifier K à un sous-groupe compact ouvert de $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$. On va étudier le comportement de Θ_ψ sur K .

Remarquons d'abord que le relèvement de $-1 \in K$ à $\overline{\text{Sp}}_\psi(W)$ est égal à l'élément -1 défini dans la définition 2.8 d'après la proposition 2.13. Par conséquent, l'équation

$$\Theta_\psi(-x) = \Theta_\psi^+(x) - \Theta_\psi^-(x), \quad x \in \text{Sp}(W)^\dagger \cap K$$

est vraie en deux sens : on peut considérer $-x$ comme un élément de K , relevé à $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$ au moyen du modèle latticiel, ou au sens de la proposition 4.9. Ceci justifie notre abus de notations.

LEMME 4.20. *Pour $x \in K \cap \text{Sp}(W)^\dagger$, on a*

$$\Theta_\psi(x) = \sum_{\substack{\dot{w} \in W/L \\ (x-1)w \in L}} \psi\left(\frac{\langle x(w)|w \rangle}{2}\right),$$

qui est une somme finie si l'on fixe x .

Démonstration. Prenons un système de représentants $R \subset W$ de W/L et la base orthonormée $\{f_r\}_{r \in R}$ de S_L dans § 2.4.2. Soit $\phi \in C_c^\infty(K \cap \text{Sp}(W)^\dagger)$ quelconque. Pour $r \in R$, on a

$$\begin{aligned} (\omega_\psi(\phi)f_r)(r, 0) &= \int_{K \cap \text{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) (\omega_\psi(x)f_r)(r, 0) dx \\ &= \int_{K \cap \text{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) \mathbb{1}_{E_r}(x) \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r) \rangle}{2}\right) dx \\ (E_r &:= \{x \in K : x^{-1}(r) - r \in L\}, \text{ qui est ouvert}). \end{aligned}$$

Si x est fixé, la somme sur tout $r \in R$ du terme intérieur est finie et bornée par

$$|\phi(x)| \cdot \#((x^{-1} - 1)^{-1}L/L) = |\phi(x)| \cdot |\det(x^{-1} - 1)|^{-1},$$

qui est uniformément borné dans $K \cap \text{Sp}(W)^\dagger$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \Theta_\psi(\phi) &= \sum_{r \in R} \int_{K \cap \text{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) \mathbb{1}_{E_r}(x) \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r) \rangle}{2}\right) dx \\ &= \int_{K \cap \text{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) \sum_{r \in R} \mathbb{1}_{E_r}(x) \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r) \rangle}{2}\right) dx \\ &= \int_{K \cap \text{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) \sum_{\substack{r \in R \\ (x^{-1}-1)r \in L}} \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r) \rangle}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Le terme dans la somme ne dépend que de la classe de r modulo L . On a $\langle r|x^{-1}(r)\rangle = \langle x(r)|r\rangle$, et $(x^{-1} - 1)r \in L$ si et seulement si $(x - 1)r \in L$ car $x \in K$. D'où le résultat cherché. \square

PROPOSITION 4.21. Soit $x \in K \cap \text{Sp}(W)^\dagger$. On a :

(i) si $(x - 1)(L) = L$, alors

$$\Theta_\psi(x) = 1 ;$$

la condition est satisfaite lorsque $-x$ est topologiquement unipotent ;

(ii) si x topologiquement unipotent, alors $x \in \text{Sp}(W)^\dagger$ et

$$\Theta_\psi(x) = |\det(x - 1)|^{-1/2} \cdot \gamma_\psi(q[C_x]).$$

Démonstration. Montrons la première assertion. Si $(x - 1)L = L$, la somme dans le lemme 4.20 porte seulement sur l'élément 0, donc $\Theta_\psi(x) = 1$.

Supposons que $-x$ est topologiquement unipotent. Soit \bar{x} l'image de x dans $\text{End}_{\mathbb{F}_q}(L/\mathfrak{p}_F L)$. On a $(-\bar{x})^{q^m} = 1$ pourvu que m soit assez grand. Puisque q est impair, il en résulte que -1 n'est pas une valeur propre de $-\bar{x}$. Autrement dit : $(x - 1)L = L$. Cela démontre la première assertion.

Montrons la dernière assertion. Soit $x \in \text{Sp}(W)^\dagger \cap K$ topologiquement unipotent. L'argument pour la première assertion montre que $(x + 1)L = L$; en particulier $|\det(x + 1)| = 1$ et donc $x \in \text{Sp}(W)^\dagger$. Par le théorème 4.12 et la proposition 4.9, on en déduit

$$\begin{aligned} \Theta_\psi(x) &= \gamma_\psi(q[C_x])|\det(x - 1)|^{-1/2}(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(-x) \\ &= \gamma_\psi(q[C_x])|\det(x - 1)|^{-1/2}\Theta_\psi(-x). \end{aligned}$$

Or $\Theta_\psi(-x) = 1$ par la première assertion. D'où $\Theta_\psi(x) = |\det(x - 1)|^{-1/2}\gamma_\psi(q[C_x])$. \square

COROLLAIRE 4.22. Soit $x \in K \cap \text{Sp}(W)^\dagger$ tel que sa réduction $\bar{x} \in \text{Sp}(L/\mathfrak{p}L)$ est régulière, alors

$$\Theta_\psi(x) = \Theta_\psi(-x) = 1.$$

Dans ce cas, on dit que x est de réduction régulière par rapport à L .

4.5 Formules sur l'algèbre de Lie

On peut obtenir une formule pour Θ_ψ sur l'algèbre de Lie, ce qui aura un intérêt indépendant. Soit $X \in \mathfrak{sp}(W)$ inversible. On fait l'une des hypothèses suivantes :

- (i) l'élément X est suffisamment proche de 0 ;
- (ii) F est non archimédien de caractéristique résiduelle p assez grande par rapport à n (voir [Wal08, 4.3]), $p > 2$ et X est topologiquement nilpotent.

Alors il est loisible de définir $\exp(X)$ et $\exp(X) \in \text{Sp}(W)^\dagger$.

LEMME 4.23. Supposons que X vérifie l'une des hypothèses ci-dessus. Soit $x = \exp(X) \in \text{Sp}(W)^\dagger$, alors

$$q[C_x] \simeq q[X].$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas X semi-simple ; le cas général en résultera par continuité. Soit A la sous-algèbre commutative de $\text{End}(W)$ engendrée par X . Pour $a \in A$, considérons son rayon spectral

$$\|a\| := \sup\{|\lambda|_F : \lambda \text{ est une valeur propre de } a\}.$$

C'est une norme sur A car X est semi-simple ; A est complète par rapport à $\|\cdot\|$.

On cherche une série formelle $P(T) \in F[[T]]$ dont le rayon de convergence est $> \|X\|$ telle que $P(X)$ est inversible et $q[2 \cdot (x - 1)/(x + 1)](v|w) = \langle XP(X)v|P(X)w \rangle$ pour tout $u, v \in W$. Cela équivaut à

$$P(X)P(-X)X = 2 \cdot \frac{\exp(X) - 1}{\exp(X) + 1},$$

ou

$$P(X)P(-X) = \frac{2}{X} \cdot \frac{\exp(X) - 1}{\exp(X) + 1}.$$

Le terme à droite est de la forme $1 + Q(X)$, où $Q(T) \in F[[T^2]]$ a un rayon de convergence $> \|X\|$ et $T|Q(T)$. Cela nous permet de définir

$$P(T) := \exp\left(\frac{1}{2} \log(1 + Q(T))\right) \in F[[T^2]].$$

Cette série formelle a aussi un rayon de convergence $> \|X\|$. Donc $P(X)$ est inversible car il appartient à l'image de l'exponentielle. On a

$$P(T)P(-T) = P(T)^2 = 1 + Q(T) = \frac{2}{T} \cdot \frac{\exp(T) - 1}{\exp(T) + 1}.$$

On remplace T par X et cela permet de conclure. □

COROLLAIRE 4.24. *Avec les mêmes hypothèses, il existe une constante c indépendante de X telle que*

$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \frac{c \cdot \gamma_\psi(q[X])}{|\det(x - 1)|^{1/2}}.$$

où $\tilde{x} := \exp(X)$. Si l'hypothèse (ii) est satisfaite, on a $c = 1$.

Démonstration. D'après le théorème 4.12, la proposition 4.9 et le lemme,

$$\begin{aligned} \Theta_\psi(\tilde{x}) &= \left| \frac{\det(x + 1)}{\det(x - 1)} \right|^{1/2} \gamma_\psi(q[C_x])(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{x}) \\ &= \left| \frac{\det(x + 1)}{\det(x - 1)} \right|^{1/2} \gamma_\psi(q[X])\Theta_\psi(-\tilde{x}). \end{aligned}$$

Posons $c := |2|^n \Theta_\psi(-1)$. Lorsque X est assez petit, $\Theta_\psi(-\tilde{x}) = |\det(x + 1)|^{-1/2}c$. Dans le cas où l'hypothèse (ii) est satisfaite, on a $c = 1$. D'où le corollaire. □

4.6 Décompositions

Fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Supposons qu'il y a une décomposition orthogonale d'espaces symplectiques

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r.$$

Alors il existe un homomorphisme canonique

$$\iota : \prod_{k=1}^r \text{Sp}(W_k) \rightarrow \text{Sp}(W).$$

On en déduit un homomorphisme recouvrant ι ,

$$j : \prod_{k=1}^r \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$$

telle que $j^{-1}(\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger) = \prod_{k=1}^r \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$. Pour $1 \leq k \leq r$, notons $\Theta_\psi^{[k]}$ le caractère de la représentation de Weil de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)$ attachée à ψ ; il est lisse sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$. Le résultat suivant découle de l'additivité symplectique de l'indice de Maslov.

PROPOSITION 4.25. Soient $\tilde{x}_k \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$ pour $1 \leq k \leq r$, alors

$$\Theta_\psi(j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r)) = \prod_{k=1}^r \Theta_\psi^{[k]}(\tilde{x}_k).$$

Supposons maintenant F non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$. Soient $L_k := W_k \cap L$. Supposons que $L = \bigoplus_{k=1}^r L_k$, alors $L_k^\perp = L_k$ dans W_k . Posons $K_k := \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W_k)}(L_k)$.

Soit $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger \cap K$ tel que $x(L_k) \subset L_k$ pour tout k . Il existe alors $x_k \in \mathrm{Sp}(W_k)^\dagger \cap K_k$ pour tout k tel que $\iota(x_1, \dots, x_r) = x$. On regarde x (respectivement les x_k) comme un élément de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ (respectivement $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W_k)$) à l'aide du modèle latticiel associé à L (respectivement L_k). La proposition suivant résulte immédiatement du lemme 4.20.

PROPOSITION 4.26. Avec les hypothèses ci-dessus, on a

$$\Theta_\psi(x) = \prod_{k=1}^r \Theta_\psi^{[k]}(x_k).$$

4.7 La formule du produit

Dans cette section on se place dans le cas global. Fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Rappelons que l'on a une immersion canonique $i : \mathrm{Sp}(W, F) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A}) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$. On écrit $i(x) = [\tilde{x}_v]_v$ où $\tilde{x}_v \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$.

DÉFINITION 4.27. On dit que deux éléments $x = (x_v)_v, y = (y_v)_v$ dans $\mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ sont localement géométriquement conjugués si pour toute place v , x_v et y_v dans $\mathrm{Sp}(W, F_v)$ sont géométriquement conjugués.

THÉORÈME 4.28. Soient $x \in \mathrm{Sp}(W, F)$ et $\tilde{y} = [\tilde{y}_v] \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ tels que y est localement géométriquement conjugué à x . Supposons que $\det(x - 1) \neq 0$. Alors $\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v) = 1$ pour presque tout v , et le produit $\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)$ est bien défini et à valeurs dans \mathbb{P}_F . On a aussi

$$\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v) = 1.$$

De même, si $\det(x + 1) \neq 0$ alors les assertions ci-dessus restent valables avec $(\Theta_{\psi_v}^+ - \Theta_{\psi_v}^-)$ au lieu de Θ_{ψ_v} .

Démonstration. Vu la proposition 4.9 et le corollaire 2.17, il suffit de traiter le cas $\det(x - 1) \neq 0$. Pour presque toute place finie v on a $L_v = L_v^\perp$, $\tilde{y}_v \in K_v$ et $(y_v - 1)(L_v) = L_v$, alors la proposition 4.21 entraîne que $\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v) = 1$. Puisque les distributions locales Θ_{ψ_v} sont spécifiques, le produit $\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)$ ne dépend pas du choix des \tilde{y}_v . La formule du produit pour $\Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v)$ découle de la proposition 2.16, le corollaire 4.4 et la réciprocity de Weil. Si $\tilde{y} = [\tilde{y}_v] \in \mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ est tel que y est localement géométriquement conjugué à x , alors $\Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v)\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)^{-1} \in \mathbb{P}_F$ pour toute place v d'après le corollaire 4.5, cela démontre le reste. \square

5. Endoscopie

Désormais, fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et posons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) = \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$ pour W un F -espace symplectique où F est un corps local. De même, posons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W, \mathbb{A}) = \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ si F est un corps global.

5.1 Données endoscopiques elliptiques

Fixons F un corps local ou global de caractéristique 0 et fixons $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un F -espace symplectique de dimension $2n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Soient $n', n'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n' + n'' = n$. Nous étudierons les groupes

$$\begin{aligned} G &:= \mathrm{Sp}(W), \\ H &= H_{n', n''} := H' \times H'', \quad \text{où} \\ H' &:= \mathrm{SO}(2n' + 1), \\ H'' &:= \mathrm{SO}(2n'' + 1); \\ \tilde{G} &:= \begin{cases} \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) & \text{lorsque } F \text{ est local,} \\ \widetilde{\mathrm{Sp}}(W, \mathbb{A}) & \text{lorsque } F \text{ est global.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ici $\mathrm{SO}(2m + 1)$ ($m = n'$ ou n'') signifie le groupe orthogonal impair déployé associé à la forme quadratique sur F^{2m+1} :

$$(x_{-m}, \dots, x_0, \dots, x_m) \mapsto 2 \sum_{i=1}^m x_i x_{-i} + x_0^2.$$

Notons $\mathbf{p} : \tilde{G} \rightarrow G(F)$ (respectivement $\mathbf{p} : \tilde{G} \rightarrow G(\mathbb{A})$) le revêtement métaplectique si F est local (respectivement global). Une donnée endoscopique elliptique de \tilde{G} est une paire (n', n'') comme ci-dessus. Désormais, fixons une telle donnée (n', n'') . Le groupe $H := H_{n', n''}$ est le groupe endoscopique elliptique associé à (n', n'') . Spécifions maintenant la correspondance de classes de conjugaison géométriques semi-simples.

Fixons des F -tores maximaux déployés $S' \subset H'$, $S'' \subset H''$ et posons $S = S' \times S''$, c'est un F -tore maximal déployé dans H . Fixons aussi des F -tores maximaux déployés $T' \subset \mathrm{Sp}(2n')$, $T'' \subset \mathrm{Sp}(2n'')$ et $T \subset \mathrm{Sp}(W)$. Ces objets sont uniques à F -conjugaison près.

Notons par $W^{H'}(S')$, $W^{H''}(S'')$, $W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T')$, $W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'')$, $W^G(T)$ les groupes de Weyl associés à ces tores maximaux, alors $W^H(S) = W^{H'}(S') \times W^{H''}(S'')$. Il y a des homomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} W^{H'}(S') &\xrightarrow{\sim} W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T'), \\ W^{H''}(S'') &\xrightarrow{\sim} W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T''), \\ W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T') \times W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'') &\hookrightarrow W^{\mathrm{Sp}(2n)}(T), \end{aligned}$$

et des F -isomorphismes qui respectent les homomorphismes ci-dessus

$$\begin{aligned} \mu' : S' &\xrightarrow{\sim} T', \\ \mu'' : S'' &\xrightarrow{\sim} T'', \\ \nu : T' \times T'' &\xrightarrow{\sim} T. \end{aligned}$$

On obtient ainsi des F -morphisms, notés par les mêmes lettres :

$$\begin{aligned} \mu' &: S'/W^{H'}(S') \xrightarrow{\sim} T'/W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T'), \\ \mu'' &: S''/W^{H''}(S'') \xrightarrow{\sim} T''/W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T''), \\ \nu &: T'/W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T') \times T''/W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'') \rightarrow T/W^G(T). \end{aligned}$$

Posons

$$\mu = \mu_{n',n''} := \nu \circ (\mathrm{id}, -\mathrm{id}) \circ (\mu', \mu'') : S/W^H(S) \rightarrow T/W^G(T). \tag{5}$$

Puisque G est simple et simplement connexe, μ donne naissance à une application, notée encore par μ :

$$\mu : \mathcal{C}_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{géo}}(H(F)) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{géo}}(G(F)). \tag{6}$$

Cette application ne dépend pas du choix de F -tores maximaux. De plus, elle est à fibres finies car μ', μ'', ν le sont.

DÉFINITION 5.1. Si $\delta \in G(F)_{\mathrm{ss}}$, $\gamma \in H(F)_{\mathrm{ss}}$ sont tels que $\mu(\mathcal{O}^{\mathrm{géo}}(\gamma)) = \mathcal{O}^{\mathrm{géo}}(\delta)$, on dit que δ et γ se correspondent.

Remarque 5.2. Lorsque $n' = 0$ ou $n'' = 0$, μ est bijectif. C'est démontré dans [How07] pour F un corps local, mais l'argument marche aussi sur un corps global.

Explicitons l'application μ en termes de paramètres.

PROPOSITION 5.3. Soit $\gamma \in H(F)_{\mathrm{ss}} = H'(F)_{\mathrm{ss}} \times H''(F)_{\mathrm{ss}}$ tel que

$$\gamma \in \mathcal{O}((K'/K'^{\#}, a', (V_{K'}, h_{K'}), (V'_{\pm}, q'_{\pm})) \oplus (K''/K''^{\#}, a'', (V_{K''}, h_{K''}), (V''_{\pm}, q''_{\pm}))),$$

alors un élément $\delta \in G(F)_{\mathrm{ss}}$ lui correspond si et seulement si $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par

$$\mathcal{O}(K/K^{\#}, (a', -a''), (W_K, h_K), (W_{\pm}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\pm}))$$

où $K := K' \times K''$ comme F -algèbres étales à involution, et les autres données sont soumises aux conditions

$$\begin{aligned} W_K &\simeq V_{K'} \oplus V_{K''} \text{ comme } K\text{-modules,} \\ \dim_F W_+ + 1 &= \dim_F V'_+ + \dim_F V''_-, \\ \dim_F W_- + 1 &= \dim_F V'_- + \dim_F V''_+. \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.4. On dit qu'un élément $\gamma \in H(F)_{\mathrm{ss}}$ est G -régulier si $\mu(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma))$ est régulier. On note l'ouvert de Zariski des éléments G -réguliers par $H_{G\text{-reg}}$.

Si $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ est G -régulier, alors γ' et γ'' sont assez réguliers.

COROLLAIRE 5.5. Deux éléments $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G\text{-reg}}(F)$ et $\delta \in G_{\mathrm{reg}}(F)$ se correspondent si et seulement s'ils admettent des paramètres de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \gamma' &\in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c'), \\ \gamma'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, a'', c''), \\ \delta &\in \mathcal{O}(K/K^{\#}, (a', -a''), c), \end{aligned}$$

où $K = K' \times K''$ comme F -algèbres étales à involution. Il n'y a pas de restrictions sur les données c', c'', c .

Enfin, la formation de l'application μ est compatible aux complétions.

5.2 Une notion de stabilité

Supposons que F est un corps local. Soient $\delta \in G_{\text{reg}}(F)$ et T l'unique F -tore maximal contenant δ . Alors $\mathcal{D}(\delta) := \mathcal{O}^{\text{st}}(\delta)/\text{conj}$ est un tore sous $H^1(F, T)$. Explicitons cette action. Si $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par $(K/K^\#, a, c)$, $K = \prod_{i \in I} K_i$, alors on a des isomorphismes canoniques

$$H^1(F, T) \simeq K^{\#\times} / N_{K/K^\#}(K^\times) \xrightarrow[\text{(sgn}_i)_{i \in I}]{\sim} \mathbb{P}_2^I$$

où $\text{sgn}_i := \text{sgn}_{K_i/K_i^\#}$. D'autre part $\mathcal{O}^{\text{st}}(\delta)/\text{conj}$ est isomorphe au même ensemble, sur lequel $H^1(F, T)$ agit par multiplication.

DÉFINITION 5.6. Soient $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \in \tilde{G}_{\text{reg}}$, on dit qu'ils sont stablement conjugués si leurs images dans $G(F)$ sont stablement conjugués et si

$$(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{\delta}_1) = (\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{\delta}_2).$$

Soit $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\text{reg}}$, notons $\mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta})$ l'ensemble d'éléments dans \tilde{G}_{reg} stablement conjugués à $\tilde{\delta}$. On définit $\mathcal{D}(\tilde{\delta}) := \mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta})/\text{conj}$.

Pour $F = \mathbb{R}$, cette notion *ad hoc* coïncide avec celle d'Adams (voir [Ada98, 8.10]) si l'on se restreint à $\widetilde{\text{Sp}}^{(2)}(W)$. Pour $F = \mathbb{C}$, on identifie \tilde{G} à $\text{Ker}(\mathbf{p}) \times G(\mathbb{C})$. Deux éléments réguliers $(\varepsilon_1, \delta_1), (\varepsilon_2, \delta_2)$ sont stablement conjugués si et seulement si δ_1, δ_2 le sont et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, d'après la remarque 4.3.

LEMME 5.7. Soit $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\text{reg}}$, alors $\mathbf{p} : \tilde{G} \rightarrow G(F)$ induit une bijection $\mathcal{D}(\tilde{\delta}) \rightarrow \mathcal{D}(\delta)$.

Démonstration. Soit $\delta_1 \in \mathcal{O}^{\text{st}}(\delta)$ et $\tilde{\delta}_1 \in \mathbf{p}^{-1}(\delta_1)$ quelconque. D'après le corollaire 4.5, il existe $\varepsilon \in \text{Ker}(\mathbf{p})$ tel que

$$(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{\delta}_1) = \varepsilon \cdot (\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{\delta}).$$

Or $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$ est spécifique, donc il existe un unique $\tilde{\delta}_1 \in \mathbf{p}^{-1}(\delta_1)$ stablement conjugué à $\tilde{\delta}$. Cela permet de conclure. □

Soient $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1$ stablement conjugués. Notons T le F -tore maximal contenant δ , on pose $\text{inv}(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1) := \text{inv}(\delta, \delta_1)$; c'est l'unique élément $c \in H^1(F, T)$ tel que $c \cdot \delta = \delta_1$.

Remarque 5.8. La notion de stabilité est compatible avec la restriction : si $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{f}|\mathbf{f}'$ et $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1 \in \widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)_{\text{reg}}$, alors $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\delta}_1$ sont stablement conjugués dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$ si et seulement s'ils sont stablement conjugués dans $\widetilde{\text{Sp}}^{(\mathbf{f}')} (W)$.

5.3 Facteur de transfert

Sauf mention expresse du contraire, dans cette section F est toujours un corps local.

Soient $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\text{reg}}$, $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G\text{-reg}}(F)$ tels que δ et γ se correspondent. Supposons que

$$\begin{aligned} \gamma' &\in \mathcal{O}(K'/K'^\#, a', c'), \\ \gamma'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^\#, a'', c'') ; \end{aligned}$$

alors on a une unique décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$ stable par δ telle que si l'on pose $\delta' := \delta|_{W'}$, $\delta'' := \delta|_{W''}$, alors

$$\begin{aligned} \delta' &\in \mathcal{O}(K'/K'^\#, a', c'), \\ \delta'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^\#, -a'', c''). \end{aligned}$$

On a un homomorphisme canonique $j : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'') \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et on peut prendre $\tilde{\delta}' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W')$, $\tilde{\delta}'' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')$ de sorte que $j(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'') = \tilde{\delta}$. La paire (δ', δ'') est unique et appartient à $\mathrm{Sp}(W')_{\mathrm{reg}} \times \mathrm{Sp}(W'')_{\mathrm{reg}}$; par contre la paire $(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'')$ est unique à multiplication par $\{(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) : \varepsilon \in \mathrm{Ker}(\mathbf{p})\}$ près.

DÉFINITION 5.9. Avec les hypothèses ci-dessus, définissons

$$\begin{aligned} \Delta'(\tilde{\delta}') &:= \frac{\Theta_{\psi}^+ - \Theta_{\psi}^-}{|\Theta_{\psi}^+ - \Theta_{\psi}^-|}(\tilde{\delta}'), \\ \Delta''(\tilde{\delta}'') &:= \frac{\Theta_{\psi}^+ + \Theta_{\psi}^-}{|\Theta_{\psi}^+ + \Theta_{\psi}^-|}(\tilde{\delta}''), \end{aligned}$$

$$\Delta_0(\delta', \delta'') := \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(\delta' + 1)),$$

où Θ_{ψ}^{\pm} (respectivement Θ_{ψ}^{\pm}) sont les caractères définis sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W')$ (respectivement $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')$), et $P_{a'}(T) \in F[T]$ est le polynôme caractéristique de $a' \in K'^{\times}$ (qui est aussi le celui de $\delta' \in \mathrm{End}_F(W')$). On vérifie que $P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \in K''\#\times$.

Le facteur de transfert est défini par

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) := \Delta_0(\delta', \delta'') \Delta'(\tilde{\delta}') \Delta''(\tilde{\delta}'').$$

Comme Δ', Δ'' sont des distributions spécifiques, $\Delta(\gamma, \tilde{\delta})$ est bien défini. Ce ne dépend que de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma)$ et $\mathcal{O}(\tilde{\delta})$, et le terme Δ_0 ne dépend que de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma)$. Définissons $\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) = 0$ si γ et $\tilde{\delta}$ ne se correspondent pas. Cela définit une fonction Δ sur $H_{G\text{-reg}}(F) \times \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$.

Remarque 5.10. Le terme Δ_0 est trivial lorsque $n' = 0$ ou $n'' = 0$. Lorsque $F = \mathbb{R}$ et $n'' = 0$, Δ coïncide avec le facteur de transfert défini par Adams [Ada98], quitte à se restreindre à $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. Lorsque $F = \mathbb{C}$, Δ est trivial.

Déduisons d'autres formules utiles pour Δ . La proposition suivante résulte du théorème 4.12 et de la proposition 4.25.

PROPOSITION 5.11. On a aussi

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) &= \Delta_0(\delta', \delta'') \cdot \frac{\Theta_{\psi}^+ - \Theta_{\psi}^-}{|\Theta_{\psi}^+ - \Theta_{\psi}^-|}(\tilde{\delta}) \cdot \gamma_{\psi}(q[C_{\delta''}]) \\ &= \Delta_0(\delta', \delta'') \cdot \frac{\Theta_{\psi}^+ + \Theta_{\psi}^-}{|\Theta_{\psi}^+ + \Theta_{\psi}^-|}(\tilde{\delta}) \cdot \gamma_{\psi}(q[C_{\delta'}])^{-1}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.12 (Spécificité). Δ est spécifique au sens suivant :

$$\forall \varepsilon \in \mathrm{Ker}(\mathbf{p}), \quad \Delta(\gamma, \varepsilon \tilde{\delta}) = \varepsilon \Delta(\gamma, \tilde{\delta}).$$

Maintenant soit T le F -tore maximal contenant δ , et $T = T' \times T''$ la décomposition correspondant à $\delta = i(\delta', \delta'')$. Décomposons les F -algèbres étales dans les paramètres pour δ', δ'' comme

$$\begin{aligned} K' &= \prod_{i \in I'} K'_i, \\ K'' &= \prod_{i \in I''} K''_i. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} H^1(F, T') &= \mathbb{P}_2^{I'^*}, \\ H^1(F, T'') &= \mathbb{P}_2^{I''^*}. \end{aligned}$$

Comme l'endoscopie pour les groupes réductifs, on dispose de la notion du caractère endoscopique $\kappa = \kappa_T : H^1(F, T) \rightarrow \mathbb{P}_2$. Vu l'identification ci-dessus, c'est défini par

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbb{P}_2^{I'^*} \times \mathbb{P}_2^{I''^*} &\longrightarrow \mathbb{P}_2 \\ ((t'_i)_{i \in I'^*}, (t''_i)_{i \in I''^*}) &\longmapsto \prod_{i \in I''^*} t''_i. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.13 (Propriété de cocycle). *Conservons le formalisme ci-dessus. Si $\tilde{\delta}$ est stablement conjugué à $\tilde{\delta}_1$, alors*

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}_1) = \langle \kappa, \text{inv}(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1) \rangle \Delta(\gamma, \tilde{\delta}).$$

Démonstration. On utilise la première formule de la proposition 5.11. Le terme Δ_0 ne dépend que de $(K'/K'^{\#}, a')$ et $(K''/K''^{\#}, a'')$, donc la stabilité n'y intervient pas. D'autre part $\Theta_{\psi}^+ - \Theta_{\psi}^-$ est constante sur une classe de conjugaison stable par définition. Il suffit de traiter le terme $\gamma_{\psi}(q[C_{\delta''}])$. L'assertion résulte immédiatement du corollaire 4.15. \square

Remarque 5.14. Si F est global, les caractères locaux définis ci-dessus s'assemblent, par la théorie du corps des classes, en un caractère

$$\kappa_T : H^1(\mathbb{A}/F, T) \rightarrow \mathbb{P}_2$$

avec la notation de [Lab99, § 1.4]. Ceci sera utile pour la stabilisation de la formule des traces.

Considérons la question de la normalisation (cf. [Wal08, 4.6]). Pour l'instant, supposons que F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et ψ est de conducteur \mathfrak{o}_F . Fixons un réseau autodual $L \subset W$ et le sous-groupe hyperspécial associé $K \subset G(F)$. Fixons aussi un sous-groupe hyperspécial K_H de $H(F)$. Supposons qu'il existe $\gamma \in K_H$, $\delta \in K$ qui se correspondent tels que γ, δ sont de réductions régulières. De tels choix existent.

PROPOSITION 5.15 (Normalisation à la Waldspurger). *Pour (γ, δ) comme ci-dessus, on a $\Delta(\gamma, \delta) = 1$.*

Démonstration. Il existe une décomposition $L = L' \oplus L''$ où $L' = W' \cap L$, $L'' = W'' \cap L$ par nos hypothèses. Soient $K' \subset \text{Sp}(W')$, $K'' \subset \text{Sp}(W'')$ les sous-groupes hyperspéciaux associés, alors $\delta' \in K'$, $\delta'' \in K''$ et ils sont de réductions régulières.

Montrons que $\Delta_0(\delta', \delta'')$, $\Delta'(\delta')$ et $\Delta''(\delta'')$ sont tous 1. C'est clair pour Δ_0 ; pour Δ' et Δ'' , on utilise le corollaire 4.22. \square

PROPOSITION 5.16 (Symétrie). *Notons $\Delta_{n', n''}$ le facteur de transfert associé à la paire (n', n'') et $\Delta_{n'', n'}$ celui associé à (n'', n') . Pour tous $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H(F)$ et $\delta \in G(F)$ qui se correspondent, on a*

$$\Delta_{n', n''}((\gamma', \gamma''), \tilde{\delta}) = \Delta_{n'', n'}((\gamma'', \gamma'), -\tilde{\delta}) \quad \text{si } 8 \mid \mathfrak{f}$$

où $-1 \in \tilde{G}$ est celui défini dans la définition 2.8. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \Delta'_{(n', n'')}(\tilde{\delta}') \Delta''_{(n', n'')}(\tilde{\delta}'') &= \Delta'_{(n'', n')}(-\tilde{\delta}'') \Delta''_{(n'', n')}(-\tilde{\delta}') \quad \text{si } 8 \mid \mathfrak{f}; \\ \Delta_{0, (n', n'')}(\delta', \delta'') &= \Delta_{0, (n'', n')}(-\delta'', -\delta'), \quad \mathfrak{f} \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

Démonstration. L'assertion pour $\Delta'\Delta''$ résulte de la proposition 4.9. L'assertion pour Δ_0 sera démontrée en le corollaire 7.17. □

Enfin, on dispose aussi d'une formule du produit. Supposons F global, $\psi : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{S}^1$ un caractère non-trivial avec décomposition $\psi = \prod_v \psi_v$. On a défini un facteur de transfert Δ_v pour toute place v .

PROPOSITION 5.17 (Formule du produit). *Soient $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$ et $\delta \in G(F)$ qui se correspondent. Soit $i(\delta) = [\tilde{\delta}_v]_v$, alors :*

- pour presque toute place v , on a $\Delta_v(\gamma, \tilde{\delta}_v) = 1$;
- $\prod_v \Delta_v(\gamma, \tilde{\delta}_v) = 1$.

Démonstration. Dans ce cas-là, on a une décomposition $W = W' \oplus W''$ et des éléments $\delta' \in \text{Sp}(W')_{\text{reg}}$, $\delta'' \in \text{Sp}(W'')_{\text{reg}}$ tels que $\iota(\delta', \delta'') = \delta$. Tous ces objets sont définis sur F . Vu la formule du produit pour Δ', Δ'' (4.28), il reste à prouver :

- pour presque toute place v , on a $\Delta_{0,v}(\delta', \delta'') = 1$;
- $\prod_v \Delta_{0,v}(\delta', \delta'') = 1$.

Supposons que $\delta' \in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c')$, $\delta'' \in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, a'', c'')$. Posons d'autre part

$$\alpha'' := P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(1 + a') \in K''^{\#\times}.$$

La formation de α'' est compatible à complétion. Il s'agit de montrer que

$$\prod_v \text{sgn}_{K''_v/K''^{\#}_v}(\alpha'') = 1$$

où K''_v est la complétée de K'' comme une F -algèbre étale à involution. C'est une conséquence de la théorie des corps du classes. □

5.4 Descente parabolique

Supposons maintenant que $8|f$. Rappelons que les sous-groupes de Lévi de H sont de la forme

$$M_H = \prod_{i \in I} (\text{GL}(n'_i) \times \text{GL}(n''_i)) \times H^b \tag{7}$$

où I est un ensemble fini, $H^b = \text{SO}(2m' + 1) \times \text{SO}(2m'' + 1)$ avec $(m', m'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, les $(n'_i, n''_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ sont tels que $\sum_{i \in I} n'_i + m' = n'$, $\sum_{i \in I} n''_i + m'' = n''$. Le plongement de M_H dans M est défini par $\prod_i \text{GL}(n'_i) \times \text{SO}(2m' + 1) \hookrightarrow \text{SO}(2n' + 1)$ et $\prod_i \text{GL}(n''_i) \times \text{SO}(2m'' + 1) \hookrightarrow \text{SO}(2n'' + 1)$. Posons $m = m' + m''$. On dit qu'un sous-groupe de Lévi M de G correspond à (M_H, H) s'il est de la forme

$$M = \prod_{i \in I} \text{GL}(n_i) \times G^b, \tag{8}$$

où $G^b := \text{Sp}(W^b)$ avec W^b un F -espace symplectique de dimension $2m$ tel que $n'_i + n''_i = n_i$ pour tout $i \in I$.

Fixons M_H et supposons M associé à (M_H, H) . À l'aide des décompositions ci-dessus, on écrit les éléments de $M(F)$ comme $((\delta_i)_{i \in I}, \delta^b)$ et on écrit les éléments de $M_H(F)$ comme $((\gamma_i)_{i \in I}, \gamma^b)$. Notons \tilde{G}^b la fibre de $\mathbf{p} : \tilde{G} \rightarrow G(F)$ au-dessus de $G^b(F)$, alors $\mathbf{p} : \tilde{G}^b \rightarrow G^b(F)$ est le revêtement métaplectique et H^b est un groupe endoscopique elliptique de \tilde{G}^b déterminé par la paire (m', m'') .

Le revêtement p se scinde canoniquement sur les composantes $\mathrm{GL}(n_i)$ par la proposition 2.14 et la remarque 4.8, il y a donc un isomorphisme canonique

$$j : \prod_i \mathrm{GL}(n_i) \times \tilde{G}^b \xrightarrow{\sim} \mathbf{p}^{-1}(M(F)).$$

Pour $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$, notons $\tilde{\delta}^b \in \tilde{G}^b$ l'élément tel qu'il existe (δ_i) avec $j((\delta_i), \tilde{\delta}^b) = \tilde{\delta}$.

Un élément dans $M(F)_{\mathrm{ss}}$ est dit G -régulier s'il est régulier dans G . On note $M_{G\text{-reg}}$ l'ouvert de Zariski des éléments G -réguliers. Un élément $\gamma \in M_H(F)_{\mathrm{ss}}$ est dit G -régulier s'il existe $\delta \in M_{G\text{-reg}}(F)$ qui lui correspond.

PROPOSITION 5.18. Soient M_H un sous-groupe de Lévi de H et M un sous-groupe de Lévi de G qui correspond à (M_H, H) . Soient $\gamma \in M_H(F)$ et $\delta \in M_{G\text{-reg}}(F)$ qui se correspondent comme éléments dans $H(F)$ et $G(F)$. Alors γ^b et δ^b se correspondent. Notons $\Delta_{H, \tilde{G}}$ et $\Delta_{H^b, \tilde{G}^b}$ les facteurs de transfert associés à (G, H) et (G^b, H^b) , alors

$$\Delta_{H, \tilde{G}}(\gamma, \tilde{\delta}) = \Delta_{H^b, \tilde{G}^b}(\gamma^b, \tilde{\delta}^b)$$

pour tout $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$. Plus précisément, cette propriété est satisfaite pour tous les deux facteurs $\Delta' \Delta''$ et Δ_0 .

Démonstration. Pour le terme $\Delta' \Delta''$, observons que, d'après la proposition 4.25 et le corollaire 4.7, on a

$$\Theta_\psi(j((\delta_i), \tilde{\delta}^b)) = \Theta_\psi(\tilde{\delta}^b)$$

où le terme à gauche est défini par rapport à \tilde{G}^b . Par la proposition 5.11, on voit que

$$\Delta'(\tilde{\delta}') \Delta''(\tilde{\delta}'') = \frac{\Theta_\psi(\tilde{\delta}^b)}{|\Theta_\psi(\tilde{\delta}^b)|} \gamma_\psi(q[C_{\delta''}]).$$

Or les classes de conjugaison des composantes δ_i donnent des formes hyperboliques comme facteurs directs de $q[C_{\delta''}]$, qui n'affectent pas $\gamma_\psi(q[C_{\delta''}])$. On obtient la descente du facteur $\Delta' \Delta''$ en appliquant la proposition 5.11 encore une fois.

Pour le terme Δ_0 , observons que $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par une donnée

$$(K/K^\#, a, c) = \bigoplus_i (K_i/K_i^\#, a_i, c_i) \oplus (E/E^\#, \alpha, \gamma)$$

où $\mathcal{O}(\delta^b) = \mathcal{O}(E/E^\#, \alpha, \gamma)$ et $K_i \simeq K_i^\# \times K_i^{\#\#}$ pour tout i . Les données ont de plus les décompositions $K_i/K_i^\# = K_i'/K_i'^\# \oplus K_i''/K_i''^\#$, etc.

Il s'agit de démontrer que l'on peut enlever $(K_i'/K_i'^\#, a_i', c_i')$ et $(K_i''/K_i''^\#, a_i'', c_i'')$ dans la définition de Δ_0 . C'est clair pour $(K_i''/K_i''^\#, a_i'', c_i'')$ car le caractère $\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\cdot)$ se factorise par $K^{\#\times} \rightarrow E^{\#\times}$. Pour $(K_i'/K_i'^\#, a_i', c_i')$, observons que la symétrie du corollaire 7.17 pour Δ_0 échange les rôles de δ' et δ'' quitte à les multiplier par -1 . Un argument de va-et-vient permet de se ramener au cas précédent. \square

5.5 Énoncés du transfert et du lemme fondamental

Dans cette section, F est un corps local.

Intégrales orbitales. Soit M un F -groupe réductif connexe et soit $m \in M_{\text{reg}}(F)$. Soient $f \in C_c^\infty(M(F))$, $m \in M_{\text{reg}}(F)$. Posons

$$D^M(m) := \det(1 - \text{Ad}(m)|\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_m),$$

$$J_M(m, f) := |D^M(m)|^{1/2} \cdot \int_{M_m(F) \backslash M(F)} f(x^{-1}mx) \, d\dot{x}.$$

Cette définition dépend des mesures de Haar sur $M(F)$ et $M_m(F)$. Si $m \in M(F)$ est fortement régulier, l'intégrale orbitale stable est définie comme

$$J_M^{\text{st}}(m, f) := \sum_{m_1} J_M(m_1, f)$$

où m_1 parcourt des représentants de $\mathcal{O}^{\text{st}}(m)/\text{conj}$.

Les mêmes définitions s'adaptent à l'algèbre de Lie. Soient $f \in C_c^\infty(M(F))$, $X \in \mathfrak{m}_{\text{reg}}(F)$. Posons

$$D^M(X) := \det(\text{ad}(X)|\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_X),$$

$$J_M(X, f) := |D^M(X)|^{1/2} \cdot \int_{M_m(F) \backslash M(F)} f(x^{-1}Xx) \, d\dot{x},$$

$$J_M^{\text{st}}(X, f) := \sum_{X_1} J_M(X_1, f)$$

où X_1 parcourt des représentants de $\mathcal{O}^{\text{st}}(X)/\text{conj}$.

On considère aussi les intégrales orbitales sur un revêtement. Soit $\mathbf{p} : \tilde{M} \rightarrow M(F)$ un revêtement d'un F -groupe réductif connexe satisfaisant à la condition simplificatrice suivante.

HYPOTHÈSE 5.19. On suppose que $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ commutent si $x, y \in M(F)$ commutent.

Définissons les sous-ensembles \tilde{M}_{reg} et \tilde{M}_{ss} comme les images réciproques de leurs avatars sur $M(F)$. Soit $\tilde{m} \in \tilde{M}_{\text{reg}}$. Fixons les mesures comme précédemment et définissons

$$J_{\tilde{M}}(\tilde{m}, f) := |D^M(m)|^{1/2} \int_{M_m(F) \backslash M(F)} f(\tilde{x}^{-1}\tilde{m}\tilde{x}) \, d\dot{x} \tag{9}$$

où \tilde{x} est une image réciproque quelconque de x . Si F est archimédien, alors on peut définir les intégrales orbitales d'une fonction f dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(M(F))$ ou $\mathcal{S}(\tilde{M})$.

Revenons au cas du groupe métaplectique pour lequel l'hypothèse 5.19 est satisfaite. Soient $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$, $f \in C_{c,-}^\infty(\tilde{G})$. Définissons l'intégrale orbitale endoscopique par

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) := \sum_{\delta} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f)$$

où :

- les δ parcourent les classes de conjugaison dans $G(F)$ qui correspondent à γ ;
- $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$ est une image réciproque quelconque de δ , le choix n'affecte pas la définition car Δ est spécifique (le corollaire 5.12) et f est anti-spécifique.

Si F est archimédien, on peut aussi définir $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ pour $f \in \mathcal{S}(\tilde{G})$.

La conjecture de transfert. Soient $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$ et $\delta \in G_{\text{reg}}(F)$ qui se correspondent. D'après la description des commutants via paramètres dans §3.1, on a un isomorphisme entre F -tores $H_\gamma \xrightarrow{\sim} G_\delta$. On en déduit une correspondance entre les mesures de Haar sur $H_\gamma(F)$ et $G_\delta(F)$. Le résultat que nous établirons est le suivant.

THÉOREME 5.20 (Transfert d'intégrales orbitales). *Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $H(F)$. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, alors il existe $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ tel que*

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = J^{\text{st}}(\gamma, f^H)$$

pour tout $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$, où on utilise les mesures de Haar qui se correspondent sur les commutants. On dit que f^H est un transfert de f .

Si F est archimédien et $f \in \mathcal{S}(\tilde{G})$, alors on peut prendre $f^H \in \mathcal{S}(H(F))$ satisfaisant à l'égalité ci-dessus.

La fonction f^H n'est pas unique, mais ses intégrales orbitales stables sont caractérisées par f .

Le cas non ramifié : le lemme fondamental pour les unités de l'algèbre de Hecke.

HYPOTHÈSE 5.21. On fait les hypothèses ci-dessous.

- (i) F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et $|\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F| > 3$.
- (ii) p est assez grand par rapport à n . Une minoration possible de p est celle dans [Wal08, 4.4], appliquée aux groupes G et H .
- (iii) ψ est de conducteur \mathfrak{o}_F .

DÉFINITION 5.22. Soit M un F -groupe réductif non ramifié. On dit qu'une mesure de Haar sur $M(F)$ est non ramifiée si $\text{mes}(K) = 1$ pour tout sous-groupe hyperspécial K de M .

De telles mesures existent. Prenons un réseau autodual $L \subset W$ et notons $K = \text{Stab}_G(L)$ le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé. Fixons aussi un sous-groupe hyperspécial K_H de $H(F)$. Le lemme fondamental pour les unités concerne le transfert de la fonction anti-spécifique

$$f_K(\tilde{x}) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} & \text{si } \tilde{x} \in \varepsilon K, \varepsilon \in \text{Ker}(\mathfrak{p}), \\ 0 & \text{si } \tilde{x} \notin \mathfrak{p}^{-1}(K). \end{cases}$$

THÉOREME 5.23 (Le lemme fondamental pour les unités de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique). *Soit K_H un sous-groupe hyperspécial $H(F)$, alors $\mathbb{1}_{K_H}$ est un transfert de f_K si l'on utilise les mesures non ramifiées sur $G(F)$ et $H(F)$.*

La démonstration occupera les sections suivantes. Nous obtiendrons aussi des résultats plus forts sur le transfert pour le cas archimédien.

Remarques sur le choix de revêtements. Les seuls résultats qui fait intervenir l'hypothèse $8|\mathfrak{f}$ sont les suivants :

- la symétrie pour $\Delta'\Delta''$ (la proposition 5.16), qui fait intervenir l'élément $-1 \in \tilde{G}$;
- la descente parabolique § 5.4.

En particulier, on peut formuler la conjecture de transfert et le lemme fondamental pour chaque choix de \mathfrak{f} . Montrons qu'elles sont équivalentes. Soient $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}' \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et supposons que $\mathfrak{f}|\mathfrak{f}'$.

Posons $\tilde{G}' := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f}')} (W)$, $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})} (W)$. Alors $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}'$. Vu la remarque 5.8 et la spécificité de Δ , l'assertion suivante est claire.

PROPOSITION 5.24. *Les énoncés de transfert (cf. le théorème 5.20) pour \tilde{G} et \tilde{G}' sont équivalents. Idem pour le cas des fonctions de Schwartz dans le cas réel. Dans le cas non ramifié, les énoncés du lemme fondamental pour les unités (cf. le théorème 5.23) pour \tilde{G} et \tilde{G}' sont équivalents.*

6. Transfert : le cas archimédien

Les résultats ici sont valables pour le transfert des fonctions à support compact ainsi que les fonctions de Schwartz. Nous traitons principalement le premier cas et nous signalerons à la fin les modifications nécessaires pour les fonctions de Schwartz (la remarque 6.9). Puisque la restriction des scalaires ne s'applique pas au groupe métaplectique, il faut traiter le cas complexe séparément. Pour la plupart, nous occupons du cas $F = \mathbb{R}$; le cas $F = \mathbb{C}$ est beaucoup plus simple. Nous rajouterons quelques remarques à la fin.

D'après la proposition 5.24, il suffit d'établir le transfert pour $\mathbf{f} = 8$. Notons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ pour tout F -espace symplectique W .

6.1 L'endoscopie chez Renard

Posons $F = \mathbb{R}$ et $n' + n'' = n$. Soient W un F -espace symplectique de dimension $2n$ et $W = W' \oplus W''$, $\dim W' = 2n'$, $\dim W'' = 2n''$. À la paire (n', n'') et à un F -tore maximal T dans G est associé l'objet κ dans la proposition 5.13.

Afin de réconcilier avec le formalisme de [Ren99], posons

$$\begin{aligned} G &:= \mathrm{Sp}(W), \\ \tilde{G} &:= \widetilde{\mathrm{Sp}}(W), \\ G^\diamond &:= \mathrm{Sp}(W') \times \mathrm{Sp}(W''), \\ \tilde{G}^\diamond &:= \widetilde{\mathrm{Sp}}(W') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''), \\ p^\diamond &: \tilde{G}^\diamond \rightarrow G^\diamond, \\ \iota &: G^\diamond \hookrightarrow G, \\ j &: \tilde{G}^\diamond \rightarrow \tilde{G}. \end{aligned}$$

Dans [Ren99], Renard travaille avec les revêtements à deux feuillets et il considère le groupe $\mathrm{Im}(j)$ au lieu de \tilde{G}^\diamond . Mais peu importe.

DÉFINITION 6.1. On dit qu'une fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}^\diamond)$ est spécifique (respectivement anti-spécifique) si f est spécifique (respectivement anti-spécifique) en les deux coordonnées. L'espace de telles fonctions est noté par $C_{c,-}^\infty(\tilde{G}^\diamond)$ (respectivement $C_{c,-}^\infty(\tilde{G}^\diamond)$).

On dit qu'un élément $(\delta', \delta'') \in G^\diamond$ est G -régulier si $\iota(\delta', \delta'')$ est semi-simple régulier. L'ensemble des éléments G -réguliers est noté $G_{G\text{-reg}}^\diamond$, et son image réciproque $\tilde{G}_{G\text{-reg}}^\diamond$.

Nous utiliserons systématiquement l'application

$$\begin{aligned} \tau &: \tilde{G}^\diamond \rightarrow \tilde{G}^\diamond \\ &(\tilde{x}', \tilde{x}'') \mapsto (\tilde{x}', -\tilde{x}''), \end{aligned}$$

où $\tilde{x}'' \mapsto -\tilde{x}''$ est l'opération définie par la définition 2.8. On a $\tau^2 = \mathrm{id}$.

Conservons les conventions de [Ren99] pour les mesures et les intégrales orbitales. Identifions donc une intégrale orbitale sur \tilde{G} à une certaine fonction invariante $\phi \in C^\infty(\tilde{G}_{\text{reg}})$; la même convention s'applique à \tilde{G}° . Dans ce qui suit, nous ne considérons que les fonctions anti-spécifiques.

DÉFINITION 6.2. On dit qu'une fonction $\phi \in C^\infty(\tilde{G}_{\text{reg}})$ est une intégrale orbitale anti-spécifique si il existe $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ telle que $\phi = J_{\tilde{G}}(\cdot, f)$. L'espace des intégrales orbitales anti-spécifiques est notée $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$. De même, définissons l'espace $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G}^\circ)$.

En utilisant la notion de stabilité introduite en § 5.2, qui coïncide avec celle de [Ren99], nous définissons les espaces d'intégrales orbitales stables anti-spécifiques :

$$\mathcal{I}_{--}^{\text{st}}(\tilde{G}), \quad \mathcal{I}_{--}^{\text{st}}(\tilde{G}^\circ).$$

On dit qu'une fonction $\phi \in C^\infty(\tilde{G}_{\text{reg}})$ est une intégrale κ -orbitale anti-spécifique si $\tau^*\phi$ est une intégrale orbitale stable anti-spécifique. L'espace des intégrales κ -orbitales anti-spécifiques est noté $\mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^\circ)$.

Notre définition des intégrales κ -orbitales coïncide avec celle de Renard d'après [Ren99, § 3, p. 1226]. L'espace $\mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^\circ)$ est une limite inductive d'espaces de Fréchet.

La démonstration du transfert archimédien repose sur trois ingrédients : le transfert de \tilde{G} vers \tilde{G}° , le transfert de \tilde{G}° vers le groupe endoscopique H , et la comparaison des facteurs de transfert. La comparaison sera fait dans la sous-section suivante ; les deux théorèmes de transfert se trouvent dans [Ren98] et [Ren99], mais il faut les mettre sous une forme convenable.

THÉORÈME 6.3 (cf. [Ren99, 4.7]). *On sait définir un facteur de transfert*

$$\Delta_R : G_{G\text{-reg}}^\circ \rightarrow \mathbb{P}^2$$

de sorte qu'il existe une application linéaire continue

$$\begin{aligned} \text{Trans} : \mathcal{I}_{--}(\tilde{G}) &\rightarrow \mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^\circ) \\ \phi &\mapsto \phi^\circ \end{aligned}$$

définie de la façon suivante : ϕ° est déterminée sur le sous-ensemble dense $\tilde{G}_{G\text{-reg}}^\circ$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_0 &:= j(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}''), \\ \phi^\circ(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'') &= \Delta_R(\delta', \delta'') \sum_{\tilde{\delta} \in \mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta}_0)/\text{conj}} \langle \kappa, \text{inv}(\delta, \delta_0) \rangle \phi(\tilde{\delta}). \end{aligned}$$

Observons en passant que j identifie $\mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta}')/\text{conj} \times \mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta}'')/\text{conj}$ à $\mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta}_0)/\text{conj}$. Nous donnerons une expression explicite de Δ_R dans la section suivante.

Démonstration. Dans [Ren99], ce théorème est énoncé pour les revêtements à deux feuilletés, le groupe $\text{Im}(j)$ au lieu de \tilde{G}° et les intégrales orbitales spécifiques. Notre énoncé s'obtient en trois étapes.

- Le théorème [Ren99, 4.7] est valide si l'on remplace $\text{Im}(j)$ par \tilde{G}° . Ceci est clair.
- Il reste valide pour les intégrales orbitales anti-spécifiques ; ceci est trivial car les objets spécifiques et anti-spécifiques coïncident pour les revêtements à deux feuilletés.
- Finalement, on étend le théorème [Ren99, 4.7] à tout revêtement de $G(F)$. Cela se fait comme dans la proposition 5.24. □

THÉOREME 6.4 (cf. [Ren98, 6.7]). Posons $H := \mathrm{SO}(2n' + 1) \times \mathrm{SO}(2n'' + 1)$, alors on peut définir une application linéaire

$$\mathcal{T} : \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(\tilde{G}^\diamond) \longrightarrow \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(H(F))$$

caractérisée par

$$\mathcal{T}(\phi)(\gamma', \gamma'') = \Delta'(\tilde{\delta}')\Delta'(\tilde{\delta}'')\phi(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'')$$

où γ' et $\delta' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W')_{\mathrm{reg}}$ se correspondent par rapport à la donnée endoscopique $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W'), \mathrm{SO}(2n' + 1) \times \{1\})$, γ'' et $\delta'' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')_{\mathrm{reg}}$ se correspondent par rapport à $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W''), \mathrm{SO}(2n'' + 1) \times \{1\})$, et

$$\Delta' := \frac{\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-}{|\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-|}.$$

Démonstration. Cet énoncé est pour l'essentiel celui de Renard. L'énoncé dans [Ren98] ne concerne que le cas $n'' = 0$, mais on l'étend sans difficulté aux produits directs. On procède comme dans la démonstration du théorème 6.3 et obtient la version énoncée ci-dessus. \square

6.2 Comparaison de facteurs de transfert

Les tores maximaux dans G sont isomorphes à des tores 'standards' de la forme

$$T^{m,r,s} := (\mathbb{C}^\times)^m \times (\mathbb{S}^1)^r \times (\mathbb{R}^\times)^s, \quad 2m + r + s = n.$$

Cela décrit tous les tores maximaux dans G à conjugaison stable près. On utilise les coordonnées $z = (z_i)_{i=1}^m$, $w = (w_j)_{j=1}^r$, $a = (a_k)_{k=1}^s$ pour $T^{m,r,s}$. Soient $\hat{z}_i, \hat{w}_j, \hat{a}_k$ les caractères correspondants.

PROPOSITION 6.5. Soit $(\delta', \delta'') \in G^\diamond$ qui est G -régulier. Supposons que le tore maximal $T' \times T''$ contenant (δ', δ'') est de la forme $T^{m',r',s'} \times T^{m'',r'',s''}$. On paramètre (δ', δ'') par ses coordonnées $(z', w', a', z'', w'', a'')$. Alors

$$\Delta_R(\delta', \delta'') = \prod_{j', j''} \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(w'_{j'}) - \mathrm{Re}(w''_{j''})).$$

Démonstration. C'est essentiellement [Ren99, (4.8)] et les discussions qui suivent. \square

COROLLAIRE 6.6. Le facteur Δ_R est constant sur une classe de conjugaison stable.

PROPOSITION 6.7. On a $\Delta_0 = \Delta_R$.

Démonstration. Tous les deux facteurs Δ_R et Δ_0 satisfont à la descente parabolique de la proposition 5.18. Il suffit donc de les comparer sur tores de la forme $T^{m',r',0} \times T^{m'',r'',0}$. Soient $(K'/K'^\#, b', c')$ et $(K''/K''^\#, b'', c'')$ les paramètres de $\mathcal{O}(\delta')$ et $\mathcal{O}(\delta'')$, respectivement.

Calculons d'abord le polynôme $P_{b'}(T)(-T)^{-n'}$. On a

$$\begin{aligned} P_{b'}(T)(-T)^{-n'} &= \prod_i \frac{(T - z'_i)(T - z'^{-1}_i)(T - \overline{z'_i})(T - \overline{z'^{-1}_i})}{(-T)^2} \\ &\quad \cdot \prod_j \frac{T^2 - 2 \mathrm{Re}(w'_j) + 1}{-T} \\ &= \prod_i ((T + T^{-1}) - (z_i + z_i^{-1}))((T + T^{-1}) - \overline{(z'_i + z'^{-1}_i)}) \\ &\quad \cdot \prod_j (2 \mathrm{Re}(w'_j) - (T + T^{-1})). \end{aligned}$$

Les termes dans le produit sur i sont non négatifs si T est remplacé par un élément dans \mathbb{S}^1 . D'autre part,

$$\det(1 + \delta') = \prod_i (1 + z'_i)(1 + z'^{-1}_i)(1 + \bar{z}'_i)(1 + \bar{z}'^{-1}_i) \cdot \prod_j (1 + w'_j)(1 + \bar{w}'_j),$$

qui est un réel positif, d'où

$$\operatorname{sgn}(P_{b'}(w''_{j''})(-w''_{j''})^{-n'} \det(1 + \delta')) = \prod_{j'} \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(w'_{j'}) - \operatorname{Re}(w''_{j''})).$$

On conclut en le comparant avec la proposition 6.5. □

Conservons maintenant les notations de §5.1.

THÉORÈME 6.8. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, alors il existe $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ telle que pour tout $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G\text{-reg}}(F)$,

$$J_H^{\text{st}}(\gamma, f^H) = \sum_{\tilde{\delta}} \Delta(\epsilon, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f)$$

où la somme parcourt les classes de conjugaison des $\delta \in G(F)$ qui correspondent à γ et $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$ est une image réciproque quelconque de δ .

De plus, l'application linéaire $\phi \mapsto \phi_H$ de $\mathcal{I}(\tilde{G})$ dans $\mathcal{I}^{\text{st}}(H(F))$ induite par $f \mapsto f^H$ est continue.

Démonstration. Fixons $\tilde{\delta}_0$ tel que δ_0 et γ se correspondent. Prenons $(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0) \in \tilde{G}^\diamond$ comme dans §5.3, alors $j(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0) = \tilde{\delta}_0$. On peut supposer que les $\tilde{\delta}$ dans la somme parcourent $\mathcal{O}^{\text{st}}(\tilde{\delta}_0)/\text{conj}$. Posons $\phi := J_{\tilde{G}}(\cdot, f) \in \mathcal{I}(\tilde{G})$. D'après la proposition 5.13, le terme à droite vaut

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0) \Delta''(\tilde{\delta}''_0) \Delta_0(\delta'_0, \delta''_0) \sum_{\tilde{\delta}} \langle \kappa, \operatorname{inv}(\delta_0, \delta) \rangle \phi(\tilde{\delta}).$$

Or la proposition 6.7 et le théorème 6.3 entraînent qu'il est égal à

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0) \Delta''(\tilde{\delta}''_0) \phi^\diamond(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0),$$

ou

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0) \Delta'(-\tilde{\delta}''_0) \cdot (\tau^* \phi^\diamond)(\tilde{\delta}'_0, -\tilde{\delta}''_0).$$

Maintenant, $\tilde{\delta}'_0$ correspond à γ' pour la donnée endoscopique $(\widetilde{\text{Sp}}(W'), \text{SO}(2n' + 1) \times \{1\})$ et $-\tilde{\delta}''_0$ correspond à γ'' pour $(\widetilde{\text{Sp}}(W''), \text{SO}(2n'' + 1) \times \{1\})$. D'autre part $\tau^* \phi^\diamond \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\tilde{G}^\diamond)$. En appliquant le théorème 6.4, on voit que la fonction $\phi_H \in C^\infty(H_{G\text{-reg}}(F))$ définie par

$$\gamma \mapsto \Delta'(\tilde{\delta}'_0) \Delta'(-\tilde{\delta}''_0) \cdot (\tau^* \phi^\diamond)(\tilde{\delta}'_0, -\tilde{\delta}''_0)$$

appartient à $\mathcal{I}^{\text{st}}(H(F))$. Ceci démontre l'existence de f^H . L'application Trans du théorème 6.3 et l'application \mathcal{T} du théorème 6.4 sont continues, d'où l'assertion sur la continuité. □

Ce théorème établit le transfert le théorème 5.20 pour $F = \mathbb{R}$ et pour les fonctions à support compacts.

Remarque 6.9. On peut démontrer une variante du théorème ci-dessus où $f \in \mathcal{S}(\tilde{G})$ et $f^H \in \mathcal{S}(H)$. Il faut adapter nos arguments, ainsi que ceux de [Ren98, Ren99], aux intégrales orbitales

de fonctions de Schwartz. Des résultats de Harish-Chandra et Shelstad permettent de caractériser ces espaces. Par exemple, les conditions les plus subtiles (I_2^{st}) , (I_3^{κ}) dans [Ren99] ne changent pas pour les fonctions de Schwartz, donc les mêmes arguments marchent toujours.

Remarque 6.10. C'est aussi possible d'établir le transfert par la descente parabolique et la descente semi-simple, qui sera établie dans la section suivante. Il suffit de reprendre les arguments de [She08] et utiliser la caractérisation des intégrales orbitales énoncée dans [Ren99].

6.3 Le cas complexe

Supposons maintenant que $F = \mathbb{C}$. On confond les \mathbb{C} -groupes et leurs points complexes. Dans ce cas :

- $\tilde{G} = \mu_f \times G$, et $\Delta(\gamma, (t, \delta)) = t$ pour tout $t \in \mu_f$ et tous $\gamma \in H$, $\delta \in G$ qui se correspondent ;
- on peut identifier $C_c^\infty(\tilde{G})$ à $C_c^\infty(G)$ via $f \mapsto f(1, \cdot)$;
- la conjugaison se confond avec la conjugaison géométrique ;
- les tores maximaux sont conjugués ;
- les intégrales orbitales stables se confondent avec les intégrales orbitales.

On peut toujours définir les espaces vectoriels topologiques d'intégrales orbitales $\mathcal{I}(G)$ et $\mathcal{I}(H)$. L'existence de transfert est équivalente au théorème suivant.

THÉORÈME 6.11. *Soit $f \in C_c^\infty(G)$, alors il existe $f^H \in C_c^\infty(H)$ telle que pour tout $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G\text{-reg}}$,*

$$J_H(\gamma, f^H) = J_G(\delta, f)$$

pour tout δ qui correspond à γ .

De plus, l'application linéaire $\phi \mapsto \phi^H$ de $\mathcal{I}(G)$ dans $\mathcal{I}(H)$ induite par $f \mapsto f^H$ est continue.

Esquisse d'une démonstration. La caractérisation des intégrales orbitales se simplifie énormément pour les groupes complexes : il n'y a plus de 'conditions de sauts' (e.g. les conditions I_2^{st} et I_3^{κ} pour le groupe métaplectique réel). En effet, les singularités éventuelles sont associées aux racines ; localement elles forment des murs de codimension réelle 2. D'après un principe de Harish-Chandra, on peut outrepasser ces murs.

Fixons des tores maximaux $S \subset H$ et $T \subset G$. On sait qu'il existe un isomorphisme $S \xrightarrow{\sim} T$, équivariant par rapport au homomorphisme des groupes de Weyl $W^H \rightarrow W^G$. Les classes de conjugaison semi-simples dans G (respectivement H) sont paramétrées par T/W^G (respectivement S/W^H). Le transfert en découle immédiatement en appliquant la caractérisation des intégrales orbitales mentionnée précédemment. \square

Remarque 6.12. Comme le cas réel, il y a aussi une variante de ce théorème pour les fonctions de Schwartz.

7. Descente semi-simple du facteur de transfert

Fixons \mathbf{f} tel que $8|\mathbf{f}$. Les revêtements métaplectiques dans cette section désignent les revêtements à \mathbf{f} feuillets.

7.1 Le formalisme de descente

Fixons F un corps local, $(W, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un F -espace symplectique de dimension $2n$, $(n', n'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ tel que $n' + n'' = n$. On en déduit les objets suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{G} &:= \widetilde{\text{Sp}}(W), \\ G &:= \text{Sp}(W), \\ H' &:= \text{SO}(2n' + 1) \text{ déployé}, \\ H'' &:= \text{SO}(2n'' + 1) \text{ déployé}, \\ H &:= H' \times H''. \end{aligned}$$

Fixons $\epsilon = (\epsilon', \epsilon'') \in H(F)_{\text{ss}}$ et $\tilde{\eta} \in \tilde{G}$ tels que $\eta \in G(F)_{\text{ss}}$ et ϵ se correspondent. Pour simplifier la vie, supposons aussi que $\tilde{\eta} = \pm 1$ lorsque $\eta = \pm 1$ (où $-1 \in \tilde{G}$ est celui défini dans la définition 2.8). Écrivons les paramètres de leurs classes de conjugaison comme

$$\begin{aligned} \eta &\in \mathcal{O}(K/K^\#, v, (W_K, h_K), (W_\pm, \langle \cdot | \cdot \rangle_\pm)), \\ \epsilon' &\in \mathcal{O}(K'/K'^\#, v', (V'_K, h'_K), (V'_\pm, q'_\pm)), \\ \epsilon'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^\#, v'', (V''_K, h''_K), (V''_\pm, q''_\pm)), \end{aligned}$$

où h_K est anti-hermitienne et h'_K, h''_K sont hermitiennes.

La correspondance de classes exige que

$$\begin{aligned} (K/K^\#, v) &= (K'/K'^\#, v') \oplus (K''/K''^\#, -v''), \\ W_K &\simeq V'_{K'} \oplus V''_{K''} \text{ comme } K\text{-modules}, \\ \dim_F W_+ + 1 &= \dim_F V'_+ + \dim_F V''_-, \\ \dim_F W_- + 1 &= \dim_F V'_- + \dim_F V''_+. \end{aligned}$$

On décompose K en produit de F -algèbres à involution L pour lesquelles $L^\#$ sont des corps. Si l'on pose $u := v|_L$ alors $L = F(u)$. Adoptons la convention d'indexer l'ensemble des paires (L, u) par u . Idem pour K', K'' . Alors

$$\begin{aligned} (K/K^\#, \dots) &= \bigoplus_u (L/L^\#, u, (W_u, h_u)) \oplus (W_+, \langle \cdot | \cdot \rangle_+) \oplus (W_-, \langle \cdot | \cdot \rangle_-), \\ (K'/K'^\#, \dots) &= \bigoplus_u (L/L^\#, u, (V'_u, h'_u)) \oplus (V'_+, q'_+) \oplus (V'_-, q'_-), \\ (K''/K''^\#, \dots) &= \bigoplus_u (L/L^\#, -u, (V''_u, h''_u)) \oplus (V''_+, q''_+) \oplus (V''_-, q''_-), \end{aligned}$$

où :

- on permet que pour tout u , au plus l'un de V'_u et V''_u est trivial ;
- les paires (L, u) sont deux à deux inéquivalentes ;
- pour tout u , $W_u \simeq V'_u \oplus V''_u$ comme L -modules.

D'après § 3.1,

$$\begin{aligned} G_\eta &= \prod_u U(W_u, h_u) \times \text{Sp}(W_+) \times \text{Sp}(W_-), \\ H'_{\epsilon'} &= \prod_u U(V'_u, h'_u) \times \text{SO}(V'_+, q'_+) \times \text{SO}(V'_-, q'_-), \end{aligned}$$

$$H''_{\epsilon''} = \prod_u U(V''_u, h''_u) \times \text{SO}(V''_+, q''_+) \times \text{SO}(V''_-, q''_-),$$

$$H_\epsilon = H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}.$$

On note abusivement la restriction de η sur $U(W_u, h_u)$ par u , celle de ϵ' sur $U(V'_u, h'_u)$ par u' et celle de $-\epsilon''$ sur $U(V''_u, h''_u)$ par u'' .

Rappelons que $U(W_u, h_u) \simeq \text{GL}_{L^\#}(\frac{1}{2} \dim_{L^\#} W_u)$ si $L \simeq L^\# \times L^\#$. On a des immersions canoniques

$$U(W_u, h_u) \hookrightarrow \text{Sp}(W_u, \langle \cdot | \cdot \rangle_u),$$

$$U(V'_u, h'_u) \hookrightarrow \text{SO}(V'_u, (\text{tr}_{L/L^\#})_* h'_u),$$

$$U(V''_u, h''_u) \hookrightarrow \text{SO}(V''_u, (\text{tr}_{L/L^\#})_* h''_u),$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle_u := (\text{tr}_{L/L^\#})_* h_u$. Le résultat suivant est évident.

LEMME 7.1. *Si H_ϵ est quasi-déployé, alors $\text{SO}(V'_+, q'_+)$ et $\text{SO}(V''_+, q''_+)$ sont déployés.*

Soient

$$X = ((X_u)_u, X_+, X_-) \in \mathfrak{g}_\eta(F),$$

$$Y' = ((Y'_u)_u, Y'_+, Y'_-) \in \mathfrak{h}'_{\epsilon'}(F),$$

$$Y'' = ((Y''_u)_u, Y''_+, Y''_-) \in \mathfrak{h}''_{\epsilon''}(F),$$

$$Y = (Y', Y'') \in \mathfrak{h}_\epsilon(F).$$

HYPOTHÈSE 7.2. On suppose X, Y semi-simples réguliers et assez petits.

Supposons de plus que $\delta := \exp(X)\eta$ et $\gamma := \exp(Y)\epsilon$ se correspondent.

DÉFINITION 7.3. Soient $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ des algèbres de Lie de produits de restrictions des scalaires de groupes classiques. On dit que deux éléments $Z_i \in \mathfrak{m}_i$ ($i = 1, 2$) semi-simples assez réguliers sont en correspondance par valeurs propres s'ils admettent des paramètres de la forme

$$Z_i \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c_i)$$

pour $c_i \in K^\times$ convenables ($i = 1, 2$). On note cette relation par $Z_1 \overset{\text{VP}}{\longleftrightarrow} Z_2$.

LEMME 7.4. *Avec ces hypothèses, on a*

$$\forall u, \quad X_u \overset{\text{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_u, Y''_u),$$

$$X_+ \overset{\text{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_+, Y''_+),$$

$$X_- \overset{\text{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_-, Y''_-).$$

La correspondance ci-dessus fournit aussi des décompositions orthogonales $W_u = W'_u \oplus W''_u$ pour tout u et $W_\pm = W'_\pm \oplus W''_\pm$ selon les valeurs propres. Les éléments X_u, X_\pm se décomposent ainsi en

$$\forall u, \quad X_u = (X'_u, X''_u),$$

$$X_+ = (X'_+, X''_+),$$

$$X_- = (X'_-, X''_-),$$

tels que

$$\begin{aligned} \forall u, \quad X'_u &\xleftarrow{\text{VP}} Y'_u, \quad X''_u \xleftarrow{\text{VP}} Y''_u, \\ X'_+ &\xleftarrow{\text{VP}} Y'_+, \quad X''_+ \xleftarrow{\text{VP}} Y''_+, \\ X'_- &\xleftarrow{\text{VP}} Y'_-, \quad X''_- \xleftarrow{\text{VP}} Y''_-. \end{aligned}$$

Enfin, posons

$$\tilde{\delta} := \exp(X)\tilde{\eta}.$$

Pour tout u , prenons $\tilde{u} \in \widetilde{\text{Sp}}(W_u)$ au-dessus de u tel que l'image de $((\tilde{u})_u, 1, -1)$ par l'homomorphisme

$$\prod_u \widetilde{\text{Sp}}(W_u) \times \widetilde{\text{Sp}}(W_+) \times \widetilde{\text{Sp}}(W_-) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(W)$$

est $\tilde{\eta}$. C'est possible grâce à l'hypothèse que $\tilde{\eta} = \pm 1$ lorsque $\eta = \pm 1$. Ensuite, prenons $(\tilde{u}', \tilde{u}'') \in \widetilde{\text{Sp}}(W'_u) \times \widetilde{\text{Sp}}(W''_u)$ qui s'envoie sur $\tilde{u} \in \widetilde{\text{Sp}}(W_u)$. Posons $\tilde{\eta}'$ (respectivement $\tilde{\eta}''$) l'image de $((\tilde{u}')_u, 1, -1)$ (respectivement $((\tilde{u}'')_u, 1, -1)$) par

$$\begin{aligned} &\prod_u \widetilde{\text{Sp}}(W'_u) \times \widetilde{\text{Sp}}(W'_+) \times \widetilde{\text{Sp}}(W'_-) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(W') \\ &\left(\text{respectivement } \prod_u \widetilde{\text{Sp}}(W''_u) \times \widetilde{\text{Sp}}(W''_+) \times \widetilde{\text{Sp}}(W''_-) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(W'') \right). \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.5. *Par rapport à ces décompositions, le facteur Δ' satisfait à*

$$\Delta'(\exp(X')\tilde{\eta}') = \prod_u \Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}') \cdot \Delta'(\exp(X'_+))\Delta'(-\exp(X'_-)).$$

De même,

$$\Delta''(\exp(X'')\tilde{\eta}'') = \prod_u \Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') \cdot \Delta''(\exp(X''_+))\Delta''(-\exp(X''_-)).$$

Le produit $\Delta'\Delta''$ ne dépend pas de choix de $\tilde{\eta}', \tilde{\eta}''$ et \tilde{u}', \tilde{u}'' .

Cela résulte de la proposition 4.25. Il est sous-entendu que les termes Δ', Δ'' à droite sont pris par rapport à des espaces symplectiques convenables (e.g. W'_u, W''_u etc.). Autrement dit, $\Delta'\Delta''$ est 'additif' par rapport aux sommes directes de paramètres. Le comportement du terme Δ_0 est plus pénible à écrire : il est 'bi-additif'.

PROPOSITION 7.6. *Le facteur $\Delta_0(\exp(X')\eta', \exp(X'')\eta'')$ est produit des termes suivants*

$$\begin{aligned} &\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)), \\ &\Delta_0(-\exp(X'_-), -\exp(X''_-)), \\ &\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u), \\ &\prod_{u' \neq u''} \Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u''), \\ &\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_+)), \\ &\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, -\exp(X''_-)), \end{aligned}$$

$$\prod_u \Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_u)u),$$

$$\prod_u \Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_u)u),$$

$$\Delta_0(\exp(X'_+), -\exp(X''_-)),$$

$$\Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_+)).$$

Démonstration. D'une part, le caractère $\text{sgn}_{K''/K''\#}(\cdot)$ est additif par rapport aux sommes directes des paramètres $K''/K''\#$. D'autre part, si $K''/K''\#$ est fixé, alors

$$P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \quad \text{et} \quad \det(\delta' + 1)$$

sont tous additifs par rapport aux sommes directes de paramètres $(K'/K'\#, a')$. D'où l'assertion. □

On démontrera que seuls les trois premiers termes survivent après descente.

7.2 Le cas non ramifié

Afin d'établir le lemme fondamental, on aura besoin de considérer la version non ramifiée de la descente. Nous conservons la plupart du formalisme précédent et précisons les modifications ci-dessous.

Conservons l'hypothèse 5.21 ; en particulier, F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un réseau autodual $L \subset W$. Soit $K = \text{Stab}_G(L)$ le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé. Cela permet d'identifier K comme un sous-groupe de \tilde{G} .

HYPOTHÈSE 7.7. Supposons que :

- η et ϵ sont d'ordres finis premiers à p ;
- δ, γ sont des éléments compacts avec décompositions de Jordan topologiques

$$\delta = \exp(X)\eta,$$

$$\gamma = \exp(Y)\epsilon,$$

X, Y : topologiquement nilpotents ;

- δ, γ se correspondent ;
- $\eta \in K, \eta = \tilde{\eta}$;
- H_ϵ est non ramifié.

Dans ce cas, c'est loisible de supposer que $(V'_\pm, q'_\pm), (V''_\pm, q''_\pm), (V'_u, h'_u), (V''_u, h''_u), (W_u, h_u)$ admettent des réseaux autoduaux (voir [Wal08, 5.3]). La nilpotence topologique de X, Y dans le cas non ramifié remplace la condition précédente que X, Y soient assez petits.

On décompose G_η et H_ϵ comme dans la section précédente. Les éléments u sont d'ordre fini premier à p . En particulier, L est une extension non ramifiée ; lorsque $L \simeq L^\# \times L^\#$, cela signifie que L est une extension non ramifiée. On a aussi l'analogie suivant du lemme 7.4.

LEMME 7.8. Avec ces hypothèses, on a

$$\forall u, \quad X_u \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_u, Y''_u),$$

$$X_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_+, Y''_-),$$

$$X_- \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_-, Y''_+).$$

7.3 Énoncé de résultats

Sauf mention expresse du contraire, F est un corps local de caractéristique nulle. Conservons aussi les formalismes précédents. Pour simplifier la vie, introduisons des conventions.

Notation 7.9. On dit qu'une expression est une *bonne constante* si :

- elle ne dépend que de $\mathcal{O}^{\text{st}}(\epsilon)$ et $\mathcal{O}(\tilde{\eta})$;
- elle vaut 1 dans le cas non ramifié.

Soient a, b deux éléments inversibles dans une F -algèbre étale K . On dit que $a \approx b$ si

$$\sup_{\sigma \in \text{Hom}_{F\text{-alg}}(K, \bar{F})} \left| \sigma \left(\frac{a}{b} \right) - 1 \right|_{\bar{F}} \text{ est assez petit,}$$

où $|\cdot|_{\bar{F}}$ est l'unique valeur absolue sur \bar{F} qui prolonge $|\cdot|_F$. La borne exacte dépendra du contexte. Dans le cas non ramifié, on dit que $a \approx b$ si a/b est topologiquement unipotent.

THÉORÈME 7.10. *Posons*

$$\Delta^b(Y, X) := \Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\tilde{\eta}),$$

alors il existe une bonne constante c telle que

$$\Delta^b(Y, X) = c \prod_u \Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u) \cdot \Delta_+((Y'_+, Y''_-), X_+) \cdot \Delta_-((Y'_-, Y''_+), X_-).$$

Les termes Δ_u, Δ_{\pm} sont définis de la façon suivante. Avec la convention $\bullet \in \{+, -, u\}$, supposons que $X_{\bullet} \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c)$ et $(K'/K'^{\#}, a', c') \oplus (K''/K''^{\#}, a'', c'')$ est la décomposition correspondant à $X_{\bullet} = (X'_{\bullet}, X''_{\bullet})$. Définissons

$$\begin{aligned} \Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u) &:= \text{sgn}_{K''/K''^{\#}}(\gamma_u c''^{-1} \dot{P}_{X_u|L}(a'')) \text{ pour tout } u, \\ \Delta_+((Y'_+, Y''_-), X_+) &:= \text{sgn}_{K''/K''^{\#}}(c''^{-1} \dot{P}_{X_+}(a'')), \\ \Delta_-((Y'_-, Y''_+), X_-) &:= \text{sgn}_{K'/K'^{\#}}(c'^{-1} \dot{P}_{X_-}(a')), \end{aligned}$$

où $P_{X_{\pm}} \in F[T]$ est le polynôme caractéristique de $X_{\pm} \in \text{End}_F(W_{\pm})$ et $P_{X_u|L} \in L[T]$ est celui de $X_u \in \text{End}_L(W_u)$. Pour tout u , la constante $\gamma_u \in L^{\times}$ satisfait à $\tau(\gamma_u) = (-1)^{\dim_L W_u} \gamma_u$ et $\gamma_u \in \mathfrak{o}_L^{\times}$ dans le cas non ramifié.

Observons que $P_{X_u|L}$ est bien défini même si $L \simeq L^{\#} \times L^{\#}$; de plus, dans ce cas-là $\Delta_u = 1$.

Démonstration. Ce théorème s'obtient en multipliant les formules dans les propositions 7.18, 7.19, 7.20, 7.21 et 7.22 que nous démontrons. □

COROLLAIRE 7.11. *Pour tout $\lambda \in F^{\times}$, on a*

$$\Delta^b(Y, X) = \Delta^b(\lambda^2 Y, \lambda^2 X).$$

Cela nous permet de prolonger Δ^b en une fonction définie sur toute paire

$$(Y, X) \in (\mathfrak{h}_{\epsilon})_{G\text{-reg}}(F) \times (\mathfrak{g}_{\eta})_{\text{reg}}(F).$$

7.4 Des lemmes techniques

Les lemmes suivants seront les seuls ingrédients non-triviaux dans la démonstration du théorème 7.10. On établit d'abord une formule de réciprocity pour $\text{sgn}(\cdot)$. Commençons par une observation élémentaire. Soit z un élément dans une F -algèbre étale, P_z désigne toujours son polynôme minimal sur F .

LEMME 7.12. Fixons un corps L . Soient K une L -algèbre étale et $z \in K^\times$ tels que $K = F[z]$. Soient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\in \mathrm{PGL}(2, L), \quad cz + d \neq 0, \\ w &:= \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Soient $P_z \in L[T]$ le polynôme caractéristique de z et $P_w \in L[T]$ celui de w . Posons $m := \deg P_z = \deg P_w = \dim_F K$, alors

$$\begin{aligned} (cT + d)^m P_w\left(\frac{aT + b}{cT + d}\right) &= c^m P_w\left(\frac{a}{c}\right) P_z(T), \\ (ad - bc)(cz + d)^{m-2} \dot{P}_w(w) &= c^m P_w\left(\frac{a}{c}\right) \dot{P}_z(z). \end{aligned}$$

LEMME 7.13. Supposons qu'il y a une décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$, $n' := \frac{1}{2} \dim W'$, $n'' := \frac{1}{2} \dim W''$. Soit $X \in \mathfrak{sp}(W)$ semi-simple régulier tel que $X = (X', X'')$ où $X' \in \mathfrak{sp}(W')$ et $X'' \in \mathfrak{sp}(W'')$. Supposons que $X \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ et

$$(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$$

par rapport à la décomposition $X = (X', X'')$. Alors

$$\mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{X''}(a')) \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{X'}(a'')) = (-1, -1)_F^{n'n''} (\det X', \det X'')_F.$$

Démonstration (Waldspurger). Appliquons le théorème 4.16 à $X \in \mathfrak{sp}(W)$, $X' \in \mathfrak{sp}(W')$ et $X'' \in \mathfrak{sp}(W'')$. On voit que

$$\gamma_\psi(q[X]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1}) \gamma_\psi(\det X) \cdot \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(c^{-1} \dot{P}_X(a)), \tag{10}$$

$$\gamma_\psi(q[X']) = \gamma_\psi((-1)^{n'-1}) \gamma_\psi(\det X') \cdot \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(c'^{-1} \dot{P}_{X'}(a')), \tag{11}$$

$$\gamma_\psi(q[X'']) = \gamma_\psi((-1)^{n''-1}) \gamma_\psi(\det X'') \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(c''^{-1} \dot{P}_{X''}(a'')). \tag{12}$$

On a aussi $P_X = P_{X'} P_{X''}$ et $q[X] = q[X'] \oplus q[X'']$. En prenant (10) \div ((11) \times (12)), on obtient

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{X''}(a')) \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{X'}(a'')) \\ &= \frac{\gamma_\psi(\det X) \gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(\det X') \gamma_\psi(\det X'')} \cdot \frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1) \gamma_\psi((-1)^{n'-1}) \gamma_\psi((-1)^{n''-1})}. \end{aligned} \tag{13}$$

En discutant les parités de n' , n'' et en rappelant que $\gamma_\psi(-1) = \gamma_\psi(1)^{-1}$, on déduit

$$\frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1) \gamma_\psi((-1)^{n'-1}) \gamma_\psi((-1)^{n''-1})} = \begin{cases} \gamma_\psi(1)^{-4} & \text{si } n', n'' \text{ sont impairs,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le fait suivant [Wei64, § 25 prop. 3 et § 28 prop. 4] : pour tout $a, b \in F^\times$, on a

$$\frac{\gamma_\psi(ab) \gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(a) \gamma_\psi(b)} = (a, b)_F.$$

D'une part, en prenant $a = b = -1$, il en résulte que $\gamma_\psi(1)^4 = (-1, -1)_F = ((-1)^{n'n''}, -1)_F$ si n', n'' sont impairs ; en tout cas :

$$\frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1) \gamma_\psi((-1)^{n'-1}) \gamma_\psi((-1)^{n''-1})} = (-1, -1)_F^{n'n''}.$$

D'autre part, en prenant $a = \det X'$ et $b = \det X''$, il en résulte que

$$\frac{\gamma_\psi(\det X)\gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(\det X')\gamma_\psi(\det X'')} = (\det X', \det X'')_F.$$

Cela achève la démonstration. □

On en déduit une version au niveau du groupe à l'aide de la transformation de Cayley.

LEMME 7.14. *Soit $\delta \in \text{Sp}(W)_{\text{reg}}$ tel que $\delta = (\delta', \delta'')$ où $W = W' \oplus W''$, $\delta' \in \text{Sp}(W')$ et $\delta'' \in \text{Sp}(W'')$. Supposons que $\delta \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ et*

$$(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$$

par rapport à la décomposition $\delta = (\delta', \delta'')$. Alors

$$\begin{aligned} & \text{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a''}(a'')(-a'')^{-n''} \det(\delta'' - 1)) \cdot \text{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{a'}(a')(-a')^{-n'} \det(\delta' - 1)) \\ &= (-1, -1)_{F'}^{n'n''} \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1}, \det \frac{\delta'' + 1}{\delta'' - 1} \right)_F. \end{aligned} \tag{14}$$

Démonstration. Posons $z' = a' + 1/a' \in K'^\#$, $z'' = a'' + 1/a'' \in K''^\#$; posons d'autre part $b' = (z' + 2)/(z' - 2)$, et idem pour b'' . Alors le lemme 7.12 affirme que

$$P_{z'}(T)P_{b'}(1) = (T - 2)^{n'} P_{b'}\left(\frac{T + 2}{T - 2}\right),$$

et idem pour z'' et b'' , ce qui entraîne

$$P_{z'}(z'')P_{b'}(1) = (z'' - 2)^{n'} P_{b'}(b''), \tag{15}$$

$$P_{z''}(z')P_{b''}(1) = (z' - 2)^{n''} P_{b''}(b'). \tag{16}$$

On a $((a' + 1)/(a' - 1))^2 = b'$ (idem pour a'') ; on déduit du fait $\tau((a'' + 1)/(a'' - 1)) = -(a'' + 1)/(a'' - 1)$ (idem pour a') que $P_{(a''+1)/(a''-1)}(T) = P_{b''}(T^2)$, d'où

$$P_{b''}(b') = P_{(a''+1)/(a''-1)}\left(\frac{a' + 1}{a' - 1}\right),$$

et idem si l'on échange a' et a'' . Observons aussi que $P_{z'}(z'') = P_{a'}(a'')(a'')^{-n'}$ et $P_{z''}(z') = P_{a''}(a')(a')^{-n''}$. Assemblons toutes ces égalités dans (15), (16) et prenons $\text{sgn}_{K''/K''^\#}(\cdot)$, $\text{sgn}_{K'/K'^\#}(\cdot)$. Pour (15), cela donne

$$\text{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a'}(a'')(a'')^{-n'} P_{(a'+1)/(a'-1)}(1)) = \text{sgn}_{K''/K''^\#} \left((z'' - 2)^{n''} P_{(a'+1)/(a'-1)}\left(\frac{a'' + 1}{a'' - 1}\right) \right).$$

Or $z'' - 2 = -(1 - a'')(1 - 1/a'') \in (-1)N_{K''/K''^\#}(K''^\times)$ et $P_{(a'+1)/(a'-1)}(1) = (-2)^{2n'} \det(\delta' - 1)^{-1}$, d'où

$$\text{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a'}(a'')(a'')^{-n'} \det(\delta' - 1)) = \text{sgn}_{K''/K''^\#} \left(P_{(a'+1)/(a'-1)}\left(\frac{a'' + 1}{a'' - 1}\right) \right).$$

Appliquons le même argument à (16) et multiplions les formules qui en résultent. Une application du lemme 7.13 donne le résultat cherché. □

Considérons maintenant une situation différente. On aura besoin de deux lemmes concernant les classes de conjugaison semi-simples de groupes orthogonaux pairs.

LEMME 7.15. Soit (V, q) un F -espace quadratique de dimension paire. Soit $K/K^\#$ une F -algèbre étale à involution. Soit $t \in F^\times$. S'il existe $a, c \in K^\#$ tels que $\tau(a) = -a$, $\tau(c) = c$ et $\mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ existe dans $\mathrm{SO}(V, q)$, alors

$$\mathrm{sgn}_{K/K^\#}(t) = (t, (-1)^{(\dim_F V)/2} \det q)_F.$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ existe dans $\mathrm{SO}(V, q)$, alors

$$\begin{aligned} (V, q) &\simeq (K, (\mathrm{tr}_{K/F})_*(cN_{K/K^\#}(\cdot))), \\ (V, tq) &\simeq (K, (\mathrm{tr}_{K/F})_*(tcN_{K/K^\#}(\cdot))), \end{aligned}$$

où $N_{K/K^\#}$ est la (K, τ_K) -forme hermitienne $w \mapsto N_{K/K^\#}(w)$.

On a $\gamma_\psi(tq)/\gamma_\psi(q) = \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(t)$ d'après le lemme 4.13. D'autre part la formule de γ_ψ en termes du déterminant et de l'invariant de Hasse $s(\cdot)$ (voir [LP81, 1.3.4]) entraîne

$$\frac{\gamma_\psi(tq)}{\gamma_\psi(q)} = s(tq) \cdot s(q)$$

car $\dim_F V$ est paire. D'après [Lam05, 3.16, 3.20], on a $s(tq)s(q) = (t, (-1)^{(\dim_F V)/2} \det q)_F$, ce qui fallait démontrer. □

LEMME 7.16. Soit (V, q) un F -espace quadratique de dimension paire. Si $Y \in \mathfrak{so}(V, q)$ est inversible, alors $\det Y \in \det q \cdot F^{\times 2}$.

Démonstration. Fixons une base de V de sorte que $q = \langle a_1, \dots, a_{2m} \rangle$ et regardons Y comme une matrice. Soit Q la matrice diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{2m})$, alors $Y \in \mathfrak{so}(V, q)$ équivaut à ce que YQ soit une matrice anti-symétrique. Notons $\mathrm{Pf}(YQ) \in F^\times$ son pfaffien, alors

$$\det Y = \det YQ \cdot (\det Q)^{-1} = \mathrm{Pf}(YQ)^2 \cdot (\det Q)^{-1}.$$

Or $\det Q = a_1 \cdots a_{2m} = \det q$, d'où l'assertion. □

Établissons maintenant la réciprocity du facteur Δ_0 .

COROLLAIRE 7.17. Sous les hypothèses du lemme 7.14, on a

$$\Delta_0(\delta', \delta'') = \Delta_0(-\delta'', -\delta'),$$

où $\Delta_0(-\delta'', -\delta')$ est défini par rapport au groupe endoscopique transposé $H'' \times H'$.

Démonstration. D'après le lemme 7.14, on a

$$\begin{aligned} \Delta_0(\delta', \delta'')\Delta_0(-\delta'', -\delta') &= \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#} \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1} \right) \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#} ((-1)^{n''}) \\ &\quad \cdot (-1, -1)_{F'}^{n''} \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1}, \det \frac{\delta'' + 1}{\delta'' - 1} \right)_F. \end{aligned}$$

La classe de conjugaison contenant $(\delta' + 1)/(\delta' - 1) \in \mathfrak{sp}(W')$ est paramétrée par $(K'/K'^\#, (a' + 1)/(a' - 1), c')$; prenons q' la F -forme quadratique sur K' définie par $(\mathrm{tr}_{K'/F})_*(c'N_{K'/K'^\#}(\cdot))$. Il existe $c'_0 \in K'^{\times}$ et $Y' \in \mathfrak{so}(K', q')$ tels que $\mathcal{O}(Y')$ est paramétré par $(K'/K'^\#, (a' + 1)/(a' - 1), c'_0)$. Appliquons la même construction à a'' pour obtenir une F -forme quadratique q'' sur K'' . Par le lemme 7.15, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#} \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1} \right) &= \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1}, (-1)^{n''} \det q'' \right)_F, \\ \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#} ((-1)^{n''}) &= ((-1)^{n''}, (-1)^{n'} \det q')_F. \end{aligned}$$

Par le lemme 7.16, appliqué à $Y' \in \mathfrak{so}(K', q')$ et $Y'' \in \mathfrak{so}(K'', q'')$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}_{K''/K''\#} \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1} \right) &= \left(\det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1}, (-1)^{n''} \det \frac{\delta'' - 1}{\delta'' + 1} \right)_F, \\ \operatorname{sgn}_{K'/K'\#} ((-1)^{n''}) &= \left((-1)^{n''}, (-1)^{n'} \det \frac{\delta' + 1}{\delta' - 1} \right)_F. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta_0(\delta', \delta'')\Delta_0(-\delta'', -\delta') = (-1, -1)_{F'}^{n''} ((-1)^{n'}, (-1)^{n''})_F = 1$. Cela achève la démonstration. \square

7.5 Descente des termes Δ', Δ''

PROPOSITION 7.18. *Supposons que $X_+ \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$, soient $X_+ = (X'_+, X''_+)$ et*

$$(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''\#, a'', c'')$$

la décomposition de paramètres correspondante. Il existe alors une bonne constante c_+ telle que

$$\Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) = c_+ \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(c''^{-1}\dot{P}_{X''_+}(a'')).$$

PROPOSITION 7.19. *Supposons que $X_- \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$, $X_- = (X'_-, X''_-)$ et $(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''\#, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante.*

Il existe alors une bonne constante c_- telle que

$$\Delta'(-\exp(X'_-))\Delta''(-\exp(X''_-)) = c_- \operatorname{sgn}_{K'/K'^\#}(c'^{-1}\dot{P}_{X'_-}(a')).$$

Les assertions des propositions 7.18 et 7.19 sont équivalentes. En effet, d'après la proposition 4.9,

$$\begin{aligned} \Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) &= \Delta'(-\exp(X''_+))\Delta''(-\exp(X'_+)), \\ \Delta'(-\exp(X'_-))\Delta''(-\exp(X''_-)) &= \Delta'(\exp(X''_-))\Delta''(\exp(X'_-)). \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit d'établir la proposition 7.18.

Démonstration (de la proposition 7.18). On a $\Delta'(\exp(X'_+)) = 1$ par la proposition 4.9, le corollaire 4.6 et la lissité de Θ_ψ ; dans le cas non ramifié, on utilise la proposition 4.21. D'après le corollaire 4.24, il existe une bonne constante c telle que

$$\Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) = c \cdot \gamma_\psi(q[X''_+]).$$

Vu le théorème 4.16, on a

$$\gamma_\psi(q[X''_+]) = \gamma_\psi((-1)^{n''-1})\gamma_\psi(\det X''_+) \cdot \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(c''^{-1}\dot{P}_{X''_+}(a'')).$$

Le terme $\gamma_\psi((-1)^{n''-1})$ étant une bonne constante, il suffit de montrer que $\gamma_\psi(\det X''_+)$ l'est aussi. Rappelons que $X''_+ \xrightarrow{\text{VP}} Y''_-$ et $Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$, V''_- est de dimension paire. D'où $\gamma_\psi(\det X''_+) = \gamma_\psi(\det q''_-)$ par le lemme 7.16, qui est une bonne constante car $\det q''_- \in \mathfrak{o}_F^\times$ dans le cas non ramifié. \square

PROPOSITION 7.20. *Fixons la donnée u et posons $L = F[u]$. Supposons que $X_u \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$, soient $X_u = (X'_u, X''_u)$ et $(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''\#, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante.*

Il existe alors une bonne constante c_u et une constante $\alpha_u \in L^\times$, $\alpha_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié, $\tau(\alpha_u) = (-1)^{\dim_L W_u''} \alpha_u$, telles que

$$\Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}')\Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') = c_u \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(\alpha_u c''^{-1} \dot{P}_{X''_u|L}(a'')).$$

Démonstration. D'après la proposition 5.11,

$$\Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}')\Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') = \Delta'(\exp(X_u)\tilde{u})\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]).$$

Puisque $\det(u^2 - 1) \neq 0$, le terme $\Delta'(\exp(X_u)\tilde{u}) = \Delta'(\tilde{u})$ est une bonne constante d'après la proposition 4.9 ; dans le cas non ramifié, il faut aussi la proposition 4.21. Il reste à traiter $\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}])$.

On a $K'' = K''\# \otimes_{L\#} L$. Si $L \simeq L^\# \times L^\#$, alors la forme $q[C_{\exp(X''_u)u''}]$ est hyperbolique, donc $\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = 1$. D'autre part $\operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(\cdot) = 1$ dans ce cas-là et la proposition est prouvée. Supposons désormais que L est un corps. Fixons un plongement $L \hookrightarrow \bar{F}$; la formule finale sera indépendante du plongement.

Posons

$$\begin{aligned} m'' &:= \dim_L W''_u, \\ A'' &:= \exp(a''), \\ C'' &:= \frac{uA'' - 1}{uA'' + 1}. \end{aligned}$$

On voit que $A'' \approx 1$ et $C'' \approx (u - 1)/(u + 1) \neq 0$. Grâce au théorème 4.16,

$$\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = \gamma_\psi((-1)^{[L:F]m''-1})\gamma_\psi(N_{K''/F}(2C'')) \cdot \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(c''^{-1} \dot{P}_{2C''}(2C'')). \quad (17)$$

Le terme $\gamma_\psi((-1)^{[L:F]m''-1})$ est une bonne constante, le terme $\gamma_\psi(N_{K''/F}(2C''))$ est égal à

$$\gamma_\psi\left(N_{K''/F}\left(2 \cdot \frac{u - 1}{u + 1}\right)\right) = \gamma_\psi\left(\det_F(2(u + 1)(u - 1)^{-1}|W''_u)\right),$$

ce qui est aussi une bonne constante. Il reste donc à traiter le terme $\operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(\dots)$.

Enfin, $\operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(c''^{-1} \dot{P}_{2C''}(2C'')) = \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(2c''^{-1} \dot{P}_{C''}(C''))$. Posons

$$\Sigma_{L/F} := \operatorname{Hom}_{F\text{-alg}}(L, \bar{F})$$

et posons $\sigma_0 \in \Sigma_{L/F}$ l'unique élément fixant u .

Observons que

$$P_{C''} = \prod_{\sigma \in \Sigma_{L/F}} P_{C''|L}^\sigma$$

où la notation $P_{\bullet|L}$ signifie le polynôme caractéristique de \bullet sur L , l'action de $\Sigma_{L/F}$ sur $L[T]$ provient de l'action sur les coefficients. On a aussi $\deg P_{C''|L} = m''$. Il en résulte que

$$\dot{P}_{C''}(C'') = \dot{P}_{C''|L}(C'') \cdot \prod_{\substack{\sigma \in \Sigma_{L/F} \\ \sigma \neq \sigma_0}} P_{C''|L}^\sigma(C'') = k_u \dot{P}_{C''|L}(C''), \quad (18)$$

où $k_u \in L^\times$ est une constante ; $k_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

D'après le lemme 7.12, on a

$$2u(uA'' + 1)^{m''-2} \dot{P}_{C''|L}(C'') = u^{m''} P_{C''|L}(1) \dot{P}_{A''|L}(A''),$$

d'où

$$\begin{aligned} \dot{P}_{C''|L}(C'') &= \frac{1}{2}u^{m''-1}(uA'' + 1)^{2-m''} P_{C''|L}(1)\dot{P}_{A''|L}(A'') \\ &\approx \frac{1}{2}u^{m''-1}(u + 1)^{2-m''} \det_L(1 - (u - 1)(u + 1)^{-1}|W''_u)\dot{P}_{A''|L}(A'') \\ &\approx h_u \dot{P}_{a''|L}(a''), \end{aligned} \tag{19}$$

où $h_u \in L^\times$ est une constante ; $h_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

En combinant (17)–(19), on voit qu'il existe une bonne constante c_u et une constante $\alpha_u \in L^\times$, $\alpha_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié, telles que

$$\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = c_u \cdot \text{sgn}_{K''/K''\#}(\alpha_u c''^{-1} \dot{P}_{a''|L}(a'')).$$

Pour que le terme dans $\text{sgn}_{K''/K''\#}$ appartienne à $K''\#$, il faut que $\tau(\alpha_u) \in (-1)^{m''} \alpha_u$. Cela achève la démonstration. \square

7.6 Descente du terme Δ_0

Nous considérons d'abord les trois premiers termes des dix termes dans la proposition 7.6.

PROPOSITION 7.21. Soit $\bullet \in \{+, -, u\}$. Supposons que

$$\begin{aligned} X'_\bullet &\in \mathcal{O}(K'/K'\#, a', c'), \\ X''_\bullet &\in \mathcal{O}(K''/K''\#, a'', c''); \end{aligned}$$

alors il existe des bonnes constantes d_\bullet telles que :

- (i) $\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)) = d_+ \cdot \text{sgn}_{K''/K''\#}(P_{X'_+}(a''))$;
- (ii) $\Delta_0(-\exp(X'_-), -\exp(X''_-)) = d_- \cdot \text{sgn}_{K''/K''\#}(P_{X''_-}(a'))$;
- (iii) $\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) = d_u \cdot \text{sgn}(\beta_u P_{X'_u|L}(a''))$, où $P_{X'_u|L}$ est le polynôme caractéristique de X'_u sur L , et $\beta_u \in L^\times$ est une constante, $\tau(\beta_u) = (-1)^{\dim L} W''_u \beta_u$; $\beta_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

Dans les démonstrations ci-dessous, nous donnerons des formes explicites pour d_+ , d_- , d_u et β_u . Vu le corollaire 7.17, il suffit d'établir le cas $\bullet = +$ et $\bullet = u$.

Démonstration pour $\bullet = +$. Posons

$$\begin{aligned} m' &:= \frac{1}{2} \dim_F W'_+, \\ m'' &:= \frac{1}{2} \dim_F W''_+, \\ A' &:= \exp(a'), \\ A'' &:= \exp(a''). \end{aligned}$$

Vu la définition de Δ_0 , on a

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)) &= \text{sgn}_{K''/K''\#}(P_{A'}(A'')(-A'')^{-m'} 2^{2m'}) \\ &= \text{sgn}_{K''/K''\#}(-1)^{m'} \text{sgn}_{K''/K''\#}(P_{a'}(a'')), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait $P_{A'}(A'') \approx P_{a'}(a'')$.

Montrons que $\text{sgn}_{K''/K''\#}(-1)$ est une bonne constante. Il y a une correspondance $X''_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$. D'après le lemme 7.15,

$$\text{sgn}_{K''/K''\#}(-1) = (-1, (-1)^{m''} \det q''_-)_F.$$

Prenons $d_+ = ((-1)^{m'}, (-1)^{m''} \det q''_-)_F$, c'est une bonne constante. \square

Démonstration pour $\bullet = u$. La démonstration est analogue à celle de Δ', Δ'' . Si $L = F[u] \simeq L^\# \times L^\#$, alors les deux côtés valent 1 et on peut prendre $d_u = 1, \beta_u$ quelconque. Supposons désormais que L est un corps et fixons un plongement $L \hookrightarrow \bar{F}$.

Posons

$$\begin{aligned} m' &:= \dim_L W'_u, \\ m'' &:= \dim_L W''_u, \\ A' &:= \exp(a'), \\ A'' &:= \exp(a''), \\ \Sigma_{L/K} &:= \text{Hom}_{F\text{-alg}}(L, \bar{F}). \end{aligned}$$

Regardons L comme un sous-corps de \bar{F} . Notons $\sigma_0 \in \Sigma_{L/K}$ l'unique élément fixant u , alors

$$P_{\exp(X'_u)u} = P_{A'u} = \prod_{\sigma \in \Sigma_{L/K}} P_{A'u|L}^\sigma,$$

où $P_{A'u|L}$ est le polynôme caractéristique de $A'u$ sur L , on a $\deg P_{A'u|L} = m'$.

Si $\sigma \in \Sigma_{L/F}, \sigma \neq \sigma_0$, alors

$$P_{A'u|L}^\sigma(uA'') \approx (u - \sigma(u))^{m'} \neq 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} P_{A'u|L}^{\sigma_0}(uA'') &= P_{A'u|L}(uA'') \approx u^{m'} P_{A'|L}(A'') \\ &\approx u^{m'} P_{a'|L}(a''). \end{aligned}$$

Posons

$$\delta(u) := \prod_{\substack{\sigma \in \Sigma_{L/F} \\ \sigma \neq \sigma_0}} (u - \sigma(u)) \in L^\times.$$

On vérifie que

$$\beta_u := ((-u)^{-[L:F]} \delta(u))^{m'} \in L^\times$$

satisfait à $\tau(\beta_u) = (-1)^{m'} \beta_u$; il en est de même pour $P_{X'_u|L}(a'')$. On a aussi $\beta_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié. D'où

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) &= \text{sgn}_{K''/K''\#} \left(\beta_u P_{X'_u|L}(a'') \det_F(u + 1|W'_u) \right) \\ &= \text{sgn}_{K''/K''\#}(\beta_u P_{X'_u|L}(a'')) \text{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)). \end{aligned}$$

Soit q''_u la F -forme quadratique sur K'' définie par $(\text{tr}_{L/F})_*(h''_u)$. Il y a une correspondance $X''_u \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_u \in \mathfrak{u}(V''_u, h''_u)$, donc

$$\text{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)) = (N_{L/F}(u + 1), (-1)^{m''[L^\#:F]} \det q''_u)_F$$

d'après le lemme 7.15 ; notons-le d_u . C'est une bonne constante et on arrive à

$$\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) = d_u \cdot \text{sgn}_{K''/K''\#}(\beta_u P_{X'_u|L}(a'')).$$

Remarquons que les définitions de d_u, β_u ont aussi un sens dans le cas $L = L^\# \times L^\#$. □

Traitons maintenant les sept autres termes dans la proposition 7.6.

PROPOSITION 7.22. Il existe des bonnes constantes $c_{u',u''}$ (pour tous $u' \neq u''$), $c_{u,+}$, $c_{u,-}$, $c_{+,u}$, $c_{-,u}$, $c_{+,-}$, $c_{-,+}$ telles que

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u'') &= c_{u',u''}, \\ \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_+) &= c_{u,+}, \\ \Delta_0(\exp(X'_u)u, -\exp(X''_-) &= c_{u,-}, \\ \Delta_0(\exp(X'_+) &= c_{+,u}, \\ \Delta_0(-\exp(X'_-) &= c_{-,u}, \\ \Delta_0(\exp(X'_+) &= c_{+,-}, \\ \Delta_0(-\exp(X'_-) &= c_{-,+}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout $\bullet \in \{u', u'', +, -\}$, on suppose que $X'_\bullet \in \mathcal{O}(K'/K'^\#, a', c')$ et $X''_\bullet \in \mathcal{O}(K''/K''^\#, a'', c'')$. Vu le corollaire 7.17, il suffit d'établir les cas (u', u'') , $(u, +)$, $(+, u)$ et $(+, -)$.

Le cas (u', u'') . Posons

$$\begin{aligned} m' &:= \frac{1}{2} \dim_F W'_{u'}, \\ m'' &:= \frac{1}{2} \dim_F W''_{u''}, \\ L'' &:= F[u'']. \end{aligned}$$

Alors

$$P_{\exp(a')u'}(\exp(a'')u'')(-\exp(a'')u'')^{-m''} \approx P_{u'}(u'')(-u'')^{-m''},$$

où $P_{u'}$ est le polynôme caractéristique de $u' \in \text{End}_F(W'_{u'})$. On vérifie que $P_{u'}(u'')(-u'')^{-m''} \in L^{\#\times}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u'') &= \text{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{u'}(u'')(-u'')^{-m''}) \\ &\quad \cdot \text{sgn}_{K''/K''^\#} \left(\det_F(u' + 1|W'_{u'}) \right). \end{aligned}$$

Soit $q'' := (\text{tr}_{L''/L''^\#})_*(h''_{u''})$. Il y a une correspondance $X''_{u''} \xrightarrow{\text{VP}} Y''_{u''} \in \mathfrak{so}(V''_{u''}, q'')$. On déduit par le lemme 7.15 que

$$\begin{aligned} \text{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{u'}(u'')(-u'')^{-m''}) &= (P_{u'}(u'')(-u'')^{-m''}, (-1)^{m''/[L''^\#:F]} \det q'')_{L''^\#} \\ &=: c_1. \end{aligned}$$

Toujours par le lemme 7.15, on a aussi

$$\begin{aligned} \text{sgn}_{K''/K''^\#} \left(\det_F(u' + 1|W'_{u'}) \right) &= \left(\det_F(u' + 1|W'_{u'}), (-1)^{m''} \det((\text{tr}_{L''^\#/F})_*q'') \right)_F \\ &= (N_{L'/F}(u' + 1), (-1)^{m''} \det((\text{tr}_{L''^\#/F})_*q''))_F \\ &=: c_2. \end{aligned}$$

Prenons $c_{u',u''} := c_1 c_2$, c'est une bonne constante car c_1 et c_2 le sont.

Le cas $(\mathbf{u}, +)$. Posons $m' := \frac{1}{2} \dim_F W'_u$, $m'' := \frac{1}{2} \dim_F W''_+$. On a $P_{\exp(a')u}(\exp(a'')) \approx P_u(1) \in F^\times$. D'où

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_u)u, X''_+) &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_u(1)(-1)^{-m'}) \operatorname{sgn}_{K''/K''\#} \left(\det_F(u + 1|W'_u) \right) \\ &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_u(1)(-1)^{-m'}) \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)) \\ &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#} \left(\det_F(1 - u|W'_u)(-1)^{-m'} \right) \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)). \end{aligned}$$

Il y a une correspondance $X''_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$. On déduit par le lemme 7.15 que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}_{K''/K''\#} \left(\det_F(1 - u|W'_u)(-1)^{-m'} \right) &= \left(\det_F(1 - u|W'_u)(-1)^{-m'}, (-1)^{m''} \det q''_- \right)_F \\ &=: c_1, \end{aligned}$$

qui est une bonne constante.

De même, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)) &= (N_{L/F}(u + 1), (-1)^{m''} \det q''_-)_F \\ &=: c_2, \end{aligned}$$

c'est aussi une bonne constante. Prenons $c_{u,+} := c_1 c_2$.

Le cas $(+, \mathbf{u})$. Posons

$$\begin{aligned} m' &:= \frac{1}{2} \dim_F W'_+, \\ m'' &:= \frac{1}{2} \dim_F W''_u, \\ L &:= F[u]. \end{aligned}$$

Comme dans le cas $(u, +)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_u)u) &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'} 2^{2m'}) \\ &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'}), \end{aligned}$$

où $P_1(T) = (T - 1)^{2m'}$ est le polynôme caractéristique de $1 \in \operatorname{End}_F(W'_+)$.

Soit $q'' := (\operatorname{tr}_{L''/L''\#})_*(h''_{u''})$. Comme dans le cas (u', u'') , on conclut par le lemme 7.15 que

$$\operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'}) = ((u - 1)^{2m'} (-u)^{-m'}, (-1)^{m''/[L:F]} \det q''_{L\#}).$$

Prenons-le comme la bonne constante $c_{+,u}$.

Le cas $(+, -)$. Posons $m' := \frac{1}{2} \dim_F W'_+$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_0(\exp(X'_+), -\exp(X''_-)) &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(-1)2^{2m'}) \\ &= \operatorname{sgn}_{K''/K''\#}((-2) \cdot 2)^{2m'} = 1. \end{aligned}$$

Prenons donc $c_{+,-} = 1$. □

7.7 Comparaison avec les facteurs de transfert des groupes classiques

Supposons F non archimédien. Les facteurs de transfert pour les algèbres de Lie des groupes classiques quasi-déployés sont décrits dans [Wal01, chapitre X]. Comme dans [Wal01], la correspondance de points est la correspondance par valeurs propres.

Relions maintenant le théorème 7.10 et les facteurs de transfert pour les groupes classiques.

THÉOREME 7.23. *Supposons que H_ϵ est quasi-déployé. Les facteurs dans le théorème 7.10 satisfont à :*

- (i) *pour tout u , $\Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $U(V'_u, h'_u) \times U(V''_u, h''_u)$ de $U(W_u, h_u)$;*
- (ii) *$\Delta_+((Y'_+, Y''_+), X_+)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{Sp}(W'_+) \times \mathrm{SO}(V''_+, q''_+)$ de $\mathrm{Sp}(W_+)$ évalué en $((X'_+, Y''_+), X_+)$;*
- (iii) *$\Delta_-((Y'_-, Y''_-), X_-)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{SO}(V'_-, q'_-)$ \times $\mathrm{Sp}(W''_-)$ de $\mathrm{Sp}(W_-)$ évalué en $((Y'_-, X''_-), X_-)$.*

De plus, ce sont les facteurs de transfert normalisés au sens de [Wal08, § 4.7] dans le cas non ramifié.

Démonstration. Prenons garde (cf. la remarque 3.4) que notre paramétrage de classes de conjugaison est différent que celui de [Wal01] (cf. la remarque 3.4). Il faut aussi les observations ci-dessous.

- Il s’agira de groupes classiques sur les corps $L := F[u]$. Cela ne gêne pas car le formalisme de l’endoscopie est compatible avec la restriction des scalaires.
- Nos formes (W_u, h_u) sont anti-hermitiennes, pourtant celles de [Wal01] sont hermitiennes ; cela n’affecte pas le groupe unitaire, mais cela change le choix de paramètres ($\tau(c) = -c$ au lieu de $\tau(c) = c$) et la description de formes dans [Wal01, X.3].
- Afin d’étendre les formules pour le facteur de transfert de [Wal01] aux groupes classiques non quasi-déployés, on adapte [LS87, (4.2)] à l’algèbre de Lie. Soit M un groupe unitaire ou orthogonal sur F , fixons une forme intérieure quasi-déployée M^* et un toreur intérieur $\psi : M \times_F \bar{F} \xrightarrow{\sim} M^* \times_F \bar{F}$. Il faut calculer un invariant défini comme dans [LS87, (3.4)], avec des notations évidentes :

$$\mathrm{inv} \left(\frac{Y, X}{Y', X'} \right).$$

Pour des tels groupes, on peut choisir (M^*, ψ) dont la classe de cohomologie provient de $H^1(F, M)$ au lieu de $H^1(F, M_{\mathrm{ad}})$. Cela permet d’éviter les constructions de doublements de [LS87]. Un calcul explicite analogue à celui dans [Wal01, X] permet de conclure.

- Les cas où $\mathrm{SO}(V'_-, q'_-)$ ou $\mathrm{SO}(V''_+, q''_+)$ est isomorphe à \mathbb{G}_m sont exclus dans [Wal01] car ils rendent l’endoscopie non elliptique ; pour la même raison, on ne considère pas le cas $L \simeq L^\# \times L^\#$ (qui revient à l’endoscopie pour GL). Or les formules de Waldspurger restent valables dans ces cas-là : elles valent la constante 1, et il en est de même pour nos formules.
- A cause de notre définition d’intégrales orbitales, nous avons supprimé le facteur Δ_{IV} dans le facteur de transfert de [Wal01].

Après des modifications, l’identification de Δ_\pm résultent immédiatement. Quant à Δ_u , il suffit de considérer le cas où $L = F[u]$ est un corps et $U(W_u, h_u)$ est quasi-déployé. Posons $d := \dim_L W_u$, on peut choisir $\gamma \in L^\times$ et une base de $\{e_j : 1 \leq j \leq d\}$ de W_u , de sorte que

$$\tau(\gamma) = (-1)^d \gamma, \quad h_u(e_j, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j + k \neq d + 1, \\ 2\gamma(-1)^{j+1} & \text{si } j + k = d + 1. \end{cases}$$

On peut prendre $\gamma \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

Supposons que $X_u \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$, $X_u = (X'_u, X''_u)$ et $(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante. Alors le facteur de transfert

pour le groupe endoscopique $U(V'_u, h'_u) \times U(V''_u, h''_u)$ de $U(W_u, h_u)$ est, à une constante multiplicative près,

$$\text{sgn}_{K''/K''\#}(\gamma c''^{-1} \dot{P}_{X_u}(a'')).$$

D'autre part, il existe $\gamma_u \in L^\times$, $\gamma_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié tel que $\tau(\gamma_u) = (-1)^d \gamma_u$ et $\Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u)$ est égal à

$$(\text{bonne constante}) \cdot \text{sgn}_{K''/K''\#}(\gamma_u c''^{-1} \dot{P}_{X_u}(a'')).$$

Il suffit de montrer que $\text{sgn}_{K''/K''\#}(\gamma/\gamma_u)$ est une bonne constante. Cela résulte du lemme 7.15 car $X''_u \xrightarrow{\text{VP}} Y''_u$ et $U(V''_u, h''_u) \subset \text{SO}(V''_u, (\text{tr}_{L/L\#})_* h''_u)$.

Quant à la normalisation, voir la remarque à la fin de [Wal01, X]. □

8. Transfert : le cas non archimédien

Dans cette section, F est toujours un corps local non archimédien de caractéristique nulle, $\widetilde{\text{Sp}}(W)$ désigne le revêtement métaplectique à huit feuillets $\widetilde{\text{Sp}}^{(8)}(W)$ de $\text{Sp}(W)$.

8.1 Voisinages d'un élément semi-simple

Soit M un F -groupe réductif connexe ou un revêtement d'un tel groupe vérifiant l'hypothèse 5.19. Dans le cas d'un revêtement $\mathfrak{p} : M \rightarrow \underline{M}(F)$, si $\eta \in M_{\text{ss}}$, posons $M^\eta := \mathfrak{p}^{-1}(\underline{M}^{\mathfrak{p}(\eta)}(F))$ et $M_\eta := \mathfrak{p}^{-1}(\underline{M}_{\mathfrak{p}(\eta)}(F))$. Dans le cas d'un groupe réductif, on confond systématiquement M et $M(F)$.

Pour tout $\eta \in M_{\text{ss}}$ et tout ouvert M^η -invariant $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{m}_\eta$ contenant 0, il existe un ouvert M^η -invariant $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$ tel que :

- (i) $\exp : \mathfrak{U} \rightarrow M_\eta$ est défini et est un homéomorphisme sur son image, qui est ouvert dans M_η ;
- (ii) l'application $(X, x) \mapsto x^{-1} \exp(X)\eta x$ de $\mathfrak{U} \times M$ sur M est partout submersive, son image \mathfrak{U}^\natural est un ouvert M^η -invariant de M ;
- (iii) si $x \in M$ et s'il existe $X \in \mathfrak{U}$ tel que $x^{-1} \exp(X)\eta x \in \exp(\mathfrak{U})\eta$, alors $x \in M^\eta$.

De plus, tout ouvert M -invariant dans M contenant η contient un ouvert de la forme \mathfrak{U}^\natural . Lorsque M est un F -groupe réductif et \mathfrak{U}' est invariant par conjugaison géométrique, on peut supposer de plus que :

- \mathfrak{U} est invariant par conjugaison géométrique sous M^η ;
- si $x \in M(\bar{F})$ et s'il existe $X \in \mathfrak{U}$ tel que $x^{-1} \exp(X)\eta x \in \exp(\mathfrak{U})\eta$, alors $x \in M^\eta(\bar{F})$.

Posons $\mathfrak{U}_{\text{reg}} := \mathfrak{U} \cap \mathfrak{m}_{\eta, \text{reg}}$.

PROPOSITION 8.1. *Soit \mathfrak{U} un ouvert comme ci-dessus. Supposons \mathfrak{U} suffisamment petit.*

- Soit $f^\natural \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$, alors il existe $f \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ tel que

$$J_{M_\eta}(X, f) = J_M(\exp(X)\eta, f^\natural)$$

pour tout $X \in \mathfrak{U}_{\text{reg}}$.

- Inversement, soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ tel que $X \mapsto J_{M_\eta}(X, f)$ est invariant par $M^\eta(F)$, alors il existe $f^\natural \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ qui satisfait à l'égalité ci-dessus.

Supposons que M est un F -groupe réductif connexe et l'ouvert \mathfrak{U} est invariant par conjugaison géométrique sous M^η , alors les énoncés précédents restent vrais pour l'égalité

$$J_{M_\eta}^{\text{st}}(X, f) = J_M^{\text{st}}(\exp(X)\eta, f^\natural),$$

et la condition sur f pour l'existence de f^\natural est que $X \mapsto J_{M_\eta}(X, f)$ soit invariant par conjugaison géométrique par M^η .

Ces propriétés sont bien connues, voir par exemple [Wal08, 2.3].

8.2 Un triplet endoscopique non standard

Notons $G_1 := \text{Sp}(2n)$, $G_2 := \text{Spin}(2n + 1)$. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $X_{i,*}$ (respectivement X_i^*) le réseau de caractères (respectivement cocaractères) du F -tore maximal déployé standard dans G_i ; l'ensemble des racines (respectivement coracines) est noté par Σ_i (respectivement $\check{\Sigma}_i$). Identifions $X_{1,*}$ à \mathbb{Z}^n avec la base standard $\{e_1, \dots, e_n\}$. La base duale pour X_1^* est notée par $\{f_1, \dots, f_n\}$. Identifions $X_{2,*}$ au groupe des $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\pm f_i \pm f_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2f_i : 1 \leq i \leq n\}, \\ \check{\Sigma}_1 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}, \\ \Sigma_2 &= \{\pm f_i \pm f_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm f_i : 1 \leq i \leq n\}, \\ \check{\Sigma}_2 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

On a $X_{2,*} \subset X_{1,*}$. Notons $X_{i,*,\mathbb{Q}} := X_{i,*} \otimes \mathbb{Q}$ ($i = 1, 2$), alors $X_{2,*,\mathbb{Q}} = X_{1,*,\mathbb{Q}}$. Posons $j_* = \text{id} : X_{1,*,\mathbb{Q}} \rightarrow X_{2,*,\mathbb{Q}}$. Il y a des bijections

$$\begin{aligned} \tau : \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_1 \\ \pm f_i \pm f_j &\mapsto \pm f_i \pm f_j, \\ \pm f_i &\mapsto \pm 2f_i; \\ \check{\tau} : \check{\Sigma}_1 &\rightarrow \check{\Sigma}_2 \\ \pm e_i \pm e_j &\mapsto \pm e_i \pm e_j, \\ \pm e_i &\mapsto \pm 2e_i. \end{aligned}$$

Définissons $b : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ par $b(\pm f_i \pm f_j) = 1$, $b(\pm f_i) = \frac{1}{2}$; définissons $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ par $\check{b}(\pm e_i \pm e_j) = 1$, $\check{b}(\pm e_i) = \frac{1}{2}$. Ces données fournissent un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) au sens de [Wal08, 1.7], qui est non ramifié lorsque $p > 2$. Comme l'endoscopie standard, on dispose d'une correspondance de classes de conjugaison géométriques semi-simples régulières et d'une correspondance de tores maximaux. La correspondance de classes de conjugaison est comme suit : $X \in \mathfrak{sp}(2n)_{\text{reg}}(F)$ et $Y \in \mathfrak{spin}(2n + 1)_{\text{reg}}(F) = \mathfrak{so}(2n + 1)_{\text{reg}}(F)$ se correspondent si et seulement si $X \xleftrightarrow{\text{VP}} Y$ (la notation dans la définition 7.3).

THÉORÈME 8.2 (Transfert non standard [Wal08, 1.8]). *Fixons des mesures de Haar sur $G_1(F)$, $G_2(F)$. Si $X_i \in \mathfrak{g}_{i,\text{reg}}$ ($i = 1, 2$) se correspondent, alors pour tout $f_2 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_2(F))$ il existe $f_1 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$ telle que*

$$J_{G_1}^{\text{st}}(X_1, f_1) = J_{G_2}^{\text{st}}(X_2, f_2),$$

où les intégrales orbitales sont définies par rapport à des mesures compatibles sur les commutants. On dit que f_1 est un transfert de f_2 .

THÉOREME 8.3 (Lemme fondamental non standard [Wal08, 4.10]). *Plaçons-nous dans le cas non ramifié. Soient $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{g}_1(F)$ et $\mathfrak{k}_2 \subset \mathfrak{g}_2(F)$ des réseaux hyperspéciaux. Alors $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}_1}$ est un transfert de $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}_2}$ si l'on utilise des mesures non ramifiées sur $G_1(F)$ et $G_2(F)$.*

On utilisera une variante où G_2 est remplacé par $\underline{G}_2 := \mathrm{SO}(2n + 1)$. On a une isogénie canonique $G_2 \rightarrow \underline{G}_2$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

LEMME 8.4. *Les assertions du transfert et du lemme fondamental ci-dessus restent valables si l'on remplace G_2 par \underline{G}_2 .*

Démonstration. L'identification $\mathfrak{g}_2 = \underline{\mathfrak{g}}_2$ préserve les réseaux hyperspéciaux si $p > 2$. On vérifie que pour tout $X_2 \in \mathfrak{g}_{2,\mathrm{reg}}(F)$, $J_{\underline{G}_2}^{\mathrm{st}}(X_2, f_2)$ et $J_{G_2}^{\mathrm{st}}(X_2, f_2)$ ne diffèrent que par une constante multiplicative dépendant du choix des mesures de Haar sur $G_2(F)$ et $\underline{G}_2(F)$. Donc le transfert reste valable. Quant au lemme fondamental, il suffit de montrer que cette constante vaut 1 si l'on utilise les mesures non ramifiées. Cela résulte d'un résultat de Kottwitz adapté aux algèbres de Lie (cf. [Kot86, 7.3]) en prenant X_2 de réduction régulière. \square

8.3 Démonstration du transfert

Soient $\epsilon = (\epsilon', \epsilon'') \in H(F)_{\mathrm{ss}}$. On commence par établir le transfert local en ϵ .

LEMME 8.5. *Supposons H_ϵ quasi-déployé. Il existe un voisinage $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1 tel que si $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, alors il existe $f_\epsilon^H \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ telle que*

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = J_{H_\epsilon}^{\mathrm{st}}(\gamma, f_\epsilon^H)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G\text{-reg}}(F)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ un voisinage vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1. Montrons d'abord qu'il existe $g_\epsilon^H \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ telle que

$$J_{H,\tilde{G}}(\exp(Y)\epsilon, f) = J_{H_\epsilon}^{\mathrm{st}}(Y, g_\epsilon^H) \tag{20}$$

pour tout $Y \in \mathfrak{U}$ tel que $\exp(Y)\epsilon \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G\text{-reg}}(F)$.

Soient η_1, \dots, η_m des représentants des classes de conjugaison semi-simples qui correspondent à ϵ . Quitte à rétrécir \mathfrak{U} , on peut supposer qu'il existe des voisinages $\mathfrak{V}_i \subset \mathfrak{g}_{\eta_i}$ vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1, tels que l'ensemble des éléments correspondant à des éléments dans \mathfrak{U}^\natural est inclus dans $\mathfrak{V}_1^\natural \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{V}_m^\natural$. Alors

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_{i=1}^m J_{H,\tilde{G}}^{(i)}(\gamma, f)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G\text{-reg}}(F)$ et tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, où $J_{H,\tilde{G}}^{(i)}(\gamma, f)$ est défini de la même façon que (9) sauf que la somme est restreinte aux $\delta \in \mathfrak{V}_i$. Écrivons $\gamma = \exp(Y)\epsilon$. On se ramène à démontrer que pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $g_\epsilon^{H,(i)} \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ tel que

$$J_{H,\tilde{G}}^{(i)}(\gamma, f) = J_{H_\epsilon}^{\mathrm{st}}(Y, g_\epsilon^{H,(i)}).$$

Fixons un $1 \leq i \leq m$. Conservons le formalisme de § 7.1 et paramétrons $\mathcal{O}(\epsilon)$ et $\mathcal{O}(\eta_i)$ par

$$\begin{aligned} \eta_i &\in \mathcal{O}\left(\bigoplus_u (L/L^\#, u, (W_u, h_u)) \oplus (W_+, \langle \cdot | \cdot \rangle_+) \oplus (W_-, \langle \cdot | \cdot \rangle_-)\right), \\ \epsilon' &\in \mathcal{O}\left(\bigoplus_u (L/L^\#, u, (V'_u, h'_u)) \oplus (V'_+, q'_+) \oplus (V'_-, q'_-)\right), \\ \epsilon'' &\in \mathcal{O}\left(\bigoplus_u (L/L^\#, -u, (V''_u, h''_u)) \oplus (V''_+, q''_+) \oplus (V''_-, q''_-)\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} G_{\eta_i} &= \prod_u U(W_u, h_u) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-), \\ H'_{\epsilon'} &= \prod_u U(V'_u, h'_u) \times \mathrm{SO}(V'_+, q'_+) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-), \\ H''_{\epsilon''} &= \prod_u U(V''_u, h''_u) \times \mathrm{SO}(V''_+, q''_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-), \\ H_\epsilon &= H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}. \end{aligned}$$

Prenons des images réciproques $\tilde{\eta}_i \in \mathfrak{p}^{-1}(\tilde{\eta}_i)$ telles que $\tilde{\eta}_i = \pm 1$ lorsque $\eta_i = \pm 1$. Par la descente des intégrales orbitales dans la proposition 8.1, il existe une fonction $f_i^b \in C_c^\infty(\mathfrak{Y}_i)$ telle que

$$J_{H, \tilde{G}}^{(i)}(\gamma, f) = \sum_X \Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\tilde{\eta}_i) J_{G_{\eta_i}}(X, f_i^b), \tag{21}$$

où X parcourt les représentants des classes de conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\eta_i}(F)$ telles que $\exp(X)\eta_i$ corresponde à γ , ou ce qui revient au même, $X \xrightarrow{\mathrm{VP}} Y$.

Effectuons les décompositions dans § 7.1 :

$$\begin{aligned} X &= ((X_u)_u, X_+, X_-), \\ Y &= ((Y_u)_u, Y_+, Y_-), \\ X_\bullet &= (X'_\bullet, X''_\bullet) \in \mathfrak{u}(W_u, h_u), \\ Y_u &= (Y'_u, Y''_u) \in \mathfrak{u}(V'_u, h'_u) \times \mathfrak{u}(V''_u, h''_u), \\ Y_\pm &= (Y'_\pm, Y''_\pm) \in \mathfrak{so}(V'_\pm, q'_\pm) \times \mathfrak{so}(V''_\pm, q''_\pm), \end{aligned}$$

où $\bullet \in \{u, +, -\}$ comme d'habitude. Il suffit de considérer le cas $f_i^b = (\prod_u f_u) \cdot f_+ \cdot f_-$ dont $f_u \in C_c^\infty(\mathfrak{u}(W_u, h_u))$, $f_\pm \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(W_\pm))$. D'après la descente du facteur de transfert dans le théorème 7.10, quitte à rétrécir \mathfrak{U} le côté à droite de (21) s'exprime comme le produit $(\prod_u J_u) \cdot J_+ \cdot J_-$, où

$$\begin{aligned} J_u &= J_u(Y_u) := \sum_{X_u} \Delta_u(Y_u, X_u) J_{U(W_u, h_u)}(X_u, f_u), \\ J_+ &= J_+(Y_+) := \sum_{X_+} \Delta_+(Y_+, X_+) J_{\mathrm{Sp}(W_+)}(X_+, f_+), \\ J_- &= J_-(Y_-) := \sum_{X_-} \Delta_-(Y_-, X_-) J_{\mathrm{Sp}(W_-)}(X_-, f_-), \end{aligned}$$

où les éléments X_\bullet parcourent les représentants de classes de conjugaison telles que $X_\bullet \xrightarrow{\mathrm{VP}} Y_\bullet$.

On se ramène à démontrer que $Y_{\bullet} \mapsto J_{\bullet}(Y_{\bullet})$ est une intégrale orbitale stable. Pour J_u , cela découle du théorème 7.23 et du transfert sur l'algèbre de Lie (voir [Wal08, 1.6]) pour l'endoscopie des groupes unitaires. Pour J_+ , fixons un X_+ dans la somme. Le transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{Sp}(W'_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ de $\mathrm{Sp}(W_+)$ fournit une fonction

$$g_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(W'_+) \times \mathfrak{so}(V''_-, q''_-))$$

telle que

$$J_+(Y_+) = J_{\mathrm{Sp}(W'_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-)}^{\mathrm{st}}((X'_+, Y''_-), g_+).$$

En décomposant $g_+ = \sum g'_+ \cdot g''_+$ où $g'_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(W'_+))$, $g''_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{so}(V''_-, q''_-))$ et en appliquant le transfert non standard du théorème 8.2 et lemme 8.4 au triplet $(\mathrm{Sp}(W'_+), \mathrm{Spin}(V'_+, q'_+), \dots)$ et à l'isogénie $\mathrm{Spin}(V'_+, q'_+) \rightarrow \mathrm{SO}(V'_+, q'_+)$, on déduit que $Y_+ \mapsto J_+(Y_+)$ est une intégrale orbitale stable. Le même argument montre que $Y_- \mapsto J_-(Y_-)$ l'est aussi. Cela établit (21).

Déduisons maintenant ce lemme de (20) en remontant les intégrales orbitales. En effet, $Y \mapsto J_{H_\epsilon}^{\mathrm{st}}(Y, g_\epsilon^H)$ est invariante par conjugaison géométrique par H^ϵ car $J_{H, \tilde{G}}(\cdot, f)$ l'est. D'après la proposition 8.1, il existe $f_\epsilon^H \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ tel que $J_{H_\epsilon}^{\mathrm{st}}(Y, g_\epsilon^H) = J_H^{\mathrm{st}}(\exp(Y)\epsilon, f_\epsilon^H)$. Cela achève la démonstration. \square

Pour démontrer le théorème 5.20, nous ferons usage d'une caractérisation locale des intégrales orbitales stables due à Langlands et Shelstad. Adoptons la convention de [LS87] concernant les mesures de Haar.

THÉORÈME 8.6 [LS90, 2.2A]. *Soit M un F -groupe réductif quasi-déployé. Soit J une fonction sur $M_{\mathrm{reg}}(F)$. Supposons que :*

- J est stablement invariante ;
- il existe un ouvert compact $C \subset M(F)$ tel que J est à support dans $\bigcup_{m \in M(F)} mCm^{-1} \cap M_{\mathrm{reg}}(F)$; on dit que J est à support compact modulo conjugaison ;
- pour tout $\epsilon \in M(F)_{\mathrm{ss}}$, il existe un ouvert \mathfrak{W} contenant ϵ et $f_\epsilon \in C_c^\infty(M(F))$ tels que

$$J(\gamma) = J_M^{\mathrm{st}}(\gamma, f_\epsilon)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{W} \cap M_{\mathrm{reg}}(F)$; on dit que J est une intégrale orbitale stable locale en ϵ .

Alors il existe $f \in C_c^\infty(M(F))$ tel que $J(\gamma) = J_M^{\mathrm{st}}(\gamma, f)$ pour tout $\gamma \in M_{\mathrm{reg}}(F)$.

Démonstration du théorème 5.20. On veut appliquer le théorème de caractérisation à $J_{H, \tilde{G}}(\cdot, f)$ sur $H(F)$. A priori, cette fonction stablement invariante est définie sur $H_{G\text{-reg}}(F)$. Or le transfert local du lemme 8.5 appliqué aux éléments réguliers permet de la prolonger sur $H_{\mathrm{reg}}(F)$. Comme dans l'endoscopie pour les groupes réductifs, on montre que $J_{H, \tilde{G}}$ est à support compact modulo conjugaison. Soit $\epsilon \in H(F)_{\mathrm{ss}}$. Pour étudier le comportement local en ϵ , on peut supposer H_ϵ quasi-déployé d'après les arguments dans [LS90, 1.3]. Maintenant le lemme 8.5 montre que $J_{H, \tilde{G}}$ est une intégrale orbitale stable locale en ϵ . Cela permet de conclure. \square

8.4 Démonstration du lemme fondamental pour les unités

Nous nous plaçons dans le cas non ramifié de l'hypothèse 5.21. Notons p la caractéristique résiduelle de F . Fixons $G = \mathrm{Sp}(W)$ et $H = H_{n', n''}$ un groupe endoscopique de \tilde{G} . Fixons un réseau autodual $L \subset W$ et posons $K = \mathrm{Stab}_G(L)$. Identifions K à un sous-groupe compact ouvert de \tilde{G} à l'aide du modèle latticiel.

Conservons les notations du théorème 5.23. Cette section est consacrée à la démonstration de l'égalité

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) \tag{22}$$

pour tout $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$, où on utilise les mesures non ramifiées sur $\tilde{G}, H(F)$ et des mesures compatibles sur les commutants.

Comme le transfert, ce lemme fondamental sera démontré par la méthode de descente. Pour ce faire, effectuons des réductions.

LEMME 8.7. *Si γ n'est pas un élément compact, alors $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$.*

Démonstration. La compacité ne dépend que de la classe de conjugaison géométrique (voir [Wal08, 5.2]). Supposons que γ n'est pas compact, on a alors $\mathcal{O}^{\text{st}}(\gamma) \cap K_H = \emptyset$, d'où $J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$. D'autre part, si $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ n'est pas compact, alors $\mathcal{O}(\delta) \cap K = \emptyset$, d'où $J_{\tilde{G}}(\delta, f_K) = 0$. Or la correspondance de classes de conjugaison semi-simples de § 5.1 préserve la compacité. On en déduit que $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$. \square

Supposons dès maintenant que $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ est compact, alors on a la décomposition de Jordan topologique

$$\gamma = \exp(Y)\epsilon, \tag{23}$$

$$\epsilon = (\epsilon', \epsilon''), \tag{24}$$

$$Y = (Y', Y''), \tag{25}$$

telle que ϵ est d'ordre fini premier à p .

LEMME 8.8. *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $\gamma_1 \in H_{G\text{-reg}}(F)$ tel que :*

- γ, γ_1 sont stablement conjugués ;
- soit $\gamma_1 = \exp(Y_1)\epsilon_1$ la décomposition de Jordan topologique, alors H_{ϵ_1} est quasi-déployé.

De plus, supposons H_ϵ quasi-déployé, alors ϵ est stablement conjugué à un élément de K_H si et seulement si H_ϵ est non ramifié.

Les mêmes assertions restent valides pour un élément compact $\delta \in G_{\text{reg}}(F)$ et sa décomposition de Jordan topologique.

Démonstration. Voir [Wal08, 5.13(2) et 5.3(v)]. \square

LEMME 8.9. *Supposons que $\gamma \in H_{G\text{-reg}}(F)$ est compact avec $\epsilon \in K_H$, alors il existe $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ avec la décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta$ telle que $\eta \in K$.*

Démonstration. Cf. [Wal08, 5.7(ii)]. \square

LEMME 8.10. *Soit $\eta \in K$ d'ordre fini premier à p , alors G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est encore un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. Notons $\mathfrak{k}_\eta \subset \mathfrak{g}_\eta(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé. Pour tout $X \in \mathfrak{g}_\eta(F)$, on a*

$$\begin{aligned} J_{\tilde{G}}(\exp(X)\eta, f_K) &= J_{G_\eta}(X, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta}) \\ &= J_{G_\eta}(\exp(X), \mathbb{1}_{K_\eta}), \end{aligned}$$

si l'on utilise les mesures non ramifiées.

Démonstration. D'après [Wal08, 5.3(iii)], G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. Posons $T^\flat := (G_\eta)_X$. Les arguments dans [Wal08, 5.11] montrent

que

$$\begin{aligned} & \int_{G_{\exp(X)\eta(F)} \backslash G(F)} f_K(\tilde{x}^{-1} \exp(X_j)\eta\tilde{x}) \, d\tilde{x} \\ &= \sum_{\dot{x} \in T^b(F) \backslash G_\eta(F) / K_\eta} \text{mes}(T^b(F) \backslash T^b(F)xK_\eta) f_K(\tilde{x}^{-1} \exp(X)\eta\tilde{x}), \end{aligned} \tag{26}$$

où \tilde{x} est une image réciproque quelconque de x . Montrons que

$$\forall \tilde{x} \in \mathbf{p}^{-1}(G_\eta(F)), \quad f_K(\tilde{x}^{-1} \exp(X)\eta\tilde{x}) = \mathbb{1}_K(x^{-1} \exp(X)\eta x). \tag{27}$$

En effet, il suffit de traiter le cas $x^{-1} \exp(X)\eta x \in K$. Le côté à droite vaut alors 1. Supposons donc $\tilde{x}^{-1} \exp(X)\eta\tilde{x} \in \varepsilon K$ où $\varepsilon \in \text{Ker}(\mathbf{p})$. En prenant la limite des (p^{n_k}) -ièmes puissances avec $n_k \rightarrow +\infty$ une suite convenable, on obtient $\tilde{x}^{-1}\eta\tilde{x} \in \varepsilon K$. Or \tilde{x} centralise η , d'où $\varepsilon = 1$.

Maintenant on peut reprendre les arguments dans [Wal08, 5.11] et on arrive à $J_{\tilde{G}}(\exp(X)\eta, f_K) = J_{G_\eta}(X, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta})$. □

Démonstration du théorème 5.23. Vu les résultats précédents, on peut supposer que γ est compact avec les décompositions (23)–(25) et que H_ϵ est quasi-déployé. Soit $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ , alors δ est compact avec la décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta$. S'il n'existe pas δ comme ci-dessus satisfaisant à $\eta \in K$, alors $J_{H, \tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$, et H_ϵ n'est pas non ramifié d'après le lemme 8.9. Dans ce cas-là $\mathcal{O}^{\text{st}}(\gamma)$ ne coupe aucun sous-groupe hyperspécial de $H(F)$ (voir [Wal08, 5.3(v)]), d'où $J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$ et le théorème 5.23 est vérifié.

Supposons donc $\eta \in K$, alors G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est encore un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$ par le lemme 8.10.

Prenons un ensemble de représentants $\{\delta_j\}_{j \in J}$ de $\mathcal{O}^{\text{st}}(\delta)/\text{conj}$. Soit J_0 l'ensemble des $j \in J$ tel que $\mathcal{O}(\delta_j) \cap K \neq \emptyset$. D'après [Wal08, 5.11], on peut prendre les δ_j ($j \in J_0$) avec décompositions de Jordan topologiques de la forme $\delta_j = \exp(X_j)\eta$, où $\{X_j\}_{j \in J_0}$ forment un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans \mathfrak{g}_η coupant \mathfrak{k}_η dans $\mathcal{O}^{\text{st}}(X)$. On a

$$J_{H, \tilde{G}}(\gamma, f_K) = \sum_{j \in J_0} \Delta(\exp(X_j)\eta, \exp(Y)\epsilon) J_{\tilde{G}}(\exp(X_j)\eta, f_K). \tag{28}$$

Notons comme précédemment $\mathfrak{k}_\eta \subset \mathfrak{g}_\eta(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé à K_η . Grâce au lemme 8.10, pour tout $j \in J_0$ on a

$$J_{\tilde{G}}(\exp(X_j)\eta, f_K) = J_{G_\eta}(X_j, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta}).$$

Prenons des paramètres pour $\mathcal{O}(\eta)$ et $\mathcal{O}(\epsilon)$ comme dans la preuve du lemme 8.5. On a

$$\begin{aligned} G_\eta &= \prod_u U(W_u, h_u) \times \text{Sp}(W_+) \times \text{Sp}(W_-), \\ H'_{\epsilon'} &= \prod_u U(V'_u, h'_u) \times \text{SO}(V'_+, q'_+) \times \text{SO}(V'_-, q'_-), \\ H''_{\epsilon''} &= \prod_u U(V''_u, h''_u) \times \text{SO}(V''_+, q''_+) \times \text{SO}(V''_-, q''_-), \\ H_\epsilon &= H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}. \end{aligned}$$

Introduisons aussi les objets $X_{\pm}, X_u, Y_{\pm}, Y_u$, etc. dans § 7.1. Les mêmes arguments qu'en le lemme 8.5 permettent d'exprimer $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K)$ comme un produit $(\prod_u J_u)J_+J_-$ avec

$$\begin{aligned} J_u &= J_u(Y_u) := \sum_{X_u} \Delta_u(Y_u, X_u) J_{U(W_u, h_u)}(X_u, f_u), \\ J_+ &= J_+(Y_+) := \sum_{X_+} \Delta_+(Y_+, X_+) J_{\text{Sp}(W_+)}(X_+, f_+), \\ J_- &= J_-(Y_-) := \sum_{X_-} \Delta_-(Y_-, X_-) J_{\text{Sp}(W_-)}(X_-, f_-). \end{aligned}$$

Ces expressions sont, pour l'essentiel, composées des intégrales endoscopiques pour les groupes classiques et des intégrales orbitales stables auxquels le transfert non standard s'applique (cf. la démonstration du lemme 8.5).

Supposons que H_{ϵ} n'est pas non ramifié. On a vu que $J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$ dans ce cas. D'autre part, un résultat de Kottwitz [Kot86, 7.5] adapté aux algèbres de Lie montre qu'au moins l'un des J_u, J_+, J_- s'annule, d'où $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$ et le théorème 5.23 est vérifié.

Supposons désormais H_{ϵ} non ramifié. C'est loisible de supposer $\epsilon \in K_H$ et dans ce cas $K_{H,\epsilon} := K_H \cap H_{\epsilon}(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_{\epsilon}(F)$ (voir [Wal08, 5.3(iii) et (v)]). Notons $\mathfrak{k}_{\epsilon} \subset \mathfrak{h}_{\epsilon}(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé. On le décompose en des réseaux hyperspéciaux :

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_{H,\epsilon} &= \bigoplus_u \mathfrak{k}_{H,u} \oplus \mathfrak{k}_{H,+} \oplus \mathfrak{k}_{H,-}, \\ \mathfrak{k}_{H,u} &\subset \mathfrak{u}(V'_u, h'_u) \oplus \mathfrak{u}(V''_u, h''_u), \\ \mathfrak{k}_{H,\pm} &\subset \mathfrak{so}(V'_{\pm}, q'_{\pm}) \oplus \mathfrak{so}(V''_{\pm}, q''_{\pm}). \end{aligned}$$

Alors la descente des intégrales orbitales stables (voir [Wal08, 5.11]) donne

$$\begin{aligned} J_H^{\text{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) &= J_{H_{\epsilon}}(Y, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_H}) \\ &= \prod_u J_{H,u} \cdot J_{H,+} \cdot J_{H,-}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_{H,u} &:= J_{U(V'_u, h'_u) \times U(V''_u, h''_u)}^{\text{st}}(Y_u, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,u}}), \\ J_{H,+} &:= J_{\text{SO}(V'_+, q'_+) \times \text{SO}(V''_+, q''_+)}^{\text{st}}(Y_+, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,+}}), \\ J_{H,-} &:= J_{\text{SO}(V'_-, q'_-) \times \text{SO}(V''_-, q''_-)}^{\text{st}}(Y_-, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,-}}). \end{aligned}$$

Comme les hypothèses dans § 7.2 sont satisfaites, les facteurs de transfert Δ_{\bullet} ($\bullet \in \{u, +, -\}$) sont normalisés au sens de [Wal08, § 4.7] d'après le théorème 7.23. Les arguments qui restent sont analogues à ceux pour le lemme 8.5, sauf que l'on utilise le lemme fondamental sur les algèbres de Lie pour les groupes classiques et le lemme fondamental non standard sous la forme du lemme 8.4. Le bilan est que $J_u = J_{H,u}, J_+ = J_{H,+}$ et $J_{H,-}$, ce qui achève la démonstration. □

REMERCIEMENTS

J'exprime ma forte gratitude à Jean-Loup Waldspurger pour m'avoir proposé ce sujet et pour ses nombreuses remarques cruciales pendant ce travail. Je remercie également David Renard pour des discussions sur le cas réel. Enfin, je remercie le referee pour d'utiles remarques.

REFERENCES

- Ada98 J. Adams, *Lifting of characters on orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J. **92** (1998), 129–178.
- ABPTV07 J. Adams, D. Barbasch, A. Paul, P. Trapa and D. A. Vogan Jr., *Unitary Shimura correspondences for split real groups*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 701–751.
- Hal93 T. C. Hales, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, in *Representation theory of groups and algebras*, Contemporary Mathematics, vol. 145 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1993), 109–134.
- How07 T. Howard, *Lifting of characters on p -adic orthogonal and metaplectic groups*, PhD thesis, University of Maryland (2007).
- Kot86 R. E. Kottwitz, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.
- Lab99 J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque **257** (1999), with Appendix A by L. Clozel and J.-P. Labesse and Appendix B by L. Breen.
- Lam05 T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2005).
- LS87 R. P. Langlands and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), 219–271.
- LS90 R. Langlands and D. Shelstad, *Descent for transfer factors*, in *The Grothendieck Festschrift, Volume II*, Progress in Mathematics, vol. 87 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990), 485–563.
- LP81 G. Lion and P. Perrin, *Extension des représentations de groupes unipotents p -adiques. Calculs d'obstructions*, in *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups* (Marseille, 1980), Lecture Notes in Mathematics, vol. 880 (Springer, Berlin, 1981), 337–356.
- LV80 G. Lion and M. Vergne, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in Mathematics, vol. 6 (Birkhäuser, Boston, MA, 1980).
- Mak99 K. Maktouf, *Le caractère de la représentation métaplectique et la formule du caractère pour certaines représentations d'un groupe de Lie presque algébrique sur un corps p -adique*, J. Funct. Anal. **164** (1999), 249–339.
- MVW87 C. Mœglin, M.-F. Vignéras and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p -adique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1291 (Springer, Berlin, 1987).
- MW94 C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein : une paraphrase de l'écriture*, Progress in Mathematics, vol. 113 (Birkhäuser, Basel, 1994).
- Ngo10 B.-C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **111** (2010), 1–169.
- Per81 P. Perrin, *Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique*, in *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups* (Marseille, 1980), Lecture Notes in Mathematics, vol. 880 (Springer, Berlin, 1981), 370–407.
- Ren98 D. Renard, *Transfert d'intégrales orbitales entre $\mathrm{Mp}(2n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}(n+1, n)$* , Duke Math. J. **95** (1998), 425–450.
- Ren99 D. Renard, *Endoscopy for $\mathrm{Mp}(2n, \mathbf{R})$* , Amer. J. Math. **121** (1999), 1215–1243.
- Sav88 G. Savin, *Local Shimura correspondence*, Math. Ann. **280** (1988), 185–190.
- Sch98 J. Schultz, *Lifting of characters of $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(F)$ and $\mathrm{SO}_{1,2}(F)$ for F a nonarchimedean local field*, PhD thesis, University of Maryland (1998).
- She08 D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups. I. Geometric transfer with canonical factors*, in *Representation theory of real reductive Lie groups*, Contemporary Mathematics, vol. 472 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2008), 215–246.
- Tho06 T. Thomas, *The Maslov index as a quadratic space*, Math. Res. Lett. **13** (2006), 985–999.

- Tho08a T. Thomas, *The character of the Weil representation*, J. Lond. Math. Soc. (2) **77** (2008), 221–239.
- Tho08b T. Thomas, *The Weil representation and Cayley transform*, Preprint (2008), <http://www.maths.ed.ac.uk/~jthomas7/texts/Weil2.pdf>.
- Wal01 J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque **269** (2001).
- Wal08 J.-L. Waldspurger, *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. **194** (2008).
- Wei64 A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964), 143–211.

Wen-Wei Li wenweili@math.jussieu.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu – Université Paris Diderot 7, 175 rue du Chevaleret,
75013 Paris, France